ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE IN STUTTGART. UND **C. RUNGE** IN HANNOVER.

47. BAND.

MIT 1 DOPPELTAFEL, 1 TAFEL UND 70 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1902.

Inhalt.

Kleinere Mitteilungen.

Preisaufgaben für 1903.

Auskünfte.

Anfragen.

Bücherschau.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE IN STUTTGART. UND C. RUNGE IN HANNOVER.

47. BAND. 1. u. 2. (DOPPEL-)HEFT.

MIT 1 TAFEL UND 44 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 21. Februar 1902.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Analogien zur Thermodynamik.

Von VICTOR FISCHER in Stuttgart.

In seinen „Principien der Statik monocyklischer Systeme“[1]) hat Helmholtz eine Bewegungsart analytisch begründet, die besonders wegen ihrer vielfachen Analogien mit den sogenannten verborgenen Bewegungen eine grofse Bedeutung erlangt hat. In der genannten Arbeit führt Helmholtz vor allem die Analogie der monocyklischen Bewegung mit der Wärmebewegung durch. Er zeigt, dafs das bei der ersteren erhaltene Energiedifferential vollkommen mit jenem der Wärme übereinstimmt[2]), und dafs ferner durch entsprechende Koppelung, das ist die kinematische Verbindung zweier monocyklischer Systeme, die er für den besonderen Fall eines umkehrbaren Vorganges als isomore Koppelung bezeichnet, die charakteristischen Eigenschaften eines Wärmeüberganges hervortreten. Weitere Analogien in dieser Richtung sind von Boltzmann ausgeführt worden.[3])

Meine Aufgabe soll es nun sein, auf einen sehr einfachen derartigen monocyklischen Bewegungsvorgang hinzuweisen, durch dessen Betrachtung wir zu Gleichungen gelangen, die denen der Thermodynamik auch in Bezug auf die besondere Bedeutung der darin vorkommenden Gröfsen ziemlich vollkommen analog sind.

Zu diesem Zwecke denken wir uns einen Ring von kreisförmigem Querschnitt, dessen Querschnittsdimensionen gering gegen die Länge der Mittellinie sind. Dieser sei rings eingeschlossen von einer Hülle, unter der wir uns auch eine Flüssigkeit vorstellen können, die auf seine

1) Journal für die reine und angew. Mathematik. Bd. 97.

2) Eine weitere Analogie mit den cyklischen Bewegungen ist bekanntlich auch in neueren Werken über Elektrodynamik bezüglich des Verhaltens der ponderomotorischen und besonders der elektromotorischen Kräfte durchgeführt worden.

3) L. Boltzmann. Über die Eigenschaften monocyklischer und anderer damit verwandter Systeme. Journ. f. d. reine u. angew. Mathematik. Bd. 98. — Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektricität und des Lichtes, I. Theil, 2. Vorlesung. Leipzig 1891.

Oberfläche einen überall gleichmäfsigen Druck ausübt. Der besseren Anschaulichkeit wegen wollen wir unsere Betrachtungen auf ein scheibenförmiges Element beschränken, das wir uns aus dem Ringe herausschneiden, da sich die Ergebnisse für dieses ebenso auf den ganzen Ring erstrecken, der sich ja aus lauter solchen gleichen Scheiben gleichartig zusammensetzt. Die Breite dieser Scheibe setzen wir der Einfachheit halber gleich der Einheit. Ihre Masse sei m und die spezifische Masse, also die Masse pro Volumeinheit sei μ.

Der ganze Ring sei nun in gleichmäfsiger Rotation um seine Mittellinie begriffen; mit andern Worten, er bilde das, was wir einen einfachen Wirbel nennen können. Für die Scheibe als Element des Ringes können wir dann folgende dynamische Betrachtung anstellen: Ist ω die Winkelgeschwindigkeit und $v = r\omega$ die Geschwindigkeit irgend eines Punktes in der Entfernung r von der Mittellinie, so können wir uns für jeden Punkt die Fliehkraft pro Masseneinheit $f = r\omega^2$ angegeben denken. Es wird daher die Gröfse der Fliehkraft dF eines ringförmigen Scheibenelementes dm gleich sein

$$dF = f dm = r\omega^2 \cdot \mu 2 r\pi dr = 2\pi\mu\omega^2 r^2 dr.$$

Für die Gesamtgröfse F der Fliehkraft ergiebt sich daraus

$$F = \int_0^R 2\pi\mu\omega^2 r^2 dr = \tfrac{2}{3}\pi\mu\omega^2 R^3 = \tfrac{2}{3}\pi\mu V^2 R,$$

wobei R den Umfangsradius und V die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe bedeuten. Führen wir in den erhaltenen Ausdruck wieder die Masse $m = R^2\pi\mu$ ein, so erhalten wir schliefslich

$$(1) \qquad F = \tfrac{2}{3} m\omega^2 R = \tfrac{2}{3} m \frac{V^2}{R}.$$

Wenn wir uns also $\frac{2}{3}$ der Scheibenmasse im Umfangsradius konzentriert denken, so entspricht deren Fliehkraft der Gesamtfliehkraft der homogenen Scheibe.

Ich möchte hier, bevor ich weiter gehe, noch die Bemerkung einschalten, dafs wir derartige Ausdrücke auch noch für beliebige andere Körper bilden können, die um eine durch ihren Schwerpunkt gehende Achse rotieren, da die Ableitung derselben nur von der geometrischen Gestalt des Körpers abhängt.

Bilden wir denselben beispielsweise noch für eine Kugel. Wir können uns diese aus lauter Elementarscheiben senkrecht zur Umdrehungsachse zusammengesetzt denken. Der Halbmesser einer solchen Elementarscheibe sei r, ihre Breite db; dann ist ihre Masse $dm = \mu\pi r^2 db$,

und nach Gleichung (1) ist daher ihr Beitrag zur Gesamtfliehkraft der Kugel

$$dF = \tfrac{2}{3}\pi\mu\omega^2 r^3 db.$$

Durch Integration erhalten wir, wenn R der Halbmesser der Kugel ist,

$$F = \tfrac{2}{3}\pi\mu\omega^2 \int_{-R}^{+R} r^3 db.$$

Da wir aber für r und b schreiben können

$$r = R\sin\alpha$$
$$b = R\cos\alpha,$$

so geht unser Integral nach Einführung dieser Beziehung über in

$$F = \tfrac{2}{3}\pi\mu\omega^2 R^4 \int_0^{\pi} \sin^4\alpha\, d\alpha.$$

Es ist nun

$$\int_0^{\pi} \sin^4\alpha\, d\alpha = \frac{3\pi}{8}$$

mithin

$$F = \frac{\pi^2}{4}\mu\omega^2 R^4.$$

Führen wir wieder die Masse $m = \frac{4}{3}R^3\pi\mu$ ein, so erhalten wir schliefslich als Ausdruck für die Gesamtfliehkraft der Kugel

$$F = \frac{3\pi}{16} mR\omega^2 = \frac{3\pi}{16} m \frac{V^2}{R}. \tag{2}$$

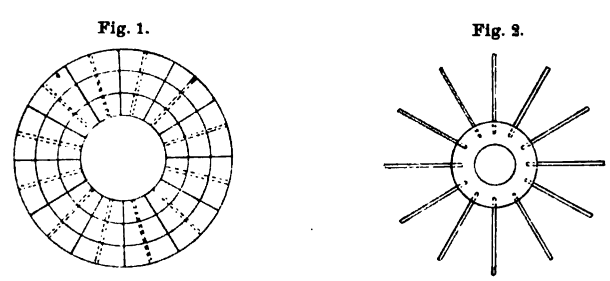
Kehren wir wieder zu unserem Wirbel zurück. Dieser soll nun derart beschaffen sein, dafs der Gesamtbetrag der auftretenden Fliehkräfte als gleichmäfsig verteilter Druck auf den Wirbelumfang zur Geltung kommt.

Dafs sich eine solche Vorstellung verwirklichen läfst, wollen wir uns sofort an einem Modell klar machen, das auch thatsächlich ausgeführt werden kann.

Zu diesem Zwecke nehmen wir eine hölzerne kreisrunde Scheibe, zerschneiden dieselbe erst in Ringe von gleicher Dicke und zerteilen diese wieder in radialer Richtung. Die auf solche Art gebildeten Scheibenteile durchbohren wir nun so, wie es durch gestrichelte Linien in der Zeichnung (Fig. 1) angedeutet ist. Auf einer hölzernen Nabe (Fig. 2) befestigen wir nun in radialer Richtung Messingstäbe von genügendem Widerstande gegen Verbiegung, die den Bohrlöchern in Fig. 1 entsprechen müssen.

Auf diese Stäbe fädeln wir die einzelnen Scheibenteile auf und ziehen über den ganzen Scheibenumfang ein geschlossenes elastisches Band. Die so gebildete Scheibe können wir nun auf eine Welle aufkeilen, an der eine Kurbel angebracht ist.

Wenn wir nun das Ganze als reibungslos ansehen, so dafs also, wenn das Band entfernt wird, die einzelnen Scheibenteile in radialer Richtung vollkommen frei beweglich erscheinen, und die Scheibe in Umdrehung bringen, so wird in jedem Scheibenteile eine ihm entsprechende Fliehkraft auftreten; und zwar wird dieselbe in unserem Falle mit dem Quadrate der Schwerpunktradien zunehmen, was leicht nachzurechnen ist. Jede dieser Fliehkräfte wird sich nun in ihrer ganzen Gröfse als Druck auf den nächstfolgenden Teil und von diesem wieder weiter übertragen, so dafs schliefslich die Summe aller auf-


Fig. 1. Fig. 2.

tretenden Fliehkräfte $\Sigma m \omega^2 r$ als Druck, und zwar schon aus blofsen Symmetriegründen, als gleichmäfsig verteilter Druck auf das elastische Band zur Geltung kommt.

Wir sehen, dafs wir an den dynamischen Verhältnissen nichts ändern, wenn wir die angenommenen Scheibenelemente durch solche von beliebiger symmetrischer Gestalt ersetzen, beispielsweise durch Kugeln, die gegen den Scheibenumfang hin gröfser werden. Wir können uns ferner die Messingstäbe weggenommen denken, so wird auch dann nachdem die einzelnen Scheibenelemente zentral auf einander drücken, die Bewegung ohne Auftreten von tangentiellen Drücken aufrecht erhalten werden können, wenn nur die Kugeln eine genügend rauhe Oberfläche haben, und wenn keine allzu heftigen Geschwindigkeitsänderungen stattfinden. Den Zusammenhang der einzelnen Kugeln können wir uns in diesem Falle durch elastische Schnüre bewerkstelligt denken, wobei wir aber voraussetzen, dafs die in tangentieller Richtung auftretenden Zugspannungen so gering sind, dafs wir ihre Wirkung vernachlässigen können. Auch hier können wir an unserer Annahme, dafs sich die Fliehkräfte ungehindert auf den Scheibenumfang übertragen, festhalten. Lassen wir die Scheibenelemente in unserer Vorstellung immer kleiner

werden, so geht schliefslich die obige Summe in das früher gebildete Integral über. Da nun der Gesamtdruck auf den Scheibenumfang gleich sein wird $P = 2R\pi p$, wobei p den spezifischen Druck, also den Druck pro Flächeneinheit bedeutet, so können wir dem Gesagten zufolge schreiben:

(3') $$F = \tfrac{2}{3}\pi\mu V^2 R = P = 2R\pi p$$

(3) $$\tfrac{1}{3}\mu V^2 = p.$$

Statt der spezifischen Masse können wir in Gleichung (3) auch deren reziproken Wert, das spezifische Volumen $v = \frac{1}{\mu}$ einführen und dieselbe in der Form schreiben:

(3) $$V^2 = 3pv$$

Diese Gleichung entspricht gewissermafsen der Grundgleichung der kinetischen Gastheorie, und sie möge die Grundlage für die folgenden energetischen Betrachtungen an unserer rotierenden Scheibe bilden. Aus Analogiegründen wollen wir noch für $V^2 = T$ und für $\frac{1}{3}$ den Buchstaben R setzen. Gleichung (3) schreibt sich dann in der Form

(3) $$RT = pv.$$

Hätten wir statt der obigen Scheibe ein rotierendes cylindrisches Gefäfs betrachtet, das von einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit erfüllt ist, so hätten wir an Stelle von (3) für den Druck auf die Mantelfläche die Gleichung $V^2 = 2pv$ erhalten, wovon man sich auf Grund der Eulerschen Gleichungen oder auch durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für den vorliegenden Fall leicht überzeugen kann. Es wird dann der Gesamtdruck der Flüssigkeit auf die Mantelfläche gleich sein $mR\omega^2$, also ebenso grofs als die Fliehkraft der ganzen Flüssigkeitsmasse, wenn wir uns dieselbe im Umfangsradius konzentriert denken. Hier dürften wir im Falle einer Ausdehnung in radialer Richtung den im Innern gebildeten Hohlraum nicht vernachlässigen, da derselbe von gleicher Gröfse ist mit der äufsern Volumänderung, während bei unserer Anordnung für eine geringe Ausdehnung der Scheibe dieser Hohlraum im Verhältnis zur Ausdehnung noch so klein bleibt, dafs wir ihn vernachlässigen können.

Der Betrag an kinetischer Energie der Scheibe, welcher uns gleichzeitig deren Eigenenergie vorstellt, ist

$$e = \frac{\Theta\omega^2}{2},$$

wenn $\Theta = \frac{mR^2}{2}$ das Trägheitsmoment bedeutet. Wir erhalten daher

nach Einführung dieses Wertes und unter Berücksichtigung von Gleichung (3)

$$(4) \qquad e = \frac{mV^2}{4} = \tfrac{3}{4} mpv;$$

und wenn wir die Masse der Scheibe gleich der Einheit setzen und aus später sich ergebenden Gründen die Bezeichnung $\frac{1}{4} = c_v$ und $\frac{4}{3} = \varkappa - 1$ einführen, können wir auch schreiben:

$$(4) \qquad e = c_v T = \frac{pv}{\varkappa - 1}.$$

Es ist also die Eigenenergie der Scheibe sowohl eine Funktion ihrer Umfangsgeschwindigkeit, als auch von Druck und Volumen.

Denken wir uns der Scheibe Energie zugeführt. Aus Analogierücksichten nehmen wir an, dies geschehe so, dafs eine zweite Scheibe, die wir uns auch als starren Körper denken können, von gröfserer Umfangsgeschwindigkeit mit der ersten in entsprechende Berührung komme. Infolge der dadurch bedingten Ausgleichung der Umfangsgeschwindigkeiten[1]) wird kinetische Energie von der einen Scheibe auf die andere übertragen, die sowohl zur Erhöhung der kinetischen Energie der letzteren, als auch durch Ausdehnung derselben unter Überwindung eines äufsern Druckes zur Arbeitsleistung dienen kann. Dabei ist noch zu bemerken, dafs die Scheiben nicht absolut glatt sein dürfen, sondern eine gewisse Rauhigkeit besitzen müssen, und dafs während des Ausgleiches der Umfangsgeschwindigkeiten ein unvermeidlicher Energieverlust durch Reibung stattfinden wird, was sich mit dem Satz von der Vermehrung der Entropie in Zusammenhang bringen läfst. Wir sehen ferner, dafs bei einer derartigen Energieübertragung niemals von selbst Energie von einer Scheibe mit kleinerer Umfangsgeschwindigkeit auf eine solche mit gröfserer Umfangsgeschwindigkeit übertragen werden kann. Mag die Scheibe mit der geringeren Umfangsgeschwindigkeit und mit ihr auch ihre kinetische Energie noch so grofs sein im Vergleich zur Scheibe mit der gröfseren Umfangsgeschwindigkeit, immer findet die Energieübertragung von der gröfseren zur kleineren Umfangsgeschwindigkeit statt; und was von den Umfangsgeschwindigkeiten gilt, das gilt ebenso von ihren Quadraten. In dieser Beziehung findet also Analogie mit dem Verhalten der Temperatur statt.

Eines ist dabei noch zu beachten. Bei einem derartigen Energieausgleich zweier Scheiben, beziehungsweise zweier Wirbel spielt deren

---

1) Der sich hierbei abspielende dynamische Vorgang ist ein spezieller Fall des Stofses zweier Massen, die nur Geschwindigkeiten in Bezug auf ihre Schwerpunkte besitzen, während die Geschwindigkeiten der Schwerpunkte selbst gleich 0 sind.

Umlaufssinn eine wesentliche Rolle. Wir dürfen aber nicht vergessen, daſs wenn wir uns die Wärme unter dem Bilde einer Wirbelbewegung vorstellen wollen[1]), der von uns betrachtete einzelne Wirbel auch nur ein Element der ganzen Bewegung vorstellen kann, die sich aus lauter solchen Elementen zusammensetzt. Soll diese Bewegung geordnet sein, so müssen stets Elemente von positivem mit solchen von negativem Umdrehungssinn zusammenwirken. Es müssen also mindestens soviel positive als negative Wirbel vorhanden sein.

Bezüglich der Arbeitsleistung unserer Scheibe setzen wir fest, daſs dieselbe sehr langsam erfolge, daſs daher der wirkende Druck stets nur wenig gröſser ist als der zu überwindende, ebenso soll die Differenz der Umfangsgeschwindigkeiten beider zusammenwirkenden Scheiben immer gering bleiben, mithin die Änderung der Winkelgeschwindigkeiten und daher auch der kinetischen Energien sehr langsam erfolgen. Schlieſslich soll auch die Ausdehnung der Scheibe im Verhältnis zu ihrem Durchmesser gering bleiben, damit wir ihre Massenverteilung noch als homogen ansehen können. Wir machen also dieselben Voraussetzungen, die in der Thermodynamik gemacht werden, um die Wärmevorgänge als umkehrbar zu betrachten. Wir sehen aber auch, daſs sich diese Voraussetzungen vollständig mit den Annahmen decken, die wir machen müssen, um unsern Bewegungsvorgang als einen cyklischen zu bezeichnen, bei dem die Winkelgeschwindigkeit als cyklische Koordinate, das Volumen als langsam veränderliche Koordinate zu betrachten ist.

Für den virtuellen, umkehrbaren Prozeſs können wir daher schreiben:

$$dQ = de + p\,dv. \tag{5}$$

Dabei ist zu beachten, daſs dQ kein Differential im gewöhnlichen Sinne vorstellt, denn es ist nach (4)

$$de = \tfrac{3}{4} v\,dp + \tfrac{3}{4} p\,dv,$$

daher

$$dQ = \tfrac{3}{4} v\,dp + \tfrac{7}{4} p\,dv,$$

$$\frac{\partial(\frac{7}{4}p)}{\partial p} - \frac{\partial(\frac{3}{4}v)}{\partial v} = 1.$$

Dieses Resultat stimmt mit der bekannten Hauptgleichung der Thermodynamik überein. Es wird hier wie dort die Energieumwand-

1) Vorstellungen, die von Wirbelbewegungen ausgehen, sind keineswegs neu. Ich erinnere an die beiden Abhandlungen: W. Thomson, On Vortex Atoms, Philosophical Magazine 1867. M. Rankine, On the Thermal Energy of Molecular Vortices, Trans. of the R. S. of Edinburgh. Vol. XXV. 1869.

lung bedingt sein durch die Art und Weise, wie sich der Druck mit dem Volumen ändert.

Wir wollen nun gleich daran gehen, die wichtigsten dieser Umwandlungen an unserem Beispiele zu betrachten und beginnen mit der isothermischen, resp. isodynamischen Zustandsänderung. Bei dieser wird, wie wir wissen, die gesamte zugeführte Wärme zur Arbeitsleistung verwendet, während die Eigenenergie konstant bleibt.

Übertragen wir dies auf unsern Fall, so können wir nach (4) schreiben:

$$e = \frac{V^2}{4} = \tfrac{3}{4} p v = \text{const.}$$

daher ist

(6) $$V^2 = \text{const}; \quad pv = \text{const.}$$

Gleichung (6) entspricht der Gleichung der Isotherme. Wir wollen dieselbe, um den dynamischen Zusammenhang in unserer Analogie besser zu überblicken, noch auf eine andere Weise herleiten. Wir können $V^2 = \text{const}$ auch ausdrücken durch

(6a) $$R^2 \omega^2 = R_1^2 \omega_1^2.$$

Nun ist nach (3')

$$F = P = \tfrac{2}{3} m \omega^2 R = 2 R \pi p,$$

$$F_1 = P_1 = \tfrac{2}{3} m \omega_1^2 R_1 = 2 R_1 \pi p_1.$$

Daraus folgt

(7) $$\frac{\omega^2}{\omega_1^2} = \frac{p}{p_1},$$

und aus $m = \mu R^2 \pi = \mu_1 R_1^2 \pi$ ergiebt sich

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{v_1}{v} = \frac{R_1^2}{R^2}.$$

Führen wir diese beiden Beziehungen in (6a) ein, so bekommen wir wieder

(6) $$pv = p_1 v_1.$$

Auf einfache Weise lassen sich noch die weiteren Beziehungen ableiten:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{P}{P_1} = \frac{\omega}{\omega_1}.$$

$$P v^{\frac{1}{2}} = P_1 v_1^{\frac{1}{2}}.$$

Dieses Resultat in Worte gefaſst, lautet: Während der spezifische Druck dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit direkt proportional und dem spezifischen Volumen verkehrt proportional ist, erscheint der

Gesamtdruck der Winkelgeschwindigkeit direkt proportional und der Wurzel aus dem spezifischen Volumen verkehrt proportional.

Die Arbeitsverhältnisse bei einer solchen Ausdehnung, wo also bei konstant erhaltener Umfangsgeschwindigkeit Energie zugeführt wird, werden ebenfalls ganz analog den isothermischen sein. Nennen wir die von der Scheibe geleistete Arbeit A, so ist nach (6) für die Masseneinheit

$$A = \int_R^{R_1} F dR = \int_v^{v_1} p dv = p_1 v_1 \int_v^{v_1} \frac{dv}{v}$$

(8) $$A = p_1 v_1 \lg \frac{v_1}{v} = \frac{V^2}{3} \lg \frac{v_1}{v} = RT \lg \frac{v_1}{v} \cdot$$

Die Energieübertragung können wir uns wieder so denken, dafs auf unserer Scheibe eine zweite rollt, die aber im Vergleich zu jener so grofs ist, dafs ihre Umfangsgeschwindigkeit, beziehungsweise ihre kinetische Energie durch die Berührung mit der ersteren nur geringen Schwankungen unterworfen sein kann. Damit nun zwischen beiden Scheiben eine umkehrbare und isothermische Energieübertragung stattfindet, mufs die Differenz zwischen beiden Umfangsgeschwindigkeiten erstens sehr gering und zweitens konstant sein. Ein gewisser Unterschied mufs aber immer bestehen, da sonst überhaupt keine Energieüberführung eintreten kann.

Die dauernde Aufrechterhaltung dieses konstanten Unterschiedes wird eben durch die isothermische Ausdehnung der kleinen Scheibe bedingt.

Dieses Bild ist, wie ich schon einmal erwähnte, das einfachste, das wir uns von dem Vorgang machen können. Wollen wir den thatsächlichen Verhältnissen näher kommen, so müssen wir unsere Analogie derart verallgemeinern, dafs an Stelle der einzelnen Wirbel ganze Wirbelsysteme, von denen das eine sehr grofs gegenüber dem andern ist, in Berührung kommen, so dafs von deren Berührungsflächen sich Energie von dem einen System auf das andere überträgt. Wir denken uns dabei einen Körper von durchweg gleicher Temperatur unter dem Bilde einer stationären Wirbelbewegung derart, dafs alle Wirbel des Systems mit gleichen Umfangsgeschwindigkeiten ineinander greifen. Eine Energieübertragung denken wir uns infolge des kontinuierlichen Zusammenhanges der Bewegung von der Erregungsstelle ausgehend von einem Wirbel auf den andern fortgepflanzt. Es wird also die Ausdehnung der Wirbel an der Oberfläche die Ausdehnung aller übrigen Wirbel bedingen.

Die nächste Zustandsänderung, der wir uns nun zuwenden wollen, sei die adiabatische. Bei derselben wird dem Gase keine Wärme zugeführt. Dessen Arbeitsleistung geschieht blofs auf Kosten seiner Eigenenergie. Übertragen wir dies auf unser Beispiel, so müssen wir sagen: Die Scheibe soll sich Arbeit verrichtend ausdehnen, ohne dafs ihr von aussen Energie zugeführt wird. Es mufs sich daher die kinetische Energie um den Betrag der geleisteten Arbeit vermindern.

Unsere Energiegleichung (5) schreibt sich demnach:

$$0 = de + pdv$$

$$0 = \tfrac{3}{4} v dp + \tfrac{7}{4} p dv,$$

daraus folgt weiter

$$0 = \frac{dp}{p} + \frac{7}{3}\frac{dv}{v}$$

(9) $$pv^{\frac{7}{3}} = \text{const.}$$

Diese Gleichung entspricht bis auf den Exponenten $\frac{7}{3} = 1 + \frac{4}{3}$ der Gleichung der adiabatischen Zustandsänderung.

Um den dynamischen Vorgang wieder vor Augen zu haben, wollen wir auch hier unsere Gleichung noch auf einem zweiten Wege ableiten.

Wir können das Energiedifferential für die Masseneinheit auch in folgender Weise anschreiben:

$$-de = FdR$$

$$-\tfrac{1}{4} d V^2 = \tfrac{2}{3} V^2 \frac{dR}{R}.$$

Die Integration ergiebt

$$-\frac{1}{4}\int_{V^2}^{V_1^2} \frac{dV^2}{V^2} = \frac{2}{3}\int_{R}^{R_1} \frac{dR}{R}$$

$$V^2 R^{\frac{8}{3}} = V_1^2 R_1^{\frac{8}{3}}.$$

Führen wir wieder die Beziehung $\frac{R^2}{R_1^2} = \frac{v}{v_1}$ ein, und setzen $V^2 = T$, so erhalten wir

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\varkappa - 1}.$$

Auch in dieser Form ist uns die Gleichung aus der Thermodynamik bekannt, und ihre Zurückführung auf (9) unterliegt keinen Schwierigkeiten.

Bezüglich des Verhaltens des Gesamtdruckes zum Volumen ergiebt sich

$$Pv^{\frac{11}{6}} = P_1 v_1^{\frac{11}{6}}.$$

Was die von der Scheibe an die Hülle abgegebene Arbeit A anbelangt, so schreibt sich dieselbe analog wie in der Thermodynamik

(10) $$A = \tfrac{1}{4}(V^2 - V_1^2) = \tfrac{3}{4}(pv - p_1 v_1) = \frac{pv}{\varkappa - 1}\left(1 - \left(\frac{v}{v_1}\right)^{\varkappa - 1}\right).$$

Den letzten Ausdruck der Gleichung (10) hätten wir natürlich auch durch Ausführung von $\int_v^{v_1} p\,dv$ unter Benutzung von (9) erhalten.

Wir kommen nun zur Zustandsänderung bei konstantem Volumen. Bei dieser müssen wir uns denken, daſs die rotierende Scheibe durch die sie umgebende Hülle an einer Ausdehnung verhindert wird. Es wird dann, dem analogen Fall der Thermodynamik entsprechend, von der Scheibe keine Arbeit abgegeben. Daher wird die ganze ihr zugeführte Energie zur Erhöhung ihrer kinetischen Energie verbraucht, und die Energiegleichung lautet:

$$dQ = de.$$

Durch Integration erhalten wir für die Masseneinheit

(11) $$Q = (e_1 - e) = \tfrac{1}{4}(V_1^2 - V^2) = \tfrac{3}{4}v(p_1 - p).$$

Aus Gleichung (3') ergiebt sich sofort

$$\frac{V^2}{V_1^2} = \frac{\omega^2}{\omega_1^2} = \frac{p}{p_1} = \frac{P}{P_1} = \frac{F}{F_1}.$$

Es ist also der spezifische Druck proportional dem Quadrate der Umfangsgeschwindigkeit, was mit dem Verhalten der Temperatur bei konstantem Volumen eines vollkommenen Gases übereinstimmt.

Wir haben schlieſslich noch die Zustandsänderung bei konstantem Druck zu besprechen. Bei dieser muſs die Energiezufuhr so geleitet werden, daſs der Druck stets gleich ist einem konstant bleibenden Gegendruck der Umgebung. Wenn wir dieser Bedingung Rechnung tragen, so geht die Energiegleichung (5) über in

$$dQ = \tfrac{3}{4}p\,dv + p\,dv = \tfrac{7}{4}p\,dv.$$

Durch Integration erhalten wir

(12) $$Q = \tfrac{7}{4}p\int_v^{v_1} dv = \tfrac{7}{4}p(v_1 - v) = \tfrac{7}{12}(V_1^2 - V^2).$$

Setzen wir für $\frac{7}{12} = c_p$, so ergeben sich zwischen c_p und $c_v = \frac{1}{4}$ die beiden Beziehungen

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{3} = \varkappa.$$

$$c_p - c_v = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} = R.$$

Dies sind dieselben Beziehungen, wie sie uns aus der Thermodynamik geläufig sind.

c_v können wir definieren als jene Energie, die wir der rotierenden Scheibe zuführen müssen, um das Quadrat ihrer Umfangsgeschwindigkeit bei konstant bleibendem Volumen um eine Einheit zu erhöhen, und c_p als jene Energie, die wir zuführen müssen, um das Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit um eine Einheit zu erhöhen, wenn sich gleichzeitig die Scheibe bei konstantem spezifischen Druck ausdehnt. Durch das Verhältnis dieser beiden Energiebeträge ist $\varkappa$, durch ihre Differenz ist R definiert.

Wir wollen die Energiegleichung wieder mit Einführung der Fliehkraft anschreiben und dabei beachten, daſs ω^2, da es nach (7) p direkt proportional ist, ebenfalls konstant bleibt:

$$dQ = \frac{1}{4} d V^2 + \frac{2}{3}\omega^2 R dR.$$

Durch Integration zwischen gegebenen Grenzen ergiebt sich

$$Q = \frac{1}{4}(V_1^2 - V^2) + \frac{1}{3}(V_1^2 - V^2),$$

und nach Einführung unserer Analogiebezeichnungen,

$$Q = c_v(T_1 - T) + R(T_1 - T) = c_p(T_1 - T).$$

In dieser Form ist uns der Ausdruck auch aus der Thermodynamik bekannt.

Für das Verhältnis der Fliehkräfte können wir schreiben:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{P}{P_1} = \frac{R}{R_1} = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{v_1^{\frac{1}{2}}}.$$

Bezüglich der dynamischen Verhältnisse ist noch zu bemerken, daſs während bei der isothermischen Zustandsänderung die Umfangsgeschwindigkeit konstant bleibt, dies hier für die Winkelgeschwindigkeit zutrifft.

Wir haben nun in unserer dynamischen Analogie die vier wichtigsten umkehrbaren Prozesse der Thermodynamik besprochen, und es unterliegt keinen Schwierigkeiten mehr, sich jede andere Zustandsänderung, so z B. die polytropische, bei der die zugeführte Wärme der Temperaturerhöhung proportional ist, ebenso zu vergegenwärtigen.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig den Carnotschen Kreisprozefs zu besprechen. Da die Gleichungen der Isotherme und Adiabate denen der Thermodynamik vollkommen analog sind, so werden sich auch hier dieselben Schlüsse wie dort wiederfinden. Wir wollen daher diesen Fall nur ganz kurz behandeln und zunächst die Arbeitsgleichungen der vier Teilprozesse in der Reihe anschreiben, wie sie aufeinander folgen und dann summieren.

$$A_1 = Q_1 = \tfrac{1}{3} V_1^2 \lg \frac{v_2}{v_1}$$

$$A_1' = (e_1 - e_2) = \tfrac{1}{4}(V_1^2 - V_2^2)$$

$$-A_2 = -Q_2 = -\tfrac{1}{3} V_2^2 \lg \frac{v_3}{v_4}$$

$$-A_2' = -(e_1 - e_2) = -\tfrac{1}{4}(V_1^2 - V_2^2).$$

Da nun, wie sich in bekannter Weise ergiebt,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_4},$$

so erhalten wir durch Addition der angeschriebenen 4 Ausdrücke

$$A_1 - A_2 = Q_1 - Q_2 = (V_1^2 - V_2^2) \cdot \tfrac{1}{3} \lg \frac{v_2}{v_1}.$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1^2}$$

$$\frac{Q_1}{V_1^2} - \frac{Q_2}{V_2^2} = 0.$$

Dieses Resultat ist also vollständig analog demjenigen der mechanischen Wärmetheorie. Wir ersehen daraus, dafs die bei dem Kreisprozefs gewonnene Arbeit proportional ist der Differenz der Quadrate der gröfsten und kleinsten Umfangsgeschwindigkeit und einem Quotienten von der Form $\frac{Q}{V^2}$; auch hier werden wir daher auf die Einführung eines Begriffes geführt, der demjenigen der Entropie in der Thermodynamik entspricht.

Betrachten wir die Energiegleichung (5) genauer, so sehen wir, dafs zufolge der Beziehung $V^2 = 3pv$ das Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit ein integrierender Faktor derselben ist. Wir erhalten durch dessen Einführung

$$\frac{dQ}{V^2} = d\eta = \tfrac{1}{4}\frac{dp}{p} + \tfrac{7}{12}\frac{dv}{v} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{dp}{p} + \tfrac{7}{3}\frac{dv}{v}\right).$$

Das so definierte $d\eta$ ist ein vollständiges Differential und dessen Integration ergiebt

$$\eta = \tfrac{1}{4}\lg p v^{\frac{7}{3}} + \text{const} = c_v \lg p v^{\varkappa} + \text{const}. \tag{13}$$

Dies entspricht dem bekannten Ausdruck für die Entropie eines vollkommenen Gases.

Die unmittelbare Folge dieses Umstandes ist, daſs wir das Differential der zugeführten Energie für umkehrbare Vorgänge auch in der Form schreiben können

$$dQ = V^2 d\eta. \tag{14}$$

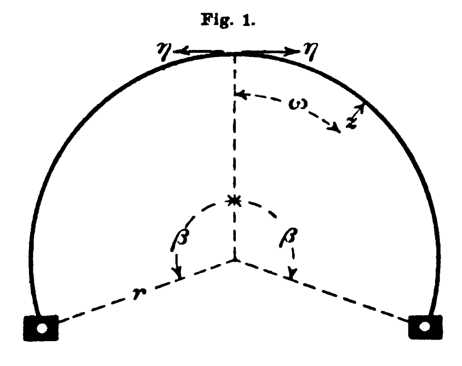
Nun haben wir angenommen, daſs die Energieübertragung durch den Ausgleich der Umfangsgeschwindigkeiten zweier aufeinander rollenden Scheiben erfolgt, und Gleichung (14) gilt nur für den Fall, daſs die Differenz der Umfangsgeschwindigkeiten so gering bleibt, daſs wir die hierbei auftretenden Energieverluste durch Reibung vernachlässigen können. Diese Beschränkung müssen wir bei nicht umkehrbaren Vorgängen fallen lassen. Verstehen wir nun, um in Übereinstimmung mit den thermodynamischen Bezeichnungen zu bleiben, unter dQ die von der zweiten Scheibe aufgenommene Energie, unter $\frac{1}{4} d V_1^2 = V_1^2 \cdot \frac{1}{4} \frac{d V_1^2}{V_1^2} = T_1 d\eta_1$ die von der ersten Scheibe bei konstantem Volumen abgegebene kinetische Energie, so ist infolge des unvermeidlichen Energieverlustes durch Reibung

$$dQ < V_1^2 d\eta_1. \tag{15}$$

Bogen mit elastisch gebundenen Widerlagern.

Von Baurat ADOLF FRANCKE in Herzberg a. Harz.

Wir betrachten zunächst, Abb. 1, einen Kreisbogenträger mit drehbaren, aber unverschieblichen Endpunkten und setzen in demselben einen Spannungszustand η voraus, wobei η einen im Bogen in Richtung der Schlufssehne wirkenden Schub bedeuten möge und positive Zahlen η einem im Scheitel wirkenden Drucke, negative einem Zuge entsprechen mögen.



Der Bogen verbiegt sich nach Mafsgabe der Gleichungen:

$$\frac{EJ}{r^3}\frac{d^4 z}{d\omega^4} = -\cos\omega\,\eta = -K,$$

wenn K die Längskraft im Bogen bedeutet,

$$\frac{EJ}{r^3}\frac{d^3 z}{d\omega^3} = -\sin\omega\,\eta = Q,$$

wenn Q die Querkraft bedeutet

$$\frac{EJ}{r^3}\frac{d^2 z}{d\omega^2} = \eta(\cos\omega - \cos\beta) = -\frac{M}{r},$$

wenn M das Biegungsmoment darstellt,

$$\frac{EJ}{r^3}\frac{dz}{d\omega} = \eta(\sin\omega - \omega\cos\beta);\quad \frac{EJ}{r^3}z = \left(\cos\beta - \cos\omega - \omega^2 - \beta^2)\frac{\cos\beta}{2}\right)\eta.$$

Betrachten wir nun die Veränderung der geometrischen Kurvenlänge des Bogens $\int_{-\beta}^{+\beta} z\,d\omega$ und die daraus folgende elastische Achsenschiebung:

$$w = \int_{-\beta}^{+\beta} z\,d\omega - \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{K r\,d\omega}{E F}$$

$$= -\frac{2r^3\eta}{EJ}\left\{\left(1+\frac{J}{Fr^2}\right)\sin\beta - \beta\cos\beta - \frac{\beta^3}{3}\cos\beta\right\} = -w_\eta \cdot \eta,$$

so erkennen wir, dafs dieser Wert w, für $\eta = -1$, den stets wiederkehrenden Nennerwert in den Bestimmungsgleichungen der Kräfteverteilung des irgendwie belasteten Bogens mit drehbaren aber unverschieblichen Widerlagern darstellen wird. Denn die Belastung P, p erzeugt ihrerseits, unter der Voraussetzung $\eta = 0$, irgend welche elastische Achsenschiebung w_P, w_p und es besteht daher, wegen der Unmöglichkeit der Verschiebung der Balkenenden in Richtung der Achse oder, allgemeiner gesagt, wegen des Zwanges der Stetigkeit des Balkens zwischen seinen beiden eigenen, als solche bestimmt gegebenen Endflächen, die Gleichung:

$$-\eta w_\eta + p w_p = 0.$$

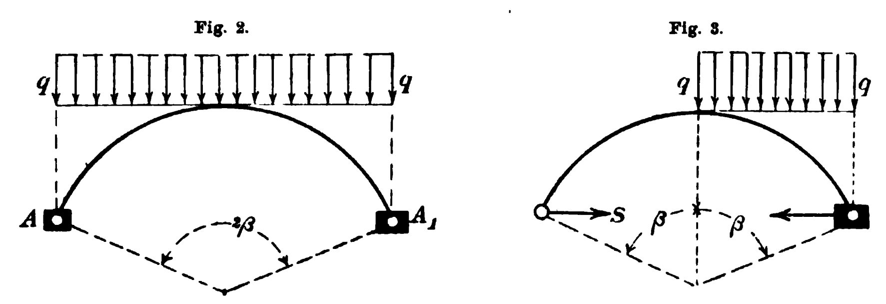
Betrachtet man nun an Stelle eines Bogenträgers mit unverschieblichen, drehbaren Widerlagern, einen solchen mit drehbaren, aber nicht unverschieblichen sondern elastisch, etwa durch eine Zugstange, gebundenen Enden, so kann man mit geringer Mühe die sämtlichen für den Bogen mit unverschieblichen Kämpfergelenken giltigen Formeln der Kräfteverteilung umschreiben in die entsprechenden Formeln für elastische Bindung.

Man braucht sich nur zu erinnern, dafs, geometrisch betrachtet, zur Bogenlänge $2r\beta$ stets die Sehnenlänge $2r\sin\beta$ zugehört, und man wird erkennen, dafs eine elastische Achsenschiebung $w = -\varDelta\frac{\beta}{\sin\beta}$ als gleichwertig, in Bezug auf die Gestaltung der elastischen Verhältnisse und der Kräfteverteilung, zu erachten ist mit einer Verlängerung $\varDelta$ der Bogensehne, indem eine zwangsweise Verlängerung der Sehne im Scheitel Zug, also den Zustand $-\eta$ hervorruft. Der, etwa durch Wärmezunahme, thatsächlich im Zustande $+\eta$ befindliche Bogen der Abb. 1 von der ursprünglichen Länge $2r\beta$ geht bei Freigabe der Enden über in den spannungslosen Bogen der Länge $\left(2r+\frac{a}{\beta}\right)\beta$, wo die positive Länge a der absoluten Gröfse nach dem Wert w gleich ist.

Der also freigegebene Bogen liegt genau im Winkel 2β, hat den Halbmesser $r+\frac{a}{2\beta}$ und die Sehne $\left(2r+\frac{a}{\beta}\right)\sin\beta$. Werden die Endpunkte dieser Sehne unverschieblich aber drehbar gehalten, so hat der Bogen bei eintretender Abkühlung das Bestreben, wieder ein Kreisbogen vom Halbmesser r zu werden und seine natürliche Länge $2r\beta$

anzunehmen. Es entsteht der dem ersten Zustande $+\eta$ entgegengesetzte Zustand $-\eta$, hervorgerufen durch die Sehnenänderung $\frac{a}{\beta}\sin\beta$. Man kann auch sagen: das richtige Verhältnis zwischen Bogen und Sehne: $\frac{2r\beta}{2r\sin\beta}$ wird durch die Bogenlängenänderung $a = b\beta$ und die Sehnenlängenänderung $-b\sin\beta$ in genau gleicher Weise abgeändert, weil für genügend kleine Werte b: $\frac{2r\beta + b\beta}{2r\sin\beta}$ und $\frac{2r\beta}{2r\sin\beta - b\sin\beta}$ nicht von $\frac{\beta}{\sin\beta}\left(1 + \frac{b}{2r}\right)$ verschieden sind.

Ist daher ψ die elastische Bindung der beiden Widerlager, d. h. verlängert sich die Sehne um ψ bei der in ihr wirkenden Zugkraft



$S = 1$, so ist, weil die Zugkraft $S = 1$ der Sehne stets im Scheitel den Druck $\eta = 1$ erzeugt, die Gleichung giltig

$$\text{(I)} \qquad -S\left(w_\eta + \frac{\psi\beta}{\sin\beta}\right) + Pw_P = 0.$$

Wir werden nun in w_η, wie überhaupt im Folgenden allgemein, den Werth $\frac{J}{Fr^2}$ meist nicht augenscheinlich halten, weil derselbe als verschwindend keinen rechnerischen Einflufs hat. Setzen wir allgemein abkürzend $[\beta] = \sin\beta - \beta\cos\beta - \frac{\beta^3\cos\beta}{3}$ und teilen Gleichung (I) durch $\frac{2r^3}{EJ}$, so erhalten wir, für $\psi = \frac{2r\sin\beta}{f\cdot E_1}$, die allgemeine Gleichung:

$$\text{(Ia)} \qquad S\left\{[\beta] + \frac{E}{E_1}\frac{J}{fr^2}\cdot\beta\right\} = P\frac{EJ\cdot w_P}{2r^3},$$

worin also E das Elastizitätsmafs des Bogens, E_1 dasjenige der Zugstange, J das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes, f den Querschnitt der Zugstange bedeutet.

Weil nun Abb. 2, der Bogenträger mit unverschieblichen Drehpunkten A, A_1, durch die volle Streckenlast q, im Zustande $\eta = 0$, geometrisch verkürzt wird um das Mafs $\frac{[2\beta]r^4}{16EJ}q$, so erzeugt, Abb. 3,

die Belastung einer Bogenhälfte den Zug S in der Zugstange:

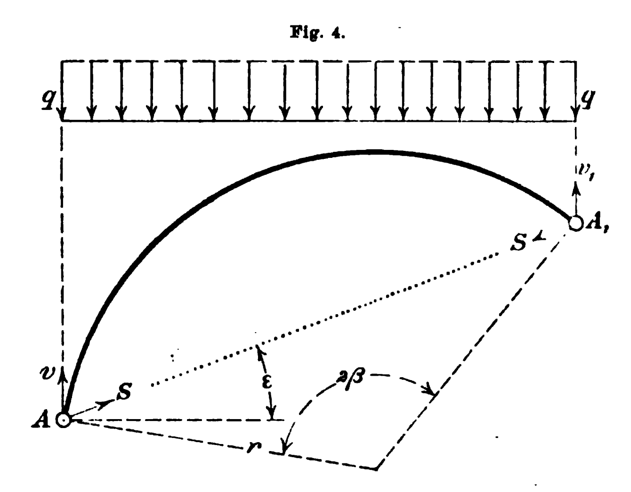
$$64 S = qr \frac{[2\beta]}{[\beta] + \beta\left(\frac{J}{fr^2}\right) \cdot \frac{E}{E_1}},$$

also bei gleichem Materiale den Zug

$$S = \frac{qr}{64} \cdot \frac{[2\beta]}{\left([\beta] + \beta\frac{J}{fr^2}\right)}.$$

Der Bogenträger der Abb. 4 erleidet, bei unverschieblichen Dreh-

Fig. 4.

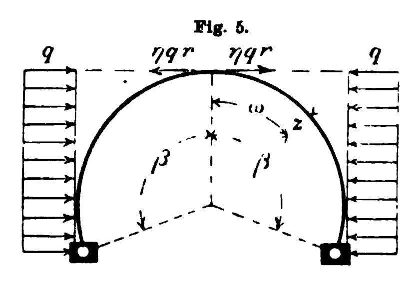


punkten A, A_1, im Zustande $S = 0$ eine elastische Achsenschiebung w mit dem Werte

$$\frac{EJ}{2qr^4} w = \frac{\cos 2\varepsilon [2\beta]}{32} + \sin^2\varepsilon \cdot \cos\beta[\beta],$$

daher im Bogen mit Spannstange ein Zug S erzeugt wird:

Fig. 5.



$$\frac{S}{qr} = \frac{\sin^2\varepsilon\cos\beta[\beta] + \frac{\cos 2\varepsilon\cos[2\beta]}{32}}{[\beta] + \beta\frac{J}{fr^2}},$$

unter Voraussetzung lotrechter Auflagerkräfte, also wagerechter Verschiebung des beweglichen Lagers.

Der Bogen der Abb. 5 verbiegt sich bei unverschieblichen Drehlagern nach Maſsgabe der Gleichungen:

$$\frac{EJ}{qr^4}\frac{d^2z}{d\omega^2} = -\eta\sin\omega + (1 - \cos\omega)\sin\omega = (1 - \eta)\sin\omega - \frac{\sin 2\omega}{2};$$

$$\frac{EJ\,d^2z}{q r^4 d\omega^2} = (1-\eta)(\cos\beta - \cos\omega) + \frac{\cos 2\omega - \cos 2\beta}{4};$$

$$\frac{EJ\,dz}{q r^4 d\omega} = (1-\eta)(\omega\cos\beta - \sin\omega) + \frac{\sin 2\omega - 2\omega\cos 2\beta}{8};$$

$$\frac{EJ}{qr^4}z = (1-\eta)\left\{(\omega^2-\beta^2)\frac{\cos\beta}{2} + \cos\omega - \cos\beta\right\} - (\omega^2-\beta^2)\frac{\cos 2\beta}{8} + \frac{\cos 2\beta - \cos 2\omega}{16};$$

$$\frac{EJ}{qr^4}\int z\,d\omega = (1-\eta)\left\{\left(\frac{\omega^3}{6} - \frac{\omega\beta^2}{2}\right)\cos\beta + \sin\omega - \omega\cos\beta\right\} - \left(\frac{\omega^3}{3} - \omega\beta^2\right)\frac{\cos 2\beta}{8} + \frac{2\omega\cos 2\beta - \sin 2\omega}{32}.$$

Dem Zustand $S = 0$, $\eta = 1 - \cos\beta$ entspricht die Achsenschiebung:

$$\frac{EJ}{2qr^4}w = \cos\beta[\beta] - \frac{[2\beta]}{32} - \frac{J}{Fr^2}\left(\frac{2\beta - \sin 2\beta}{4}\right),$$

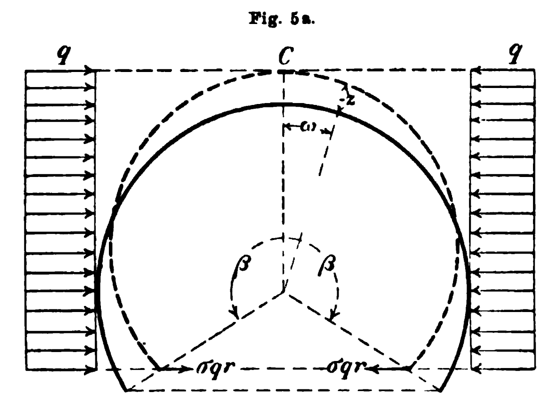
daher im Bogenträger mit Spannstange, für $\frac{J}{Fr^2} =$ verschwindend, die Spannung erzeugt wird:

$$\frac{S}{qr} = \frac{\cos\beta[\beta] - \frac{[2\beta]}{32}}{[\beta] + \beta\frac{J}{fr^2}},$$

welche negativ ausfallend, Druck bedeutet und beispielsweise für einen Halbkreis den Wert erhält

$$\frac{S}{qr} = \frac{\pi + \frac{\pi^3}{3}}{32\left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{J}{fr^2}\right)}.$$

Fig. 5a.



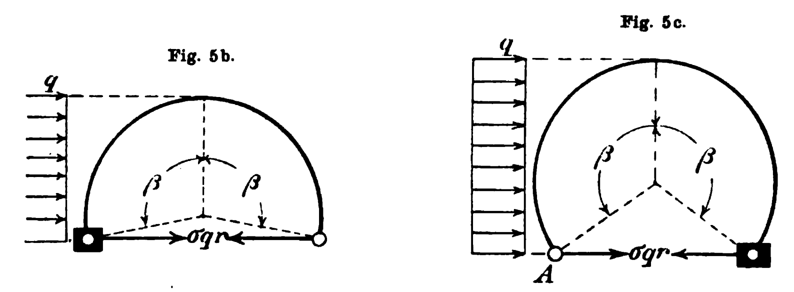
Selbstverständlich können alle derartige Werte auch gefunden oder bestätigt werden durch die unvermittelte Betrachtung der elastischen Bewegungen des vollständig freien, an den Enden durch die entsprechenden Kräfte belasteten Bogens.

$$\frac{EJ}{qr^4}w = (\cos\beta - \sigma)\left\{\left(\frac{\omega^3}{6} - \frac{\omega\beta^2}{2}\right)\cos\beta + \sin\omega - \omega\cos\beta\right\} - \left(\frac{\omega^3}{3} - \omega\beta^2\right)\frac{\cos 2\beta}{8} - \omega\cdot\sigma\frac{J}{fr^2} + \frac{2\omega\cos 2\beta - \sin 2\omega}{32}$$

stellt für den angegebenen Wert $S = \sigma q r$ die elastische Bewegung des in Abb. 5a dargestellten, vollkommen freibeweglichen Trägers dar,

wobei die, in gewissem Sinne an sich willkürliche Koordinatenbestimmung so gewählt wurde, dafs die Sehne sich parallel verschiebt und in dem Winkel 2β liegt.

Dem Zustand $\eta = 2\sigma$ entspricht im Bogen der Abb. 5 die zugehörige Achsenschiebung $\frac{EJ}{2qr^4}w = (1 - 2\sigma)[\beta] - \frac{[2\beta]}{32}$ und weil, beim Bogen mit festen Drehlagern, einseitigen Belastungen, unter Streichung der Belastung der einen Seite der vorher symmetrischen Belastung, sowie auch halben Werten η die halbe Wirkung in Bezug auf die Änderung der Bogenlänge entspricht, so ist bei einseitiger Belastung und Zustand



$\eta = \sigma$ in dem Bogen der Abb. 5 die elastische Achsenschiebung $\frac{EJ}{2qr^4}w = \left(\frac{1}{2} - \sigma\right)[\beta] - \frac{[2\beta]}{64}$ vorhanden und mithin gilt für die Spannung σqr der Spannstange des Bogens der Abb. 5b die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)[\beta] - \frac{[2\beta]}{64} - \sigma\beta\frac{J}{fr^2} = 0; \quad \sigma = \frac{[\beta] - \frac{[2\beta]}{32}}{2\left\{[\beta] + \beta\frac{J}{fr^2}\right\}},$$

nach welcher beispielsweise die Wirkung des Winddruckes bemessen werden kann.

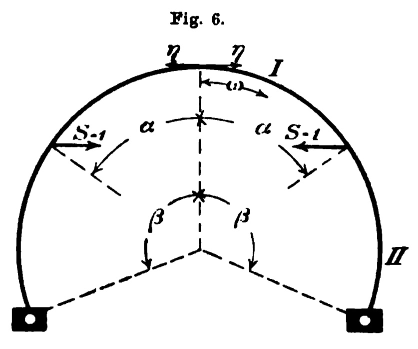
Im Zustand $\eta = 2(1 - \cos\beta) + 2\sigma$ erleidet der Bogen der Abb. 5 die elastische Achsenschiebung w:

$$\frac{EJ}{2r^4q}w = (2\cos\beta - 1 - 2\sigma)[\beta] - \frac{[2\beta]}{32},$$

und mithin, für den Zustand: $\eta = (1 - \cos\beta) + \sigma$ und einseitige Belastung, folgt der Wert

$$\sigma = \frac{(2\cos\beta - 1)[\beta] - \frac{[2\beta]}{32}}{2\left\{[\beta] + \beta\frac{J}{fr^2}\right\}}$$

für die Spannung σqr der Spannstange der Abb. 5b, wobei allgemein negativen Werten σ Druck entspricht und das Widerlager A lotrechte Zugleistung zu tragen hat, wenn das Eigengewicht des Bogens nicht genügt, diesen in A entstehenden lotrechten Zug aufzuheben.



In ähnlicher Weise finden wir aus der Gleichung der elastischen Erregung des Bogens der Abb. 6:

$$\frac{EJ}{Sr^3}\frac{d^3z}{d\omega^3} = -\eta \sin\omega,_{\mathrm{I}} + \sin\omega^{1)},$$

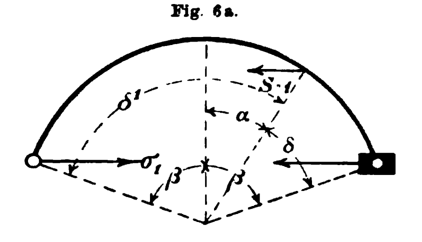
$$\frac{EJ}{Sr^3}\frac{d^2z}{d\omega^2} = \eta(\cos\omega - \cos\beta)$$

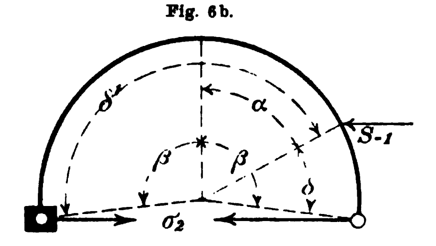
$$+ \cos\beta - \cos\alpha,_{\mathrm{I}} + \cos\alpha - \cos\omega$$

und den weiteren Integralen, durch Einsetzung des Zustandes $\eta = 2\sigma_1$, für die Spannkraft der Zugstange der Abb. 6a den Wert:

$$2\sigma_1 = \frac{[\beta] + \alpha\cos\alpha\left(1 + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{6}\right) - \sin\alpha\left(1 + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}\right)}{[\beta] + \beta\frac{E}{E_1}\frac{J}{fr^2}}$$

$$= \frac{[\beta] - [\alpha] - \frac{\delta\delta_1}{2}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}{[\beta] + \beta\frac{E}{E_1}\frac{J}{fr^2}},$$





während durch Einsetzung des Zustandes $\eta = 2 + 2\sigma_2$ der entsprechende Wert:

$$2\sigma_2 = \frac{-[\beta] + \alpha\cos\alpha\left(1 + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{6}\right) - \sin\alpha\left(1 + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}\right)}{[\beta] + \beta\frac{E}{E_1}\frac{J}{fr^2}}$$

$$= -\frac{[\beta] + [\alpha] + \frac{\delta\delta_1}{2}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}{[\beta] + \beta\frac{E}{E_1}\frac{J}{fr^2}}$$

1) Diese Gleichung ist so zu verstehen, daſs dieselbe für Bogenstrecke I bei dem Komma abzubrechen ist, mithin für Werte $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$ die Formel: $\frac{EJ}{Sr^3}\frac{d^3z}{d\omega^3} = -\eta\sin\omega$ gilt, während die Gesamtformel $\frac{EJ}{Sr^3}\frac{d^3z}{d\omega^3} = -\eta\sin\omega + \sin\omega$ für Strecke II, also für Werte $\omega = \alpha$ bis $\omega = \beta$, gültig ist. Der Gleichungszusatz $+\sin\omega$, auf der rechten Seite, zur Formel der Strecke I, entspricht dem unstetigen Sprung der Querkraft $Q = \frac{EJ}{r^3}\frac{d^3z}{d\omega^3}$ in dem Angriffspunkte, $\omega = \alpha$, der Einzelkraft S.

gefunden werden kann. Selbstverständlich gehen die Werthe σ_1, σ_2, der eine in den anderen über, durch Vertauschung von α mit $-\alpha$ und Umsetzung des Vorzeichens des Gesamtwertes, entsprechend der Bewegung der stets gleichgerichteten Kraft S von der einen Seite bis auf die andere Seite der Bogenachse.

Eine lotrechte, zur Sehne senkrechte, Einzellast $P = 1$ aber erzeugt den Spannstangenzug, Abb. 7:

$$\sigma = \frac{\cos\beta + \left(\beta + \frac{\beta^3}{3}\right)\sin\beta - \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} + 1\right)\cos\alpha + \alpha\sin\alpha\left(\frac{\alpha^2}{6} - \frac{\beta^2}{2} - 1\right)}{2\left([\beta] + \beta\frac{J}{fr^2}\frac{E}{E_1}\right)},$$

während ein Drehmoment, Abb. 8, $M = Ar$ den Spannstangenzug σA erzeugt mit dem Werte:

$$4\sigma = \frac{\alpha\left(\beta^2 - \frac{\alpha^2}{3}\right)}{[\beta] + \beta\frac{E}{E_1}\frac{J}{fr^2}},$$

die Wirkung aber einer den Bogen mit Hebelarm angreifenden Einzel-

Fig. 7.

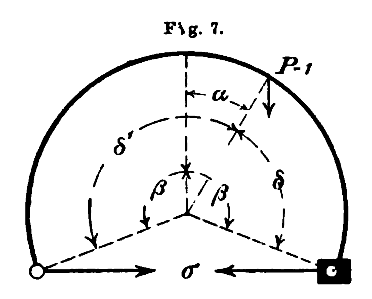
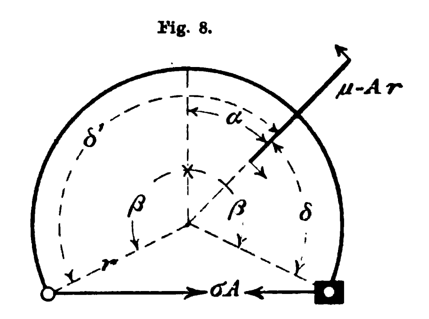


Fig. 8.



kraft kann als Summe der Wirkung eines Drehmomentes und einer unmittelbar angreifenden Einzelkraft gegeben werden.

Für grofse Werte f oder E_1, verschwindende Werte $\frac{E}{E_1}\frac{J}{fr^2}$ nähern sich alle Zustände dem Zustand der Unverschieblichkeit der Widerlager, für sehr kleine Werte f oder E_1 verschwinden alle Werte σ.

Weil für Flachbögen $\frac{[\beta]}{\beta}$ ein sehr kleiner Bruch, für Tunnelbögen ein gröfserer Wert ist, so erkennt man, dafs die Anordnung der Spannstange, unter sonst gleichen Verhältnissen, sich dem Zustande unverschieblicher Widerlager beim Tunnelbogen mehr nähert, als beim Flachbogen.

Der Spitzbogenträger mit elastisch gebundenen, drehbaren Widerlagern.

Von Baurat ADOLF FRANCKE in Herzberg a. Harz.

Gleichwie bei den Kreisbogen, so kann auch beim Spitzbogenträger mit drehbaren und etwa durch eine Zugstange elastisch an einander gebundenen Widerlagern die Kräfteverteilung aus derjenigen des Bogens mit unverschieblichen Drehpunkten abgeleitet werden, so zwar daſs sämtliche für den Bogen mit unverschieblichen Endpunkten gültigen Formeln mit geringer Mühe, durch entsprechende Vervollständigung des Nenners, für den Fall der Anordnung einer Zugstange umgeschrieben werden können.

Wir betrachten zunächst als einfachsten Fall den vollen Spitzbogen, bei welchem die Mittelpunkte M, M_1 der Bögen, wie beim Halbkreis auf der Verbindungsgeraden der Enddrehpunkte, also auf der Kämpferlinie liegen, während M, M_1 beim übervollen oder Tunnelspitzbogen oberhalb, beim nicht vollen oder flachen Spitzbogen unterhalb dieser Geraden liegen. Beim Zusammenfallen der Punkte M, M_1 erhält man aus diesen drei verschiedenen Formen des Spitzbogens den Halbkreis, Tunnel- und Flachbogen.

Der volle Spitzbogenträger.

Betrachten wir, Abb. 1, einen vollen Spitzbogenträger, welcher irgendwie, durch äuſsere oder innere Anregung, also z. B. durch Wärmeänderung oder äuſsere Lasten, symmetrisch zu seiner Symmetrieachse CC_1 beansprucht wird, so wird sich dieser Bogenträger symmetrisch verbiegen mit, in Richtung des Halbmessers gemessenen, elastischen Senkungen z.

Nehmen wir die Gerade AA_1 als unverschieblichen Ursprung der Winkel ω, so bedeutet $w = \int\limits_0^\omega z\,d\omega - \int\limits_0^\omega \frac{K r\,d\omega}{EF}$ die, vom Strahl $\omega = 0$

ab gerechnete, elastische Achsenschiebung, d. h. also der betreffende Punkt bewegt sich elastisch vorwärts über den Strahl ω um das Maſs w. Insbesondere also würde, unter der Voraussetzung, daſs die Länge des Bogens nicht durch andere Ursachen, Wärme, geändert wird, der Punkt C um das Maſs $w = \int\limits_0^\beta z\,d\omega - \int\limits_0^\beta \frac{Kr\,d\omega}{EF}$ über den Strahl β in Richtung des Bogens vorgeschoben erscheinen. Sei also $\varDelta$ die etwa durch sonstige Gründe veranlaſste Längenänderung der Bogenachse, so ist

$$(w+\varDelta)\sin\beta + z\cos\beta = 0,$$

für

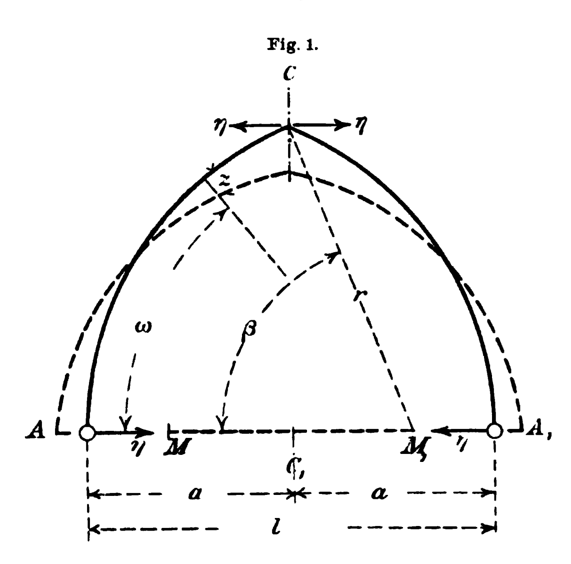
$$\omega = \beta,$$

oder

$$w + \varDelta + z\operatorname{ctg}\beta = 0$$

die allgemeine Bestimmungsgleichung der Kräfteverteilung bei symmetrischer Beanspruchung des Bogens, weil CC_1 die Symmetrieachse bleibt, der Punkt C sich nur in lotrechter Richtung bewegen kann, die wagerechte Verschiebung verschwindet.

Fig. 1.



Betrachten wir nun den Bogen der Abb. 1, dessen Widerlager durch eine Zugstange vom Querschnitt f und vom Elastizitätsmaſse E_1 verbunden sein mögen, im Zustande des wagerechten Schubes η, so verbiegt sich der Bogen nach Maſsgabe der Gleichungen:

$$\frac{EJ}{r^3}\frac{d^2z}{d\omega^2} = \eta\sin\omega; \quad \frac{EJ}{r^3}\frac{dz}{d\omega} = \eta(\cos\beta - \cos\omega);$$

$$\frac{EJ}{r^3}z = \eta[\omega\cos\beta - \sin\omega] - \frac{EJ}{r^3}z_0,$$

wo

$$\eta = \frac{2z_0}{l}fE_1, \quad z_0 = \frac{\eta l}{2fE_1}$$

zu setzen ist. Man erhält daher:

$$\frac{EJ}{r^3}z = \eta\left[\omega\cos\beta - \sin\omega - \frac{E}{E_1}\cdot\frac{l}{2r}\frac{J}{fr^2}\right];$$

$$\frac{EJ}{r^3}w = \eta\left[\frac{\omega^2\cos\beta}{2} + (\cos\omega - 1)\left(1 + \frac{J}{Fr^2}\right) - \frac{E}{E_1}\frac{l}{2r}\frac{J}{fr^2}\omega\right].$$

Der Wert $\frac{J}{Fr^2}$ verschwindet stets gegen 1, und wir erhalten, für $\frac{l}{2r} = \frac{a}{r}$, aus:

$$-\frac{EJ}{r^3}[w + z \operatorname{ctg} \beta]_{\omega=\beta}$$

$$= \eta\left[1 - \frac{\beta^2 \cos\beta}{2} - \beta \cos\beta \operatorname{ctg}\beta + \frac{E}{E_1}\frac{a}{r}\frac{J}{fr^2}(\beta + \operatorname{ctg}\beta)\right]$$

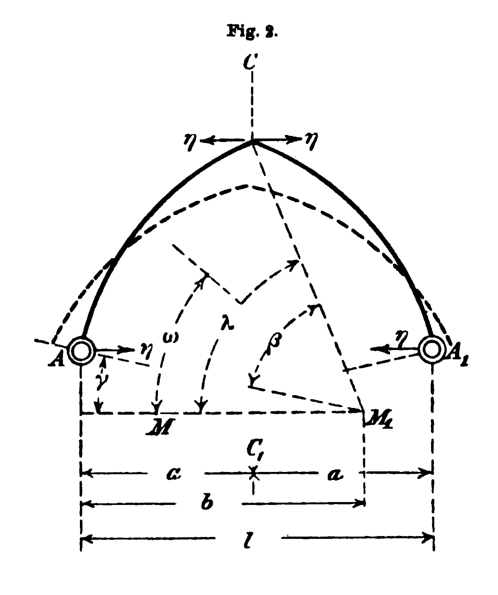
in dem Klammerausdruck den allgemeinen Nenner zur Bestimmung des, durch Belastung oder andere Einflüsse, erzeugten wagerechten Schubes η.

Wird abkürzend gesetzt: $B = 1 - \frac{\beta^2 \cos\beta}{2} - \beta \cos\beta \operatorname{ctg}\beta$, so hat man nur diesen für drehbare aber unverschiebliche Auflagerpunkte gültigen Nenner B umzuschreiben in den Nenner $B + \frac{E}{E_1}\frac{a}{r}\frac{J}{fr^2}(\beta + \operatorname{ctg}\beta)$, um aus den für feste Drehpunkte gültigen Formeln die für elastische Bindung gültigen Formeln zu gewinnen. Das nämliche Verfahren bleibt sinngemäfs anwendbar auch für den allgemeinen Fall des flachen oder übervollen Spitzbogenträgers.

Der beliebig geformte Spitzbogenträger.

Abb. 2 zeigt das Bild des flachen Spitzbogenträgers, und um dieses Bild in das Bild des Tunnelspitzbogenträgers zu verwandeln, hat man Winkel γ negativ zu wählen, $+\gamma$ mit $-\gamma$ zu vertauschen. In gleicher Weise gelten daher die hier für positive Werte γ, für den flachen Spitzbogenträger aufgestellten Formeln, unter Vertauschung von γ mit $-\gamma$, für den Tunnelspitzbogen.

Fig. 2.



Der mit der elastischen Zugstange des Querschnittes f versehene Bogen verbiegt sich im Zustande η nach der Gleichung:

$$\frac{EJ}{r^3}\frac{d^2 z}{d\omega^2} = \eta(\sin\omega - \sin\gamma);$$

$$\frac{EJ}{r^3}\frac{dz}{d\omega} = \eta$$

$$\{\cos\lambda - \cos\omega - (\omega - \lambda)\sin\gamma\},$$

indem für $\omega = \lambda$ im Symmetriepunkte C die Neigung $\frac{dz}{r\,d\omega} = 0$ ist.

Durch nochmalige Integration folgt:

$$\frac{EJ}{r^3}z$$
$$=\eta\left\{(\cos\lambda+\lambda\sin\gamma)(\omega-\gamma)+\sin\gamma-\sin\omega-\frac{(\omega^2-\gamma^2)}{2}\sin\gamma-\frac{lEJ}{2r\cos\gamma E_1 fr^2}\right\},$$

und es ist also für $\omega=\gamma: z_\gamma\cos\gamma=-\frac{\eta l}{2fE_1}$, also gleich der Hälfte der vom Zuge η veranlaßten elastischen Verlängerung der Zugstange. Für $l=2a$, $r\cos\gamma=b$, ergiebt sich bei nochmaliger Integration:

$$\frac{EJw}{r^3}=\eta\left\{(\cos\lambda+\lambda\sin\gamma)\frac{(\omega-\gamma)^2}{2}\right.$$
$$\left.+(\omega-\gamma)\sin\gamma+\cos\omega-\cos\gamma-\left(\frac{\omega^3}{b}-\frac{\omega\gamma^2}{2}+\frac{\gamma^2}{3}\right)\sin\gamma-\frac{a}{b}\cdot\frac{E}{E_1}\frac{J}{fr^2}(\omega-\gamma)\right\}$$

und es folgt hieraus durch die Betrachtung des Wertes:

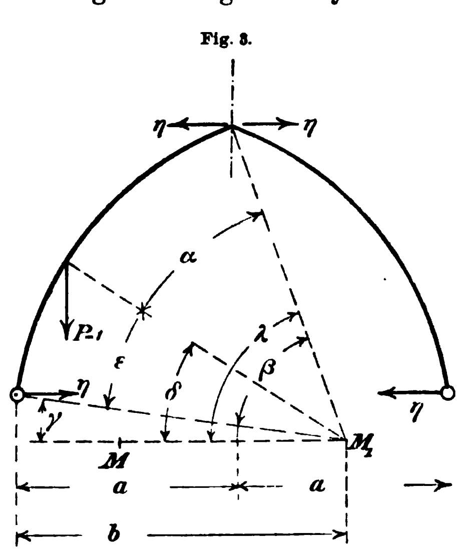
$$\frac{EJ}{r^3}\{w+z\operatorname{ctg}\lambda\}_{\text{für }\omega=\lambda}=-\eta\left[B+\frac{a}{b}\frac{E}{E_1}\frac{J}{fr^2}(\beta+\operatorname{ctg}\lambda)\right],$$

wo B den allgemeinen Wert hat:

$$B=\cos\gamma-\frac{\beta^2\cos\lambda}{2}-\sin\gamma\left(\beta+\frac{\beta^3}{3}\right)-\operatorname{ctg}\lambda\left\{\beta\cos\lambda+\left(\frac{\beta^2}{2}+1\right)\sin\gamma\right\}\cdot$$

Weil, Abb. 3, eine im Bogenpunkt δ hängende Einzellast P, oder damit gleichwertig zwei symmetrisch hängende Lasten $\frac{P}{2}$, im Bogen mit unverschieblichen Drehpunkten AA_1, den wagerechten Schub erzeugen:

Fig. 3.



$$H=P\frac{Z}{B}$$

mit dem Werte:

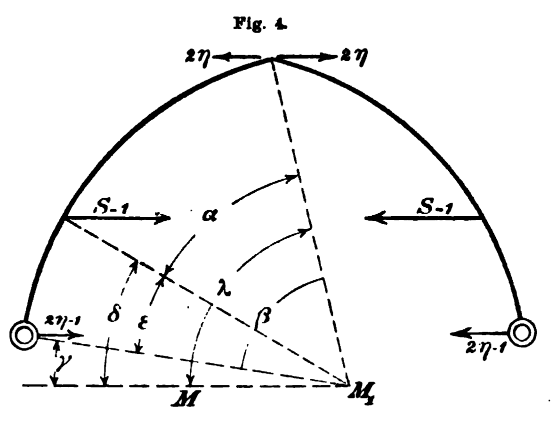
$$2Z=\sin\gamma+\cos\gamma\left(\beta+\frac{\beta^3}{3}\right)$$
$$-\sin\delta\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\right)$$
$$-\alpha\cos\delta\left(1+\frac{\beta^2}{2}-\frac{\alpha^2}{6}\right)$$
$$+\operatorname{ctg}\lambda\left[\cos\gamma\left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\cos\delta\left(1+\frac{\beta^2-\varepsilon^2}{2}\right)-\varepsilon\sin\delta\right],$$

so erzeugt eine Einzellast $P=1$ in dem, durch eine elastische Zugstange gebundenen Bogen den wagerechten Schub

$$\eta=\frac{Z}{B+\frac{a}{b}\frac{E}{E_1}\frac{J}{fr^2}(\beta+\operatorname{ctg}\lambda)}.$$

Zwei symmetrische, wagerechte Kräfte $S = 1$ erzeugen im Bogen mit unverschieblichen Drehpunkten AA_1, im Scheitel den wagerechten Schub 2η, mithin den Widerlagerschub $2\eta - 1$ mit dem Werte:

Fig. 4.



$$(2\eta - 1) = \frac{Z}{B},$$

wo

$$Z = \alpha \sin\delta\left(1 + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{b}\right) + \cos\delta\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} - 1\right) + \frac{\beta^2 \cos\lambda}{2} + \operatorname{ctg}\lambda\left[\beta\cos\lambda - \varepsilon\cos\delta + \sin\delta\left(1 + \frac{\beta^2 - \varepsilon^2}{2}\right)\right]$$

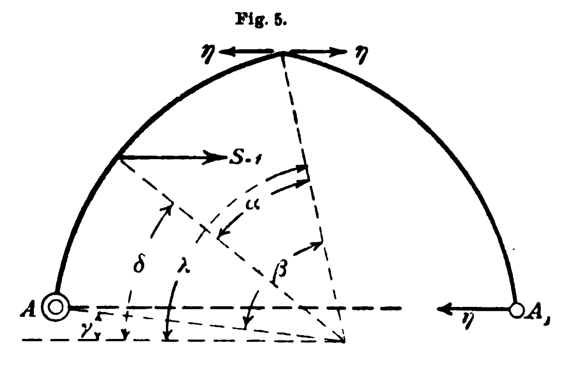
ist. Dieser Wert folgt aus der Differentialgleichung:

$$\frac{EJ}{r^3 S}\frac{d^2 z}{d\omega^2} = (2\eta - 1)(\sin\omega - \sin\gamma), + \sin\omega - \sin\delta$$

und den Integralen dieser Gleichung gemäfs der Bedingung:

$$w + z \operatorname{ctg}\lambda = 0 \text{ für } \omega = \lambda.$$

Fig. 5.



Im Bogen mit durch eine Zugstange des Querschnittes f elastisch gebundenen Widerlagern wird daher durch zwei symmetrisch wirkende wagerechte Einzelkräfte $S = 1$ im Scheitel der Schub 2η, und also in der Schubstange der Schub $2\eta - 1$ erzeugt mit dem Werte:

$$2\eta - 1 = \frac{Z}{B + \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{E}{E_1}\right)\left(\frac{J}{f r^2}\right)(\beta + \operatorname{ctg}\lambda)}.$$

Eine einzige wagerechte Kraft $S = 1$ erzeugt mithin den aus dieser vorstehenden Gleichung fliefsenden Zug der Schubstange η, wenn Abb. 5 das Widerlager A unverschieblich ist, das Widerlager A_1 als solches keinen Schub aufzunehmen vermag, sondern frei auf der Wagerechten gleitet. Im umgekehrten Falle, wenn, Abb. 6, A freiverschieb-

lich, A_1 unverschieblich ist, so ist der Wert η aus der Gleichung zu nehmen:

$$2\eta + 1 = \frac{Z}{B + \left(\frac{a}{b}\right)\frac{E}{E_1}\cdot\frac{J}{fr^2}\cdot(\beta + \operatorname{ctg}\lambda)}$$

wobei der Zahlenwert η negativ ausfällt, also Druck bedeutet für die Nebenstange, wie am einfachsten durch die Betrachtung eines, im Zu-

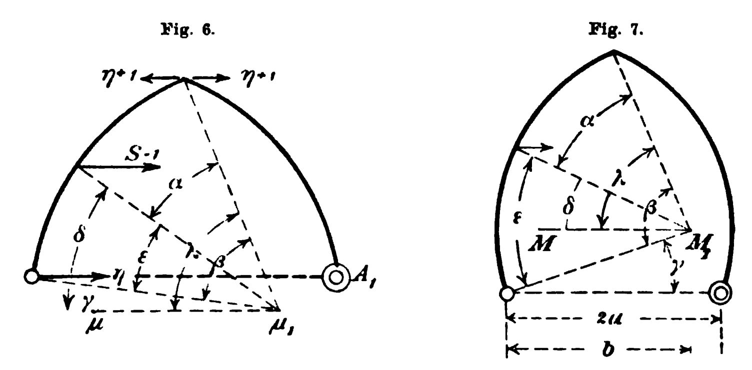


Fig. 6. Fig. 7.

stande des Scheitelschubes $H = 2\eta + 2$ befindlichen, symmetrisch durch zwei Einzellasten $S = 1$ belasteten Bogens, mit den Kämpferschüben $2\eta + 1$, hervorgeht.

Für den Tunnelbogen, Abb. 7, ist γ mit dem negativen Zeichen in die vorstehenden Formeln einzuführen, insbesondere gilt daher für den Tunnelbogen der allgemeine Wert:

$$B = \cos\gamma - \frac{\beta^2\cos\lambda}{2} + \sin\gamma\left(\beta + \frac{\beta^3}{3}\right) + \operatorname{ctg}\lambda\left[\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)\sin\gamma - \beta\cos\lambda\right].$$

Das Problem der fünf und drei Strahlen in der Photogrammetrie.

Von EDUARD DOLEŽAL in Leoben.

Mit einer Tafel.

Einleitung.

In den letzten drei Jahrzehnten hat die Photogrammetrie vornehmlich durch deutsche Forscher nach allen Richtungen hin eine vertiefte, wissenschaftliche Durchbildung erfahren. Neben der reinen Mathematik und darstellenden Geometrie wurde auch die projektive Geometrie mit Erfolg herangezogen, und eine Reihe höchst interessanter photogrammetrischer Probleme fand wissenschaftliche Behandlung und elegante Lösung.

Gelehrte wie: Finsterwalder, Jordan, Hauck, Koppe u. s. w. stehen neben dem Schöpfer dieser Disziplin Laussedat mit der theoretischen Entwicklung der Photogrammetrie in innigstem Zusammenhange.

Auch der instrumentelle Teil der Photogrammetrie wurde nicht vernachlässigt. Typische Instrumente wurden geschaffen; so Prof. Dr. Anton Schells photogrammetrische Apparate: ein Universal-Phototheodolit, ein photogrammetrischer Stereoskop-Apparat und eine Vorrichtung zur bequemen Ausführung photogrammetrischer Rekonstruktionen, wovon die beiden letzteren Apparate leider noch nicht zur Veröffentlichung gelangten; die Koppeschen Konstruktionen: Phototheodolite für geodätische, meteorologische und astronomische Zwecke, ferner Phototheodolite von Paganini und Baron Hübl für phototopographische Arbeiten, der interessante Phototheodolit des Engländers Bridges Lee u. s. w., Apparate, welche bekunden, dafs man die instrumentelle Seite der Photogrammetrie reiflich studiert und vorgefafste Ideen in tadellosen Erzeugnissen der Präzisionsmechanik zu verwirklichen verstanden hat.

In der Theorie und Praxis der Photogrammetrie bieten besonders

jene Probleme reges Interesse, die sich mit der photogrammetrischen Festlegung des Standpunktes befassen und dadurch noch erhöhte Bedeutung gewinnen, dafs sie gleichzeitig auch die Ermittelung der perspektivischen Konstanten der photographischen Camera und des Orientierungswinkels der Bildebene im Raume ermöglichen. Die perspektivischen Konstanten der Camera sind für den photogrammetrischen Apparat als Individuum und die Kenntnis des Orientierungswinkels ist für eine ausgeführte photogrammetrische Aufnahme von ausschlaggebender Bedeutung.

In folgender Abhandlung sollen zu zwei Problemen erwähnter Art neue Lösungen gegeben und an speziellen Beispielen beleuchtet werden; es sind dies:

1. Das Problem der fünf Strahlen und
2. Das Problem der drei Strahlen.

I.

Das Fünfstrahlen-Problem.

Diese Aufgabe besteht in folgendem: Fünf Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 und P_4 sind der horizontalen und der vertikalen Lage nach bekannt; gegeben sind ihre rechtwinkligen Koordinaten: (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_2) und (x_4, y_4), sowie die absoluten Höhen: H_0, H_1, H_2, H_3 und H_4.

In einem sechsten Punkte, dem Standpunkte, wurde auf einer vertikalen Ebene eine photographische Aufnahme ausgeführt; man soll aus den Abszissendifferenzen: d_1, d_2, d_3 und d_4 der Bildpunkte

a) die Lage des Standpunktes,

b) die perspektivischen Konstanten der Camera und

c) den Orientierungswinkel der Bildebene bezw. der Bilddistanz

bestimmen.

Diese Aufgabe wurde zum erstenmale in den 80er Jahren von H. Müller in Freiburg gelegentlich anderer Untersuchungen aufgestellt und vom Standpunkte der neueren Geometrie gelöst. Müller ging auf die praktische Anwendung der Aufgabe nicht ein. Professor dipl. Ingenieur Franz Steiner von der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag hat, ohne von der Arbeit Müllers Kenntnis zu haben, eine rechnerische und graphische Lösung dieser Aufgabe gegeben[1]), und Steiner gebührt auch das Verdienst, diese höchst interessante Aufgabe unter

1) Prof. dipl. Ing. Franz Steiner: „Die Photographie im Dienste des Ingenieurs", Wien 1891, S. 28.

dem Namen: „Das Problem der fünf Punkte" in die photogrammetrische Praxis eingeführt zu haben.

Der k. und k. Hauptmann J. Mandl[1]) zeigte in einer interessanten Arbeit, wie diese Aufgabe, gestützt auf die Grundsätze der modernen Algebra, analytisch einfacher gelöst werden könne und entwickelte durch eine direkte Konstruktion, welche mit Hilfe von Zirkel und Lineal allein ausgeführt werden kann, die Lage des Standpunktes und der Bildebene, sowie die Gröfse der Bildweite, im Gegensatze zu Steiner, dessen konstruktives Verfahren mühsamer ist, indem es punktweise Konstruktion mehrerer Kegelschnitte erfordert.

Anmerkung: Was die Benennung der Aufgabe betrifft, so möge nachfolgende Bemerkung und der daran sich knüpfende Vorschlag erwogen werden.

Bekanntlich wird in der Geodäsie der Vorgang, wobei die Bestimmung der Lage eines Punktes durch blofse Winkelmessung erfolgt und ausschliefslich Operationen im Standpunkte erheischt, als Einschneiden bezeichnet. Für das Einschneiden ist die Festlegung von Strahlen, Visuren, mafsgebend, die vom Standpunkte nach den der Lage nach gegebenen Punkten gehen; nach deren Anzahl wäre daher logischerweise das Problem zu bezeichnen.

Die Bestimmung des Standpunktes bei fünf der Lage nach gegebenen Punkten erfolgt durch Festlegung der fünf nach den gegebenen Punkten gehenden Strahlen, somit wäre diese Aufgabe, wie wir es auch gethan haben, als „das Problem der fünf Strahlen" oder „Fünfstrahlen-Problem" und folgerichtig das Rückwärtseinschneiden als „Das Problem der drei Strahlen" oder „Dreistrahlen-Problem" zu benennen.

Nachfolgend soll auf eine trigonometrisch-analytische Lösung des Problems eingegangen werden, die bei überschüssiger Anzahl von gegebenen Punkten eine bequeme Anwendung der Sätze aus der Methode der kleinsten Quadrate gestattet.

In Tafel I, Fig. 1 bezeichnet B. E. die Horizontalspur der im Raume in vertikaler Lage gedachten Bildebene, Platte oder auch des Positivs der photographischen Aufnahme, p_0, p_1, p_2, p_3 und p_4 sind Perspektiven oder Bildpunkte der Originale: P_0, P_1, P_2, P_3 und P_4; p_0', p_1', p_2', p_3' und p_4' sind Projektionen dieser Bildpunkte auf den angenommenen Horizont der Perspektive (des Photogrammes) $\overline{HH}$;

$$\overline{p_0'p_1'} = d_1, \quad \overline{p_0'p_2'} = d_2, \quad \overline{p_0'p_3'} = d_3 \; \ldots \; \overline{p_0'p_n'} = d_n$$

1) Julius Mandl: „Über Verwertung von photographischen Aufnahmen aus dem Luftballon" in den „Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens" XXIX. Jahrgang, Wien 1898, S. 165.

sind die Abszissendifferenzen der Bildpunkte, welche unbekümmert um die Lage des Hauptpunktes der Perspektive Ω in der Richtung des angenommenen Horizontes $\overline{HH}$ entweder auf dem Negative oder einem ungetonten Papierpositive mit Schärfe gemessen wurden.

Die gegebenen Punkte sind durch ihre Koordinaten:

$$P_0(x_0, y_0), \quad P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2) \ldots P_n(x_n, y_n),$$

ebenso auch der Standpunkt P durch (x, y) gekennzeichnet.

Betrachtet man den Punkt P_0 als Pol und eine durch denselben gezogene zur x-Achse parallele Gerade $\overline{P_0x'}$ als Polarachse, so mögen bedeuten:

$$r_1, r_2, r_3 \ldots r_n \text{ und } r$$

die Radienvektoren und

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots \theta_n \text{ und } \theta$$

die Richtungswinkel; wird hingegen die Station P als Pol aufgefafst bei Annahme einer gleichen Richtung der Polachse, so sollen mit:

$$r = \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \cdots \varrho_n$$

die Leitstrahlen und mit:

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega^n$$

die Polwinkel bezeichnet werden.

Der Abstand des Punktes P, welcher zugleich auch das Zentrum des perspektivischen Bildes, Photogrammes, ist, von der Bildebene BE stellt die Bildweite f dar, und der Winkel γ, den die Richtung dieser mit dem Strahle $\overline{PP_0} = \varrho_0 = r$ einschliefst, ist der Orientierungswinkel, durch welchen die Bilddistanz und damit auch die Bildebene orientiert wird.

Nachdem wir hiermit an der Hand der Tafel I, Fig. 1 einige notwendige Erklärungen gemacht haben, schreiten wir zur Lösung unserer Aufgabe, wobei wir unterscheiden wollen:

1. „Einfache Punktbestimmung“, wenn zur Bestimmung der gesuchten Gröfsen nur so viele Bestimmungsstücke herangezogen werden, als gerade erforderlich sind, und
2. „Mehrfache Punktbestimmung“ hingegen, wenn eine überschüssige Anzahl von Bestimmungsstücken verwertet wird.

1.
Einfache Bestimmung.

Der Standpunkt wird festgelegt sein, sobald man seine Polarkoordinaten r und Θ kennt, bezogen auf P_0 als Pol und $\overline{P_0x'}$ als Polar-

achse. Zur Festlegung der Bildebene reicht die Kenntnis der Bildweite f und des Orientierungswinkels γ vollends aus.

Es sind somit vier Unbekannte: r, Θ, f und γ, zu ermitteln.

Die Richtungswinkel der einzelnen Polstrahlen ergeben sich aus den gegebenen Koordinaten:

$$(1) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ \operatorname{tg}\theta_2 = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} \\ \operatorname{tg}\theta_3 = \dfrac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0} \\ \operatorname{tg}\theta_4 = \dfrac{y_4 - y_0}{x_4 - x_0} \end{cases}$$

und die Leitstrahlen durch folgende Gleichungen, die erwünschte Kontrolen bieten:

$$(2) \qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{\sin\theta_1} = \dfrac{x_1 - x_0}{\cos\theta_1} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\ r_2 = \dfrac{y_2 - y_0}{\sin\theta_2} = \dfrac{x_2 - x_0}{\cos\theta_2} = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} \\ r_3 = \dfrac{y_3 - y_0}{\sin\theta_3} = \dfrac{x_3 - x_0}{\cos\theta_3} = \sqrt{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2} \\ r_4 = \dfrac{y_4 - y_0}{\sin\theta_4} = \dfrac{x_4 - x_0}{\cos\theta_4} = \sqrt{(x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2}. \end{cases}$$

Nun kann man an die Aufstellung jener Gleichungen gehen, die zur Berechnung der Unbekannten führen.

Die Tangente des Horizontalwinkels α_1 zwischen den Visuren vom Standpunkte P nach den gegebenen Punkten P_0 und P_1 läßt sich, wie aus Tafel I, Fig. 1 ersichtlich ist, doppelt ausdrücken.

Aus den Dreiecken: PP_1P_1' und $Pp_1'p_1''$ erhält man:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}(\omega_1 - \omega_0) = \frac{\overline{p_1'p_1''}}{\overline{p_1''P}} = \frac{\overline{P_1P_1'}}{\overline{PP_1'}}.$$

Nun ist aber:

$$\begin{cases} \overline{p_1'p_1''} = d_1 \cos\gamma \\ \overline{p_1''P} = \dfrac{f}{\cos\gamma} - d_1 \sin\gamma \\ \text{und} \\ \overline{P_1P_1'} = r_1 \sin(\theta - \theta_1) \\ \overline{PP_1'} = r - r_1 \cos(\theta - \theta), \end{cases}$$

welche Ausdrücke, in die Tangente eingesetzt, geben:

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}(\omega_1 - \omega_0) = \frac{d_1 \cos\gamma}{\dfrac{f}{\cos\gamma} - d_1 \sin\gamma} = \frac{r_1 \sin(\theta - \theta_1)}{r - r_1 \cos(\theta - \theta_1)}.$$

Werden hier die trigonometrischen Funktionen der Winkeldifferenz $(\Theta - \Theta_1)$ entwickelt und die gewonnenen Ausdrücke entsprechend reduziert, so ergiebt sich:

$$r_1 \cos\theta_1 \frac{f\sin\theta}{\cos\gamma} - r_1 \sin\theta_1 \frac{f\cos\theta}{\cos\gamma} + r_1 d_1 \cos\theta_1 \cos(\theta+\gamma)$$
$$+ r_1 d_1 \sin\theta_1 \sin(\theta+\gamma) - d_1 r\cos\gamma = 0$$

oder, durch $r \cos\gamma$ dividiert, auch:

$$(4) \quad r_1 \cos\theta_1 \left(\frac{f\sin\theta}{r\cos^2\gamma}\right) - r_1 \sin\theta_1 \left(\frac{f\cos\theta}{r\cos^2\gamma}\right) + r_1 d_1 \cos\theta_1 \left(\frac{\cos(\theta+\gamma)}{r\cos\gamma}\right)$$
$$+ r_1 d_1 \sin\theta_1 \left(\frac{\sin(\theta+\gamma)}{r\cos\gamma}\right) = d_1.$$

In vorstehendem Polynome stellen die eingeklammerten Quotienten Unbekannte dar, für welche wir die Symbole einführen:

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{f\sin\theta}{r\cos^2\gamma} = m, \\ \dfrac{f\cos\theta}{r\cos^2\gamma} = n, \\ \dfrac{\cos(\theta+\gamma)}{r\cos\gamma} = p, \\ \dfrac{\sin(\theta+\gamma)}{r\cos\gamma} = q, \end{cases}$$

wodurch die Gleichung (4) die Form annimmt:

$$(6) \qquad r_1 \cos\theta_1 m - r_1 \sin\theta_1 n + r_1 d_1 \cos\theta_1 p + r_1 d_1 \sin\theta_1 q = d_1.$$

Zur Bestimmung der vier neuen Unbekannten: m, n, p und q reichen vier Gleichungen aus, die auf ähnliche Weise erhalten werden wie die vorstehende Gleichung (6).

Wir erhalten:

$$(7) \begin{cases} \text{Für den Punkt } P_1 \ldots r_1\cos\theta_1 m - r_1\sin\theta_1 n + r_1 d_1\cos\theta_1 p + r_1 d_1 \sin\theta_1 q = d_1, \\ \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad P_2 \ldots r_2\cos\theta_2 m - r_2\sin\theta_2 n + r_2 d_2\cos\theta_2 p + r_2 d_2 \sin\theta_2 q = d_2, \\ \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad P_3 \ldots r_3\cos\theta_3 m - r_3\sin\theta_3 n + r_3 d_3\cos\theta_3 p + r_3 d_3 \sin\theta_3 q = d_3, \\ \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad P_4 \ldots r_4\cos\theta_4 m - r_4\sin\theta_4 n + r_4 d_4\cos\theta_4 p + r_4 d_4 \sin\theta_4 q = d_4, \end{cases}$$

ein Gleichungssystem, aus welchem die vier Unbekannten bestimmt werden können.

Da sich die Produkte $r_n \cos\Theta_n$ und $r_n \sin\Theta_n$ nach den Gleichungen (2) durch Koordinatendifferenzen ausdrücken lassen, so können wir (7) auch schreiben:

$$(8)\quad \begin{cases} (x_1 - x_0)m - (y_1 - y_0)n + d_1(x_1 - x_0)p + d_1(y_1 - y_0)q = d_1, \\ (x_2 - x_0)m - (y_2 - y_0)n + d_2(x_2 - x_0)p + d_2(y_2 - y_0)q = d_2, \\ (x_3 - x_0)m - (y_3 - y_0)n + d_3(x_3 - x_0)p + d_3(y_3 - y_0)q = d_3, \\ (x_4 - x_0)m - (y_4 - y_0)n + d_4(x_4 - x_0)p + d_4(y_4 - y_0)q = d_4, \end{cases}$$

oder auch:

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{x_1 - x_0}{d_1} m - \frac{y_1 - y_0}{d_1} n + (x_1 - x_0)p + (y_1 - y_0)q = 1, \\ \frac{x_2 - x_0}{d_2} m - \frac{y_2 - y_0}{d_2} n + (x_2 - x_0)p + (y_2 - y_0)q = 1, \\ \frac{x_3 - x_0}{d_3} m - \frac{y_3 - y_0}{d_3} n + (x_3 - x_0)p + (y_3 - y_0)q = 1, \\ \frac{x_4 - x_0}{d_4} m - \frac{y_4 - y_0}{d_4} n + (x_4 - x_0)p + (y_4 - y_0)q = 1. \end{cases}$$

Die Unbekannten bestimmen sich durch:

$$(10)\quad \begin{cases} m = \frac{\varDelta_m}{\varDelta}, \\ n = \frac{\varDelta_n}{\varDelta}, \\ p = \frac{\varDelta_p}{\varDelta}, \\ q = \frac{\varDelta_q}{\varDelta}, \end{cases}$$

worin $\varDelta$ die Determinante des Systems und $\varDelta_m$, $\varDelta_n$, $\varDelta_p$ und $\varDelta_q$ jene der Unbekannten bedeuten, berechnet aus einem der identischen Gleichungssysteme (7), (8) oder (9).

Sind auf Grund der Gleichungen (10) die neuen Unbekannten bestimmt, so ergeben sich nach einfacher Rechnung aus den Gleichungen (5):

(11)

a) Für die Polarkoordinaten des Standpunktes:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \theta = \frac{m}{n}, \\ r = \frac{\cos(\theta + \gamma)}{p \cos \gamma}. \end{cases}$$

b) Für den Orientierungswinkel der Bilddistanz:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{q - p \operatorname{tg} \theta}{p + q \operatorname{tg} \theta}.$$

c) Für die Bildweite der Kamera:

$$f = \frac{m}{p} \frac{\cos \gamma \cos(\theta + \gamma)}{\sin \theta}.$$

Die vorstehenden Gleichungen kann man in eine andere Form

bringen, falls die trigonometrischen Funktionen durch die Gröfsen m, n, p und q ausgedrückt werden; es ergiebt sich:

$$(12)\qquad \begin{cases} r = \dfrac{\sqrt{m^2 + n^2}}{mq + np} \\ \operatorname{tg} \theta = \dfrac{m}{n} \\ \operatorname{tg} \gamma = \dfrac{nq - mp}{mq + np} \\ f = \dfrac{mq + np}{p^2 + q^2}. \end{cases}$$

Nachdem durch die Gleichungen (11) bezw. (12) die vier Unbekannten: r, Θ, f, und γ bestimmt erscheinen, so kann die endgiltige Lösung des Problems gegeben werden:

a) Die Lage des Standpunktes

ist bestimmt durch die rechtwinkligen Koordinaten:

$$(13)\qquad \begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta, \end{cases}$$

die nach Einführung der Polarkoordinaten aus (11) und (12) übergehen in:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\cos \theta \cos (\theta + \gamma)}{p \cos \gamma} \\ y = y_0 + \dfrac{\sin \theta \cos (\theta + \gamma)}{p \cos \gamma} \\ \text{oder:} \\ x = x_0 + \dfrac{n}{mq + np} \\ y = y_0 + \dfrac{m}{mq + np}. \end{cases}$$

b) Die Orientierung der Bildebene,

welche durch den Horizontalwinkel γ, bezogen auf P als Scheitel oder Pol und $\overline{PP_0}$ als Radiusvektor, bestimmt erscheint:

$$(\mathrm{II})\qquad \operatorname{tg} \gamma = \frac{nq - mp}{mq + np}.$$

c) Die perspektivischen Konstanten der Kamera,

zu welchen zu rechnen sind:

1) Die Bildweite f,
2) Der Horizont und die Vertikallinie resp. die Lage ihres Schnittpunktes, des Hauptpunktes der Perspektive.

Die Länge der Bildweite ist unmittelbar durch die Gleichungen (11) und (12) gegeben:

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} f = \dfrac{m}{p} \cdot \dfrac{\cos\gamma \cos(\theta+\gamma)}{\sin\theta} \\ \text{oder} \\ f = \dfrac{mq + np}{p^2 + q^2}. \end{cases}$$

Nebenbei sei die interessante Beziehung angefügt, welche zwischen der Bildweite, den Koordinatendifferenzen $x - x_0$, $y - y_0$ und den Hilfsvariablen: m, n, p und q besteht, nämlich:

$$(14)\quad \begin{cases} f = \dfrac{1}{x - x_0} \dfrac{n}{p^2 + q^2} \\ f = \dfrac{1}{y - y_0} \dfrac{m}{p^2 + q^2}. \end{cases}$$

Die Lage des Hauptpunktes der Perspektive Ω, durch welchen die Vertikallinie VV parallel zu den Bildern von vertikalen Linien im Raume hindurch geht, wird durch die Abszissen der Bildpunkte p_0, p_1, p_2, p_3 und p_4 festgelegt, nämlich:

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} \xi_0 = f \operatorname{tg}\gamma \\ \xi_1 = \xi_0 - d_1 = f \operatorname{tg}\gamma - d_1 \\ \vdots \\ \xi_4 = \xi_0 - d_4 = f \operatorname{tg}\gamma - d_4. \end{cases}$$

Ehe die Lage des Horizontes bestimmt werden kann, ist es erforderlich, noch einige Gröfsen zu ermitteln; so die Azimute der von P ausgehenden Radienvektoren: $\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_4$ und diese selbst.

Wir erhalten:

$$(15)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} w_0 = \dfrac{y_0 - y}{x_0 - x} \\ \operatorname{tg} w_1 = \dfrac{y_1 - y}{x_1 - x} \\ \vdots \\ \operatorname{tg} w_4 = \dfrac{y_4 - y}{x_4 - x}, \end{cases}$$

und die Horizontalwinkel zwischen den einzelnen Leitstrahlen und der Polarachse PP_0 ergeben sich mit:

$$(16)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \omega_1 - \omega_0 \\ \alpha_2 = \omega_2 - \omega_0 \\ \vdots \\ \alpha_4 = \omega_4 - \omega_0, \end{cases}$$

deren Tangenten sich durch die Koordinatendifferenzen ausdrücken lassen:

$$(17)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}(\omega_1 - \omega_0) = \dfrac{(x_0 - x)(y_1 - y) - (x_1 - x)(y_0 - y)}{(x_0 - x)(x_1 - x) + (y_1 - y)(y_0 - y)} \\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}(\omega_2 - \omega_0) = \dfrac{(x_0 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_0 - y)}{(x_0 - x)(x_2 - x) + (y_2 - y)(y_0 - y)} \\ \vdots \\ \operatorname{tg}\alpha_4 = \operatorname{tg}(\omega_4 - \omega_0) = \dfrac{(x_0 - x)(y_4 - y) - (x_4 - x)(y_0 - y)}{(x_0 - x)(x_4 - x) + (y_4 - y)(y_0 - y)}. \end{cases}$$

Neue Ausdrücke für die Winkel α, die zugleich eine angenehme Rechnung und erwünschte Kontrole gestatteten, würden aus den einzelnen Dreiecken: PP_0P_1, $PP_0P_2 \cdots$ mit Anwendung des Sinussatzes gewonnen.

Aus dem Dreiecke PP_0P_1 ergiebt sich die Proportion:

$$r : r_1 = \sin[(\theta - \theta_1) + \alpha_1] : \sin\alpha_1,$$

woraus sich:

$$(18)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{r_1 \sin(\theta - \theta_1)}{r - r_1 \cos(\theta - \theta_1)} \\ \text{und analog:} \\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{r_2 \sin(\theta - \theta_2)}{r - r_2 \cos(\theta - \theta_2)} \\ \vdots \\ \operatorname{tg}\alpha_4 = \dfrac{r_4 \sin(\theta - \theta_4)}{r - r_4 \cos(\theta - \theta_4)} \end{cases}$$

berechnet.

Die Leitstrahlen $\varrho_0, \varrho_1 \cdots \varrho_4$ ergeben sich mit Zuhilfenahme der Koordinatendifferenzen und der in Gleichung (15) berechneten Azimute derselben mit:

$$(19)\quad \begin{cases} \varrho_0 = \dfrac{x_0 - x}{\cos\omega_0} = \dfrac{y_0 - y}{\sin\omega_0} = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \\ \varrho_1 = \dfrac{x_1 - x}{\cos\omega_1} = \dfrac{y_1 - y}{\sin\omega_1} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y^2)} \\ \vdots \\ \varrho_4 = \dfrac{x_4 - x}{\cos\omega_4} = \dfrac{y_4 - y}{\sin\omega_4} = \sqrt{(x_4 - x)^2 + (y_4 - y)^2}. \end{cases}$$

Andere Ausdrücke hierfür ergeben sich bei Verwendung der polaren Koordinaten r und θ durch Anwendung des Sinussatzes auf die Dreiecke: PP_0P_1, $PP_0P_2 \cdots$ und zwar:

$$(20)\quad \begin{cases} \varrho_0 = r \\ \varrho_1 = \dfrac{\sin(\theta - \theta_1)}{\sin\alpha_1} r_1 = \dfrac{\sin(\theta - \theta_1)}{\sin(\theta - \theta_1 + \alpha_1)} r \\ \varrho_2 = \dfrac{\sin(\theta - \theta_2)}{\sin\alpha_2} r_2 = \dfrac{\sin(\theta - \theta_2)}{\sin(\theta - \theta_2 + \alpha_2)} r \\ \vdots \\ \varrho_4 = \dfrac{\sin(\theta - \theta_4)}{\sin\alpha_4} r_4 = \dfrac{\sin(\theta - \theta_4)}{\sin(\theta - \theta_4 + \alpha_4)} r. \end{cases}$$

Jetzt kann an die Bestimmung resp. Überprüfung des Horizontes geschritten werden.

Die Abszissendifferenzen:

$$(21) \qquad \begin{cases} d_1 = \xi_0 - \xi_1 \\ d_2 = \xi_0 - \xi_2 \\ \vdots \\ d_4 = \xi_0 - \xi_4, \end{cases}$$

die unmittelbar auf dem Photogramme oder Positive gemessen werden können, beziehen sich auf eine angenommene Richtung des Horizontes. Wird diese Richtung senkrecht zu den Bildern von in der Natur vertikalen Linien gewählt und kann die Bildebene als vertikal im Raume vorausgesetzt werden, was aus dem parallelen Verlauf der Bilder vertikaler Geraden mit Sicherheit erkannt wird, so ist die gewählte Horizontrichtung die richtige.

Sollte jedoch eine Differenz beider Richtungen, der angenommenen und wahren, bestehen, so läſst sich diese nachfolgend am einfachsten feststellen.

Wir berechnen die Abszissen: $\xi_0, \xi_1 \cdots \xi_4$ mit Verwendung der berechneten Bildweite f und der Horizontalwinkel: $\gamma, \alpha_1 \cdots \alpha_4$ und erhalten:

$$(22) \qquad \begin{cases} \xi_0' = f \operatorname{tg} \gamma \\ \xi_1' = f \operatorname{tg}(\gamma - \alpha_1) \\ \xi_2' = f \operatorname{tg}(\gamma - \alpha_2) \\ \vdots \\ \xi_4' = f \operatorname{tg}(\gamma - \alpha_4) \end{cases}$$

und bilden hieraus die Abszissendifferenzen:

$$(23) \qquad \begin{cases} \xi_0' - \xi_1' = \delta_1 \\ \xi_0' - \xi_2' = \delta_2 \\ \vdots \\ \xi_0' - \xi_4' = \delta_4. \end{cases}$$

Werden die Differenzen aus (21) und (23) einander gleich, also:

$$\delta_1 = d_1, \quad \delta_2 = d_2 \cdots, \quad \delta_4 = d_4,$$

so fällt die angenommene Lage des Horizontes mit der wahren Lage zusammen.

Sollte es sich ereignen, daſs die berechneten Abszissenunterschiede mit den gemessenen nicht übereinstimmen, so ist dies auf den Einfluſs der nicht richtig angenommenen Horizontalrichtung zurückzuführen,

und es müfste die Berechnung der Gröfsen: r, θ, f und γ mit Zugrundelegung der berechneten Werte: $\delta_1, \delta_2 \cdots, \delta_4$ wiederholt werden. Erst dann würde man für die Gröfsen: r, θ, f, γ und alle aus denselben abgeleiteten Ausdrücke Werte erhalten, die als endgiltige Werte zu behandeln wären.

Durch das vorstehende Verfahren wird blofs die Richtung des Horizontes geprüft, und es erübrigt nunmehr, seine Lage in Bezug auf die Bilder der benutzten Objekte festzulegen.

Kennt man die Höhen der benützten Punkte: $H_0, H_1 \cdots, H_4$ und die Höhe des Instrumenthorizontes über derselben Vergleichungsebene H und sind $y_0, y_1 \cdots, y_4$ die Ordinaten der Bildpunkte, bezogen auf den wahren Horizont des Photogrammes, so ergiebt sich unter der Voraussetzung, dafs der Apparathorizont tiefer liegt als die herangezogenen Punkte, also $H < H_0, H_1 \cdots H_4$ ist, aus den ähnlichen Dreiecken: $CP_nP'_n$ und Cp_np' (Tafel I, Fig. 2):

$$y_n : (H_n - H) = \frac{f}{\cos(\gamma - \alpha_n)} : \varrho_n,$$

wobei γ das Azimut der Bilddistanz, α_n das Azimut des Strahles ϱ_n, bezogen auf den Leitstrahl $\varrho_0 = r$ bedeutet. Liegen die Bildpunkte rechts von der Vertikallinie, so ist $\gamma < \alpha_n$, hingegen, wenn $\gamma > \alpha_n$ ist, so befinden sich dieselben links von der Vertikallinie, vorausgesetzt, dafs P_0 links liegt; in jedem Falle kann in der vorstehenden Proportion $\cos(\gamma - \alpha_n)$ gesetzt werden.

Die richtige Ordinate des Bildpunktes von P_n wird sein:

$$y_n = \frac{(H_n - H)f}{\varrho_n \cos(\gamma - \alpha_n)}. \tag{24}$$

Auf Grund dieser Gleichung erhalten wir für die Ordinaten der Bildpunkte:

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{(H_0 - H)f}{\varrho_0 \cos(\gamma - \alpha_0)} \\ y_1 = \dfrac{(H_1 - H)f}{\varrho_1 \cos(\gamma - \alpha_1)} \\ \vdots \\ y_4 = \dfrac{(H_4 - H)f}{\varrho_4 \cos(\gamma - \alpha_4)}, \end{cases} \tag{25}$$

wobei noch bemerkt sei, dafs die Höhe des Instrumenthorizontes sich zusammensetzt aus der Höhe des Standpunktes h und der Höhe des Horizontes über dem Standpunkte, der Instrumenthöhe I, also:

$$H = h + I.$$

Werden nun die berechneten Ordinaten: $y_0, y_1 \cdots y_4$ von den Bildpunkten $p_0, p_1 \cdots p_4$ aus in entsprechendem Sinne in der Richtung der Vertikallinie aufgetragen, so ergeben sich die Punkte $p_0', p_1' \cdots p_4'$, die als Projektionen der Bildpunkte auf den wahren Horizont zu betrachten sind und miteinander verbunden die wahre Lage des Horizontes angeben.

Aus der Gleichung (24) läſst sich die relative und auch die absolute Höhe eines jeden Punktes, bezogen auf ein und dieselbe Vergleichungsebene, berechnen, vorausgesetzt, daſs die Ordinaten des wahren Horizontes bekannt sind; es ist nämlich:

$$(26) \qquad \begin{cases} H_n - H = \cos(\gamma - \alpha_n) \frac{y_n \varrho_n}{f} \\ \text{und} \\ H_n = H + \cos(\gamma - \alpha_n) \frac{y_n \varrho_n}{f}. \end{cases}$$

Hat man jedoch die Ordinaten der Bildpunkte in Bezug auf den angenommenen, genäherten Horizont gemessen und zwar: $\eta_0, \eta_1 \cdots \eta_4$, so ergeben sich nach Einsetzung dieser Werte statt y in Gleichung (26) nur Näherungswerte für die Höhen:

$$(27) \qquad \begin{cases} H_0' = H + \cos\gamma \frac{\eta_0 \varrho_0}{f} \\ H_1' = H + \cos(\gamma - \alpha_1) \frac{\eta_1 \varrho_1}{f} \\ \vdots \\ H_4' = H + \cos(\gamma - \alpha_4) \frac{\eta_4 \varrho_4}{f}. \end{cases}$$

Werden nun diese genäherten Höhenwerte mit den gegebenen Höhen: $H_0, H_1, \cdots H_4$ verglichen, so entstehen Differenzen:

$$(28) \qquad \begin{cases} \varDelta H_0 = H_0 - H_0' \\ \varDelta H_1 = H_1 - H_1' \\ \vdots \\ \varDelta H_4 = H_4 - H_4', \end{cases}$$

die, wenn sie gröſsere Beträge erreichen, abgesehen von den kleinen Fehlern in ϱ, f, γ und α in erster Linie ihren Grund in den fehlerhaften Ordinaten η haben und lehren, daſs der angenommene Horizont mit dem wahren sich nicht deckt.

Werden nun die Differenzen aus den gerechneten und gemessenen Werten der Ordinaten gebildet:

$$(29)\qquad \begin{cases} y_0 - \eta_0 = \varDelta y_0 \\ y_1 - \eta_1 = \varDelta y_1 \\ \vdots \\ y_4 - \eta_4 = \varDelta y_4, \end{cases}$$

so müssen diese Differenzen in ziemlich gleichem Betrage und, was besonders wichtig ist, mit gleichem Vorzeichen auftreten.

Kleine Variationen um den Mittelwert:

$$\varDelta y = \pm \frac{\varDelta y_0 + \varDelta y_1 + \cdots + \varDelta y_4}{5},$$

wobei $\varDelta y_0, \cdots \varDelta y_4$ absolut zu nehmen sind, üben keinen Einfluſs auf die weiteren Schlüsse, nur müssen sich die Schwankungen innerhalb der statthaften Grenzen bewegen.

Der Mittelwert $\varDelta y$ zeigt, um welchen linearen Betrag der angenommene Horizont zu verschieben ist und das übereinstimmende Vorzeichen giebt die Richtung der Verschiebung an.

Sollte es sich ereignen, daſs die Höhe des Standpunktes resp. des Instrumenthorizontes nicht bekannt wäre, so kann man aus den Gleichungen (27) Näherungswerte für dieselbe gewinnen; wenn man in denselben statt der Näherungswerte der Höhen: $H_0', H_1', \cdots H_4'$ die bekannten Höhen: $H_0, H_1 \cdots H_4$ einsetzt. Es werden sich Beträge ergeben, die von dem wahren Werte H mehr oder weniger abweichen werden, also:

$$(30)\qquad \begin{cases} H^0 = H_0 - \cos\gamma \, \frac{\eta_0 \varrho_0}{f} \\ H' = H_1 - \cos(\gamma - \alpha_1) \frac{\eta_1 \varrho_1}{f} \\ H'' = H_2 - \cos(\gamma - \alpha_2) \frac{\eta_2 \varrho_2}{f} \\ \vdots \\ H^{IV} = H_4 - \cos(\gamma - \alpha_4) \frac{\eta_4 \varrho_4}{f} \end{cases}$$

und ein wahrscheinlicher Wert der Horizonthöhe wird das arithmetische Mittel sein:

$$(31)\qquad H = \frac{H^0 + H' + H'' + H''' + H^{IV}}{5}.$$

2.

Mehrfache Bestimmung.

Es seien allgemein n Punkte ihrer horizontalen und vertikalen Lage nach gegeben und auf einer vertikalen Ebene photographisch fixiert

worden; auf dem Photogramme habe man die Abstände der einzelnen Bildpunkte $p_0, p_1 \ldots p_n$ von einem zum Anfangspunkte gewählten Punkte, z. B. p_0, mit aller Schärfe gemessen und erhalten: $d_1, d_2 \ldots d_n$, so handelt es sich, wie bei der einfachen Punktbestimmung:

a) um die Festlegung des Standpunktes,

b) um die perspektivischen Konstanten der Kamera und

c) um die Orientierung der Bildebene im Raume.

Auch hier werden zuerst vier Unbekannte: r, θ, f und γ zu ermitteln sein, zu deren Berechnung sich $(n-1)$ Bestimmungsgleichungen aufstellen lassen, so daſs $(n-1)-4=n-5$ Bestimmungsgleichungen überschüssig erscheinen.

Aus diesem Grunde kann man die Sätze der Methode der kleinsten Quadrate zur Anwendung bringen und die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten bestimmen.

Vorerst erscheint es geboten, bei Annahme des Punktes P_0 als Pol die Azimute und Radienvektoren der einzelnen Punkte zu ermitteln.

Für die Richtungswinkel folgt:

$$(1) \qquad \begin{cases} tg\,\theta_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ tg\,\theta_2 = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} \\ \vdots \\ tg\,\theta_n = \dfrac{y_n - y_0}{x_n - x_0}, \end{cases}$$

und für die Leitstrahlen ergiebt sich:

$$(2) \qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{\sin\theta_1} = \dfrac{x_1 - x_0}{\cos\theta_1} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\ r_2 = \dfrac{y_2 - y_0}{\sin\theta_2} = \dfrac{x_2 - x_0}{\cos\theta_2} = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} \\ \vdots \\ r_n = \dfrac{y_n - y_0}{\sin\theta_n} = \dfrac{x_n - x_0}{\cos\theta_n} = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}. \end{cases}$$

Analog wie bei der „Einfachen Bestimmung“ läſst sich auch hier eine Bestimmungsgleichung aufstellen von der Form:

$$(3) \qquad r_n \cos\theta_n m - r_n \sin\theta_n n + r_n d_n \cos\theta_n p + r_n d_n \sin\theta_n q = d_n,$$

worin m, n, p und q die Bedeutung haben:

$$(4)\quad \begin{cases} m = \dfrac{f \sin\theta}{r \cos^2\gamma} \\ n = \dfrac{f \cos\theta}{r \cos^2\gamma} \\ p = \dfrac{\cos(\theta+\gamma)}{r \cos\gamma} \\ q = \dfrac{\sin(\theta+\gamma)}{r \cos\gamma}\,. \end{cases}$$

Bestimmungsgleichungen von der Form (3) lassen sich im Ganzen $(n-1)$ aufstellen und zwar:

$$(5)\quad \begin{cases} \text{Für den Punkt } P_1 \ldots & r_1 \cos\theta_1 m - r_1 \sin\theta_1 n + r_1 d_1 \cos\theta_1 p + r_1 d_1 \sin\theta_1 q = d_1 \\ \text{,, ,, ,, } P_2 & r_2 \cos\theta_2 m - r_2 \sin\theta_2 n + r_2 d_2 \cos\theta_2 p + r_2 d_2 \sin\theta_2 q = d_2 \\ \quad\vdots & \vdots \\ \text{,, ,, ,, } P_n & r_n \cos\theta_n m - r_n \sin\theta_n n + r_n d_n \cos\theta_n p + r_n d_n \sin\theta_n q = d_n \end{cases}$$

oder auch, wenn man Koordinatendifferenzen einführt:

$$(6)\quad \begin{cases} (x_1 - x_0)\, m - (y_1 - y_0)\, n + d_1 (x_1 - x_0)\, p + d_1 (y_1 - y_0)\, q = d_1 \\ (x_2 - x_0)\, m - (y_2 - y_0)\, n + d_2 (x_2 - x_0)\, p + d_2 (y_2 - y_0)\, q = d_2 \\ \vdots \\ (x_n - x_0)\, m - (y_n - y_n)\, n + d_n (x_n - x_0)\, p + d_n (y_n - y_0)\, q = d_n\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen führen auf die folgenden vier Normalgleichungen, deren Bildungsgesetz in der Theorie der kleinsten Quadrate begründet ist:

$$(7)\quad \begin{cases} [(r\cos\theta)^2]\, m - [r^2 \sin\theta\cos\theta]\, n + [r^2 d \cos^2\theta]\, p + [r^2 d \sin\theta\cos\theta]\, q = [rd\cos\theta] \\ [r^2 \sin\theta\cos\theta]\, m - [(r\sin\theta)^2]\, n + [r^2 d \sin\theta\cos\theta]\, p + [r^2 d \sin^2\theta]\, q = [rd\sin\theta] \\ [(r\cos\theta)^2 d]\, m - [r^2 d \sin\theta\cos\theta]\, n + [(rd\cos\theta)^2]\, p + [(rd)^2 \sin\theta\cos\theta]\, q = [rd^2\cos\theta] \\ [r^2 d \sin\theta\cos\theta]\, m - [(r\sin\theta)^2 d]\, n + [(rd)^2 \sin\theta\cos\theta]\, p + [(rd\sin\theta)^2]\, q = [rd^2\sin\theta]. \end{cases}$$

Die vorstehenden Normalgleichungen können mit Berücksichtigung der Form der Gleichungen (6) auch geschrieben werden:

$$(8)\quad \begin{cases} [(x-x_0)^2]m - [(x-x_0)(y-y_0)]n + [d(x-x_0)^2]p + [d(x-x_0)(y-y_0)]q = [d(x-x_0)] \\ [(x-x_0)(y-y_0)]m - [(y-y_0)^2]n + [d(x-x_0(y-y_0)]p + [d(y-y_0)^2]q = [d(y-y_0)] \\ [(x-x_0)^2 d]\, m - [d(x-x_0)(y-y_0)]\, n + [d^2(x-x_0)^2]\, p \\ \qquad + [d^2(x-x_0)(y-y_0)]\, q = [d^2(x-x_0)] \\ [(x-x_0)(y-y_0)d]\, m - [d(y-y_0)^2]\, n + [d^2(x-x_0)(y-y_0)]\, p \\ \qquad + [d^2(y-y_0)^2]q = [d^2(y-y_0)]\,. \end{cases}$$

Die wahrscheinlichsten Werte der neuen Unbekannten folgen aus den Normalgleichungen mit:

$$(9)\qquad \begin{cases} m = \frac{D_m}{D} \\ n = \frac{D_n}{D} \\ p = \frac{D_p}{D} \\ q = \frac{D_q}{D}, \end{cases}$$

wobei D die Determinante des Systems und D_m, D_n, D_p und D_q jene der Unbekannten bedeuten und sich in bekannter Weise aus (7) oder (8) bestimmen lassen.

Durch Substitution der vorstehenden wahrscheinlichen Werte von: m, n, p und q in die Gleichungen 1., (11) bezw. (12) resultieren die wahrscheinlichen Werte der Polarkoordinaten r und θ des Standpunktes der Bildweite f und des Orientierungswinkels γ.

Die Gleichungen: (1), (I), (II), (III) (IV) geben die wahrscheinlichen Werte der recht winkligen Koordinaten der Station u. s. w.

Die bei „Einfacher Bestimmung“ aufgestellten Bestimmungsgleichungen für die Azimute ω, die Horizontalwinkel x, die Radienvektoren ϱ lassen sich auf n Punkte ausdehnen.

Die Überprüfung resp. Bestimmung des Horizontes kann in analoger Weise wie unter **1.** geführt werden, ebenso die Höhenermittlung.

Sämtliche mit Benutzung der wahrscheinlichen Werte der neuen Unbekannten aus Gleichung (9) durchgeführten Untersuchungen ergeben wahrscheinliche Werte.

3.

Genauigkeits-Untersuchungen.

a) Einfache Bestimmung.

Die rechtwinkligen Koordinaten der gegebenen Punkte können als fehlerfrei angesehen werden, somit sind nur die Abszissendifferenzen: d_1, d_2, d_3 und d_4, wenn vorerst die einfache Punktbestimmung ins Auge gefaſst wird, mit gewissen Fehlern: Δd_1, Δd_2, Δd_3 und Δd_4, behaftet, welche ihren Einfluſs in erster Linie auf die neuen Unbekannten: m, n, p und q und dann auch auf die gesuchten Gröſsen: r, θ, x, y sowie f, γ und x_0, welche als Funktionen derselben erscheinen, ausüben.

Nach den Sätzen der Methode der kleinsten Quadrate über den mittleren Fehler einer Funktion erhalten wir für den mittleren Fehler der neuen Unbekannten:

$$(1)\quad\begin{cases}\Delta m = \pm\sqrt{\left(\frac{dm}{dd_1}\right)^2\Delta d_1^2 + \left(\frac{dm}{dd_2}\right)^2\Delta d_2^2 + \left(\frac{dm}{dd_3}\right)^2\Delta d_3^2 + \left(\frac{dm}{dd_4}\right)^2\Delta d_4^2}\\ \Delta n = \pm\sqrt{\left(\frac{dn}{dd_1}\right)^2\Delta d_1^2 + \left(\frac{dn}{dd_2}\right)^2\Delta d_2^2 + \left(\frac{dn}{dd_3}\right)^2\Delta d_3^2 + \left(\frac{dn}{dd_4}\right)^2\Delta d_4^2}\\ \Delta p = \sqrt{\left(\frac{dp}{dd_1}\right)^2\Delta d_1^2 + \left(\frac{dp}{dd_2}\right)^2\Delta d_2^2 + \left(\frac{dp}{dd_3}\right)^2\Delta d_3^2 + \left(\frac{dp}{dd_4}\right)^2\Delta d_4^2}\\ \Delta q = \sqrt{\left(\frac{dq}{dd_1}\right)^2\Delta d_1^2 + \left(\frac{dq}{dd_2}\right)^2\Delta d_2^2 + \left(\frac{dq}{dd_3}\right)^2\Delta d_3^2 + \left(\frac{dq}{dd_4}\right)^2\Delta d_4^2}.\end{cases}$$

Die partiellen Differentialquotienten in den vorstehenden Gleichungen können in einfacher Weise aus den Gleichungen (1) und (10) abgeleitet und hierin eingeführt werden.

Da nun die gesuchten Unbekannten:

$$(2)\quad\begin{cases} tg\theta = \frac{m}{n}\\ tg(\theta+\gamma) = \frac{p}{q}\\ f = \frac{m}{p}\frac{\cos\gamma\cos(\theta+\gamma)}{\sin\theta}\\ r = \frac{\cos(\theta+\gamma)}{p\cos\gamma},\end{cases}$$

als Funktionen von m, n, p und q auftreten, so lassen sich ihre mittleren Fehler nach dem bei den Gleichungen (1) angewendeten Satze der Fehlerrechnung aufstellen.

Der mittlere Fehler von θ wird sein:

$$(3)\quad \Delta\theta = \pm\cos^2\theta\sqrt{\left(\frac{d\,tg\theta}{dm}\right)^2\Delta m^2 + \left(\frac{d\,tg\theta}{dn}\right)^2\Delta n^2},$$

worin die partiellen Differentialquotienten aus (2) gefunden werden mit:

$$\begin{cases}\left(\frac{d\,tg\theta}{dm}\right) = \frac{1}{n} = \frac{tg\theta}{m}\\ \left(\frac{d\,tg\theta}{dn}\right) = -\frac{m}{n^2} = -\frac{tg\theta}{n},\end{cases}$$

und somit wird der mittlere Fehler des Winkels θ:

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}\Delta\theta = \pm\cos^2\theta\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{n}\right)^2 + \left(\frac{m\Delta n}{n^2}\right)^2}\\ \text{oder auch:}\\ \Delta\theta = \pm\frac{\sin 2\theta}{2}\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2}.\end{cases}$$

In ähnlicher Weise kann sofort der mittlere Fehler für den Winkel γ aufgestellt werden, nämlich:

$$(\mathrm{II})\quad \Delta\gamma = \pm\frac{\sin 2(\theta+\gamma)}{2}\sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta q}{q}\right)^2}.$$

Die allgemeine Form des mittleren Fehlers der Bildweite f lautet:

$$(4)\qquad \Delta f = \pm\sqrt{\left(\frac{df}{dm}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{df}{dp}\right)^2 \Delta p^2 + \left(\frac{df}{d\gamma}\right)^2 \Delta\gamma^2 + \left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 \Delta\theta^2},$$

worin die partiellen Differentialquotienten sind:

$$\begin{cases} \left(\frac{df}{dm}\right) = \frac{\cos\gamma\cos(\theta+\gamma)}{p\sin\theta} = \frac{f}{m} \\ \left(\frac{df}{dp}\right) = -\frac{m\cos\gamma\cos(\theta+\gamma)}{\sin\theta}\frac{1}{p^2} = -\frac{f}{p} \\ \left(\frac{df}{d\gamma}\right) = -\frac{m}{p}\frac{\sin(\theta+2\gamma)}{\sin\theta} = -\frac{\sin(\theta+2\gamma)}{\cos\gamma\cos(\theta+\gamma)}f, \\ \left(\frac{df}{d\theta}\right) = -\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\theta}\frac{m}{p} = -\frac{1}{rp\sin\theta}f, \end{cases}$$

welche, in die Gleichung für Δf eingeführt, geben:

$$(\text{III})\qquad \begin{cases} \Delta f = \pm f\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\theta}{rp\sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\theta+2\gamma)\Delta\gamma}{\cos\gamma\cos(\theta+\gamma)}\right)^2}. \\ \text{Der relative Fehler der Bildweite beträgt:} \\ \frac{\Delta f}{f} = \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\theta}{rp\sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\theta+2\gamma)\Delta\gamma}{\cos\gamma\cos(\theta+\gamma)}\right)^2}. \end{cases}$$

Der mittlere Fehler im Leitstrahle r ist:

$$(5)\qquad \Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 \Delta p^2 + \left(\frac{dr}{d\gamma}\right)^2 \Delta\gamma^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \Delta\theta^2},$$

wobei

$$\begin{cases} \left(\frac{dr}{dp}\right) = -\frac{\cos(\theta+\gamma)}{\cos\gamma}\frac{1}{p^2} = -\frac{r}{p} \\ \left(\frac{dr}{d\gamma}\right) = -\frac{\sin\theta}{p\cos^2\gamma} = -\frac{m}{fp}r \\ \left(\frac{dr}{d\theta}\right) = -r\operatorname{tg}(\theta+\gamma) = -\frac{q}{p}r, \end{cases}$$

und nach ausgeführter Substitution ergiebt sich:

$$(\text{IV})\qquad \begin{cases} \Delta r = \pm r\sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{m}{fp}\right)^2 \Delta\gamma^2 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 \Delta\theta^2} \\ \text{und der relative Fehler:} \\ \frac{\Delta r}{r} = \pm\frac{1}{p}\sqrt{\Delta p^2 + \left(\frac{m}{f}\right)^2 \Delta\gamma^2 + q^2\Delta\theta^2}. \end{cases}$$

Die mittleren Fehler der rechtwinkligen Koordinaten des Standpunktes:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta, \end{cases}$$

worin x_0 und y_0 als fehlerfrei zu betrachten sind, ergeben sich mit:

$$(6) \qquad \begin{cases} \Delta x = \pm \sqrt{\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 \Delta r^2 + \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 \Delta \theta^2} \\ \Delta y = \pm \sqrt{\left(\frac{dy}{dr}\right)^2 \Delta r^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 \Delta \theta^2}. \end{cases}$$

Nun sind die in den vorstehenden Ausdrücken auftretenden partiellen Differentialquotienten:

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dr}\right) = \cos\theta = \frac{x - }{r} \\ \left(\frac{dx}{d\theta}\right) = -r\sin\theta = -(y - x_0) \\ \text{und} \\ \left(\frac{dy}{dr}\right) = \sin\theta = \frac{y - y_0}{r} \\ \left(\frac{dy}{d\theta}\right) = r\cos\theta = x - x_0, \end{cases}$$

somit nach ausgeführter Substitution in Gleichung (6):

$$(\mathrm{V}) \qquad \begin{cases} \Delta x = \pm \sqrt{\left(\frac{x - x_0}{r}\right)^2 \Delta r^2 + (y - y_0)^2 \Delta \theta^2} = \pm \sqrt{\cos^2\theta \Delta r^2 + r^2 \sin^2\theta \Delta \theta^2}, \\ \Delta y = \pm \sqrt{\left(\frac{y - y_0}{r}\right)^2 \Delta r^2 + (x - x_0)^2 \Delta \theta^2} = \pm \sqrt{\sin^2\theta \Delta r^2 + r^2 \cos^2\theta \Delta \theta^2}. \end{cases}$$

Der mittlere Punktfehler des Standpunktes ergiebt sich durch:

$$\Delta M^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta r^2 + r^2 \cdot \Delta \theta^2$$

oder mit Heranziehung der Ausdrücke für die mittleren Fehler von r und θ auch:

$$(\mathrm{VI}) \quad \Delta M^2 = r^2 \left[\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{m}{fp}\right)^2 \Delta \gamma^2 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 \Delta \theta^2 + \frac{\sin^2 2\theta}{4} \left(\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 \right) \right].$$

Was die Genauigkeit betrifft, mit welcher die Vertikallinie bezw. der Hauptpunkt der Perspektive festgelegt wird, so ist dieselbe, da

$$\xi_0 = f \operatorname{tg} \gamma$$

ist, von der Schärfe abhängig, mit der f und γ das Resultat ξ_0 beeinflussen.

Der mittlere Fehler ist:

$$(7) \qquad \Delta \xi_0 = \pm \sqrt{\left(\frac{d\xi_0}{df}\right)^2 \Delta f^2 + \left(\frac{d\xi_0}{d\gamma}\right)^2 \Delta \gamma^2},$$

wobei:

$$\begin{cases} \left(\frac{d\xi_0}{df}\right) = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\xi_0}{f} \\ \left(\frac{d\xi_0}{d\gamma}\right) = -f = -\frac{\xi_0}{\frac{\sin 2\gamma}{2}}, \end{cases}$$

so dafs man erhält:

(VII)
$$\begin{cases} \Delta \xi_0 = \pm \xi_0 \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \gamma}{\frac{\sin 2\gamma}{2}}\right)^2} \\ \text{oder den relativen Fehler:} \\ \frac{\Delta \xi_0}{\xi_0} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \gamma}{\frac{\sin 2\gamma}{2}}\right)^2}. \end{cases}$$

Würde man die Lage des Hauptpunktes statt von dem Bildpunkte p_0 von p_1, p_2, p_3 oder p_4 aus bestimmen, so würden wir nach kurzer Rechnung für die mittleren Fehler der Abszissen durch Heranziehung der Gleichungen (1), (22) erhalten:

(VIII)
$$\begin{cases} \Delta \xi_1 = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \gamma}{\frac{\sin 2\gamma}{2}}\right)^2\right] \xi_0^2 + \Delta d_1^2} = \sqrt{\Delta \xi_0^2 + \Delta d_1^2} \\ \Delta \xi_2 = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \gamma}{\frac{\sin 2\gamma}{2}}\right)^2\right] \xi_0^2 + \Delta d_2^2} = \sqrt{\Delta \xi_0^2 + \Delta d_2^2}. \end{cases}$$

Wie aus den Gleichungen (VII) und (VIII) zu ersehen ist, besteht zwischen den mittleren Fehlern der Abszissen die Beziehung, dafs

$$\Delta \xi_0 < \Delta \xi_1 < \Delta \xi_2 \ldots .$$

ist, was besagt, dafs der Hauptpunkt resp. die Vertikallinie am genauesten durch die Abszisse des Bildpunktes p_0 d. i. ξ_0 ermittelt wird.

b) Mehrfache Bestimmung.

Auf Grund der mehrfachen Bestimmung werden die wahrscheinlichen Werte der Unbekannten r, θ, x, y und f, γ, ξ_o erhalten.

Die mittleren Fehler dieser Gröfsen ergeben sich aus den Gleichungen des vorhergehenden Abschnittes:

(1)
$$\begin{cases} \Delta r = \pm r \sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{m}{fp}\right)^2 \Delta \gamma^2 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 \Delta \theta^2}, \\ \Delta \theta = \pm \frac{\sin 2\theta}{2} \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2}, \\ \Delta f = \pm f \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \theta}{rp \sin \theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\theta + 2\gamma) \Delta \gamma}{\cos \gamma \cos(\theta + \gamma)}\right)^2} \\ \Delta \gamma = \pm \frac{\sin 2(\theta + \gamma)}{2} \sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta q}{q}\right)^2}, \\ \Delta x = \sqrt{\cos^2 \theta \Delta r^2 + r^2 \sin^2 \theta \Delta \theta^2}, \\ \Delta y = \sqrt{\sin^2 \theta \Delta r^2 + r^2 \cos^2 \theta \Delta \theta^2}, \\ \Delta \xi_o = \xi_o \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \gamma}{\frac{\sin 2\gamma}{2}}\right)^2}, \end{cases}$$

wenn hierin für Δm, Δn, Δp, Δq die mittleren Fehler dieser Unbekannten eingesetzt werden.

Bezeichnet μ den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, so ist dieser gegeben durch:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-4}},$$

wobei $[vv]$ die Summe der Fehlerquadrate der Bestimmungsgleichungen für m, n, p, q und n deren Anzahl bedeutet; sind ferner G_m, G_n, G_p und G_q die Gewichtszahlen der neuen Unbekannten, so werden die mittleren Fehler derselben lauten:

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta m = \dfrac{\mu}{\sqrt{G_m}} = \mu\sqrt{Q_{11}} = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{(n-4)G_m}}, \\ \Delta n = \dfrac{\mu}{\sqrt{G_n}} = \mu\sqrt{Q_{22}} = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{(n-4)G_n}}, \\ \Delta p = \dfrac{\gamma}{\sqrt{G_p}} = \mu\sqrt{Q_{33}} = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{(n-4)G_p}}, \\ \Delta q = \dfrac{\mu}{\sqrt{G_q}} = \mu\sqrt{Q_{44}} = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{(n-4)G_q}}, \end{cases}$$

Die Gewichtszahlen können in verschiedenster Art berechnet werden; am bequemsten werden sie wohl erhalten nach Bessels Vorgange aus den Normalgleichungen für m, n, p und q dadurch, dafs man die Gewichtsgleichungen aufstellt und sie nach Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} und Q_{44} auflöst, nämlich:

$$(3)\quad \begin{cases} [(r\cos\theta)^2]\,Q_{11} - [r^2\sin\theta\cos\theta]\,Q_{12} + [r^2 d\cos^2\theta]\,Q_{13} + [r^2 d\sin\theta\cos\theta]\,Q_{14} = 1, \\ [r^2\sin\theta\cos\theta]\,Q_{11} - [(r\sin\theta)^2]\,Q_{12} + [r^2 d\sin\theta\cos\theta]\,Q_{13} + [r^2 d\sin^2\theta]\,Q_{14} = 0, \\ [(r\cos\theta)^2 d]\,Q_{11} - [r^2 d\cos\theta]\,Q_{12} + [(rd\cos\theta)^2]\,Q_{13} + [r^2 d^2\cos\theta\sin\theta]\,Q_{14} = 0, \\ [r^2 d\sin\theta\cos\theta]\,Q_{11} - [(r\sin\theta)^2 d]\,Q_{12} + [r^2 d^2\sin\theta\cos\theta]\,Q_{13} + [(rd\sin\theta)^2]\,Q_{14} = 0. \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} [(r\cos\theta)^2]\,Q_{21} - [r^2\sin\theta\cos\theta]\,Q_{22} + [r^2 d\cos^2\theta]\,Q_{23} + [r^2 d\sin\theta\cos\theta]\,Q_{24} = 0, \\ [r^2\sin\theta\cos\theta]\,Q_{21} - [(r\sin\theta)^2]\,Q_{22} + [r^2 d\sin\theta\cos\theta]\,Q_{23} + [r^2 d\sin^2\theta]\,Q_{24} = 1, \\ [(r\cos\theta)^2 d]\,Q_{21} - [r^2 d\cos\theta]\,Q_{22} + [(rd\cos\theta)^2]\,Q_{23} + [r^2 d^2\sin\theta\cos\theta]\,Q_{24} = 0, \\ [r^2 d\sin\theta\cos\theta]\,Q_{21} - [(r\sin\theta)^2 d]\,Q_{22} + [r^2 d^2\sin\theta\cos\theta]\,Q_{23} + [(rd\sin\theta)^2]\,Q_{24} = 0. \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} [(r\cos\theta)^2]\,Q_{31} - [r^2\sin\theta\cos\theta]\,Q_{32} + [r^2 d\cos^2\theta]\,Q_{33} + [r^2 d\sin\theta\cos\theta]\,Q_{34} = 0, \\ [r^2\sin\theta\cos\theta]\,Q_{31} - [(r\sin\theta)^2]\,Q_{32} + [r^2 d\sin\theta\cos\theta]\,Q_{33} + [r^2 d\sin^2\theta]\,Q_{34} = 0, \\ [(r\cos\theta)^2]\,Q_{31} - [r^2 d\cos\theta]\,Q_{32} + [(rd\cos\theta)^2]\,Q_{33} + [r^2 d^2\sin\theta\cos\theta]\,Q_{34} = 1, \\ [r^2 d\sin\theta\cos\theta]\,Q_{31} - [(r\sin\theta)^2 d]\,Q_{32} + [r^2 d^2\sin\theta\cos\theta]\,Q_{33} + [(rd\sin\theta)^2]\,Q_{34} = 0. \end{cases}$$

$$(6)\begin{cases}[(r\cos\theta)^2]Q_{41}-[r^2\sin\theta\cos\theta]Q_{42}+[r^2d\cos^2\theta]Q_{43}+[r^2d\sin\theta\cos\theta]Q_{44}=0,\\ [r^2\sin\theta\cos\theta]Q_{41}-[(r^2\sin\theta)^2]Q_{42}+[r^2d\sin\theta\cos\theta]Q_{43}+[r^2d\sin^2\theta]Q_{44}=0,\\ [(r\cos\theta)^2d]Q_{41}-[r^2d\cos\theta]Q_{42}+[(rd\cos\theta)^2]Q_{43}+[r^2d^2\sin\theta\cos\theta]Q_{44}=0,\\ [r^2d\sin\theta\cos\theta]Q_{41}-[(r\sin\theta)^2d]Q_{42}+[r^2d^2\sin\theta\cos\theta]Q_{43}+[(rd\sin\theta)^2]Q_{44}=0.\end{cases}$$

Nach Substitution der aus (3), (4), (5) und (6) berechneten Werte der Gewichtszahlen in die Gleichungen (1) ergeben sich die mittleren Fehler, welche ein Bild von der erreichten Genauigkeit zu bieten im Stande sind.

Der mittlere Punktfehler wird erhalten aus der Gleichung:

$$(7)\qquad \Delta M^2=\Delta x^2+\Delta y^2=\Delta r^2+r^2\Delta\theta^2,$$

worin gleichfalls die mittleren Fehler aus (1) einzuführen sind.

Der vorstehenden Genauigkeitsuntersuchung liegt die Voraussetzung zu Grunde, daſs die neuen Variablen m, n, p und q, als deren Funktionen die gesuchten Gröſsen:

$$(8)\qquad\begin{cases}r=\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{np+mq}\\ \theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{m}{n}\\ f=\dfrac{mq+np}{p^2+q^2}\\ \gamma=\dfrac{nq-mp}{mq+np}\\ x=x_0+\xi=x_0+\dfrac{n}{mq+np}\\ y=y_0+\eta=y_0+\dfrac{m}{mp+nq}\\ \xi_0=\dfrac{nq-mp}{p^2+q^2}\end{cases}$$

erscheinen, von einander unabhängig sind. Dies trifft jedoch nicht zu, sondern es besteht eine Abhängigkeit, welche durch die Gleichungen 1. (5) zum Ausdrucke kommt.

Allgemein kann die gesuchte Unbekannte F

$$F=\varphi(m,n,p,q)$$

gesetzt werden, worin die Argumente von einander abhängig sind.

Bezeichnet man die partiellen Differentialquotienten mit:

$$f_1=\left(\frac{d\varphi}{dm}\right),\quad f_2=\left(\frac{d\varphi}{dn}\right),\quad f_3=\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\quad\text{und}\quad f_4=\left(\frac{d\varphi}{dq}\right),$$

so erhält man für den mittleren Fehler dieser Funktion:

$$(9)\qquad \Delta F^2=\pm[ffQ]\mu^2,$$

worin sämtliche Variationen zweiter Klasse der vier Elemente f_1, f_2, f_3 und f_4 auftreten und die Gewichtskoeffizienten Q mit einem Doppelindex, bestehend aus den Indizes der Elemente f, verbunden erscheinen.

In entwickelter Form hat man:

$$\begin{aligned}\Delta F^2 = \pm \mu^2 [\ & f_1 f_1 Q_{11} + f_1 f_2 Q_{12} + \cdots + f_1 f_4 Q_{14} \\ & + f_2 f_1 Q_{21} + f_2 f_2 Q_{22} + \cdots + f_2 f_4 Q_{24} \\ & + f_3 f_1 Q_{31} + f_3 f_2 Q_{32} + \cdots + f_3 f_4 Q_{34} \\ & + f_4 f_1 Q_{41} + f_4 f_2 Q_{42} + \cdots + f_4 f_4 Q_{44}].\end{aligned} \tag{10}$$

Die Gewichtskoeffizienten Q ergeben sich hierfür aus den vorstehenden Gewichtsgleichungen (3), (4), (5) und (6); die partiellen Differentialquotienten f_1, f_2, f_3 und f_4 haben folgende Werte:

$$\left.\begin{cases} f_1 = r\left[\dfrac{m}{m^2 + n^2} - \dfrac{q}{mq + np}\right] \\ f_2 = r\left[\dfrac{n}{m^2 + n^2} - \dfrac{p}{mq + np}\right] \\ f_3 = -r\dfrac{n}{mq + np} \\ f_4 = r\dfrac{m}{mq + np} \end{cases}\right\} \text{für } r \tag{11}$$

$$\left.\begin{cases} f_1 = \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{m} \\ f_2 = -\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{n} \\ f_3 = 0 \\ f_4 = 0 \end{cases}\right\} \text{für } \operatorname{tg}\theta \tag{12}$$

$$\left.\begin{cases} f_1 = \dfrac{q}{mq + np} f \\ f_2 = \dfrac{p}{mq + np} f \\ f_3 = \dfrac{n - 2pf}{mq + np} f \\ f_4 = \dfrac{m - 2qf}{mq + np} f \end{cases}\right\} \text{für } f \tag{13}$$

$$\left.\begin{cases} f_1 = -\dfrac{n}{p^2 + q^2} f^2 \\ f_2 = +\dfrac{m}{p^2 + q^2} f^2 \\ f_3 = -qr^2 \\ f_4 = +pr^2 \end{cases}\right\} \text{für } \operatorname{tg}\gamma \tag{14}$$

$$(15)\qquad \left.\begin{cases} f_1 = -\frac{q}{n}\xi^2 \\ f_2 = \left[\frac{1}{\xi n} - \frac{p}{n}\right]\xi^2 \\ f_3 = -\xi^2 \\ f_4 = = \frac{m}{n}\xi \end{cases}\right\} \text{für } \xi \text{ resp. } x$$

$$(16)\qquad \left.\begin{cases} f_1 = \left[\frac{1}{\eta m} - \frac{q}{m}\right]\cdot\eta^2 \\ f_2 = -\frac{p}{m}\eta^2 \\ f_3 = -\frac{n}{m}\eta^2 \\ f_4 = -\eta^2 \end{cases}\right\} \text{für } \eta \text{ resp. } y$$

und

$$(17)\qquad \left.\begin{cases} f_1 = -\frac{p}{p^2+q^2} \\ f_2 = +\frac{q}{p^2+q^2} \\ f_3 = -\frac{1}{p^2+q^2}[m+2p\xi_0] \\ f_4 = +\frac{1}{p^2+q^2}[n-2q\xi_0] \end{cases}\right\} \text{für } \xi_0$$

Beispiel.

Mit einem gewöhnlichen photographischen Apparate, der durch einige Zugaben für photogrammetrische Zwecke adjustiert war, wurde im Herbste 1899 von der Plattform des Observatoriums der k. k. technischen Hochschule in Wien eine photographische Aufnahme in der Richtung gegen die innere Stadt ausgeführt, so dafs auf den Photogrammen die markanten Kirchturmspitzen: St. Michael, Augustiner, St. Peter, St. Stefan, Franziskaner und Universitätskirche erhalten wurden.

Auf den ungetonten Kopien wurden die Abstände der Bildpunkte obiger Objekte, bezogen auf St. Michael als Nullpunkt, gemessen und erhalten:

$d_1 = 6.52$ mm
$d_2 = 50.87$ „
$d_3 = 103.68$ „
$d_4 = 161.66$ „
$d_5 = 167.40$ „

Die rechtwinkligen Koordinaten der genannten Punkte wurden der amtlichen Publikation des k. k. Finanz-Ministeriums:

„Koordinaten und absolute Höhen der triangulierten Punkte von Nieder-Österreich“

entnommen und zwar:

Punkt	Koordinaten		Anmerkung
	x	y	
	m	m	
St. Michael	− 30.592	− 447.179	Lage des Koordinaten-
Augustiner	− 311.459	− 383.379	systems:
St. Peter	+ 129.917	− 229.508	x-Achse .. Meridian
St. Stefan	0.000	0.000	y-Achse .. Parallel.
Franziskaner	− 251.773	+ 141.315	Koordinatenanfang ist
Universitätskirche	+ 73.322	+ 342.487	St. Stefan.

Die Unterlagen für die rechnerische Durchführung des Fünfstrahlen-Problems mit Verwendung der Sätze aus der Methode der kleinsten Quadrate sowie Genauigkeitsuntersuchungen befinden sich in der nachfolgenden Tabelle I (S. 55) und den sich anschließenden Rechnungen.

Die Koeffizienten der fünf möglichen Bestimmungsgleichungen für m, n, p und q ergeben sich aus Tabelle I Kolonne: 4, 5, 11, 12 und 13.

Die Bestimmungsgleichungen lauten:

$$1)\left\{\begin{array}{l} -280{\cdot}867m - 63{\cdot}800n - 1{\cdot}83\,125p + 0{\cdot}41\,598 = 0{\cdot}00\,652, \\ 160{\cdot}509m - 217{\cdot}671n + 8{\cdot}16\,500p + 11{\cdot}07\,290 = 0{\cdot}05\,087, \\ 30{\cdot}592m - 447{\cdot}179n + 3{\cdot}17\,180p + 46{\cdot}36\,350 = 0{\cdot}10\,368, \\ -221{\cdot}181m - 588{\cdot}494n - 35{\cdot}75\,620p + 95.13\,670 = 0{\cdot}16\,166, \\ +103{\cdot}914m - 789{\cdot}666n + 17{\cdot}39\,550p + 132{\cdot}19\,400 = 0{\cdot}16\,740, \end{array}\right.$$

aus welchen die Normalgleichungen mit den Koeffizienten der Unbekannten aus Tabelle I Vertikalreihe 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 30, 33 und 34 erhalten werden:

$$(2)\left\{\begin{array}{l} 165{\cdot}306\,m + 17{\cdot}408{\cdot}6\,n + 11{\cdot}638{\cdot}3\,p - 4{\cdot}227{\cdot}07q = -8{\cdot}85\,515, \\ 17{\cdot}408{\cdot}6m + 1{\cdot}221{\cdot}315n + 4{\cdot}227{\cdot}07\,p - 183{\cdot}544\,q = -285{\cdot}183, \\ 11{\cdot}638{\cdot}3m + 4{\cdot}227{\cdot}07\,n + 1{\cdot}661{\cdot}21\,p - 865{\cdot}526\,q = -2{\cdot}13\,605. \\ -4{\cdot}227{\cdot}07m - 183{\cdot}544n - 865{\cdot}526p + 28{\cdot}797{\cdot}9\,q = +42{\cdot}8824. \end{array}\right.$$

Tabelle I.

1			2		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Punkt			Koordinaten											
No.		Name	x	y	d	$x-x_0$	$y-y_0$	$\log(x-x_0)$	$\log(y-y_0)$	$\log d$	$\log(x-x_0)d$	$\log(y-y_0)d$	$(x-x_0)d$	$(y-y_0)d$
			m	m	m	m	m							
1	P_0	St. Michael	− 30·592	− 447·179										
2	P_1	Augustiner	− 311 459	− 383·379	0·00 652	− 280·867	+ 63·800	2·44 850_1 n	1·80 482	7·81 425_{-10}	0·26 275_1 n	9·61 907	− 1·83 125	0·41 598
3	P_2	St. Peter	+ 129·917	− 229·508	0·05 087	+ 160·509	+ 217·671	2·20 550_2	2·33 780_2	8·70 646	0·91 196_2	1·04 426_2	+ 8·16 500	11·07 290
4	P_3	St. Stefan	0·000	0·000	0·10 368	+ 30·592	+ 447·179	1·48 560_8	2·65 047_9	9·01 569_6	0·50 130_4	1·66 617_5	+ 3·17 180	46·36 350
5	P_4	Franziskaner	− 251·773	+ 141·315	0·16 166	− 221·181	+ 588·494	2·34 475_2 n	2·76 974_5	9·20 860_2	1·55 335_4 n	1·97 834_7	− 35·75 620	95·13 670
6	P_5	Universität	+ 73·322	+ 342·487	0·16 740	+ 103·914	+ 789·666	2·01 667_7	2·89 744_3	9·22 376	1·24 043_7	2·12 120_9	+ 17 39 550	132 19 400
													− 8·85 515 [$(x-x_0)d$]	285·18 308 [$(y-y_0)d$]

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\log(x-x_0)^2$	$\log(y-y_0)^2$	$(x-x_0)^2$	$(y-y_0)^2$	$\log(x-x_0)(y-y_0)$	$\log(x-x_0)(y-y_0)d$	$(x-x_0)(y-y_0)$	$(x-x_0)(y-y_0)d$	$\log(x-x_0)^2d$	$\log(y-y_0)^2d$	$(x-x_0)^2d$	$(y-y_0)^2d$
4·89 700_2	3·60 964	78 886·4	4 070·45	4·25 332_1 n	2·06 757_1 n	− 17 919·2	− 116·835	2·71 125_2	1·42 389	514·340	26·539 4
4·41 100_4	4·67 560_4	25 763·4	47 380·44	4·54 330_4	3·24 976_4	34 938·7	1 777·308	3·11 746_5	3·38 206_4	1 310·590	2 410·244
2·97 121_6	5·30 095_8	935·87	199 967·3	4·13 608_7	3·15 178_3	13 679·9	1 418·343	1·98 691_2	4·31 665_4	97·030 5	20 732·6
4·68 950_4	5·53 949_0	48 921·6	346 330·8	5·11 449_7 n	4·32 309_9 n	− 130 166·0	− 21 042·45	3·89 810_6	4·74 809_3	7 908·72	55 987·7
4·03 335_4	5·79 488_6	10 798·4	623 565·7	4·91 412_0	4·13 788_0	82 058·0	13 736·56	3·25 711_4	5·01 864_6	1 807·64	104 387·2
		165 305·67 [$(x-x_0)^2$]	1 221 314·69 [$(y-y_0)^2$]			− 17 408·6 [$(x-x_0)(y-y_0)$]	− 4 227·074 [$(x-x_0)(y-y_0)d$]			11 638·320 5 [$(x-x_0)^2d$]	183 544·283 4 [$(y-y_0)^2d$]

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\log(x-x_0)^2d^2$	$\log(y-y_0)^2d^2$	$(x-x_0)^2d^2$	$(y-y_0)^2d^2$	$\log(x-x_0)(y-y_0)d^2$	$(x-x_0)(y-y_0)d^2$	$\log(x-x_0)d^2$	$\log(y-y_0)d^2$	$(x-x_0)d^2$	$(y-y_0)d^2$	v	vv
0·52 550_2	9·23 814	3·353 55	0·173 036	9·88 182_1 n	− 0·761 767	8·07 700_1 n	7·43 332	− 0·011 940 3	0·002 712 2	+ 2·4·10⁻⁵	5·76·10⁻¹⁰
1·82 392_4	2·08 852_4	66·669 00	122·608 6	1·95 622_4	90·411	9·61 842_2	9·75 072_2	0·415 356	0·563 278	+ 6·6·10⁻⁵	43·56·10⁻¹⁰
1·00 260_8	3·33 235_0	10·060 2	2 149·55	2·16 747_9	147·055	9·51 700_0	0·68 187_1	0·328 854	4·807 01	− 6·1·10⁻⁵	37·21·10⁻¹⁰
3·10 670_8	3·95 669_4	1 278·524	9 050·88	3·53 170_1 n	− 3 401·76	0·76 195_6 n	1·18 694_9	− 5·780 371	15·379 99	+ 0·4·10⁻⁵	0·16·10⁻¹⁰
2·48 087_4	4·24 240_6	302·603	17 474·64	3·36 164	2 299·53	0·46 419_7	1·34 496_9	2·912 047	22·129 4	+ 0·2·10⁻⁵	0·04·10⁻¹⁰
		1 661·209 75 [$(x-x_0)^2d^2$]	28 797·851 636 [$(y-y_0)^2d^2$]		− 865·525 767 [$(x-x_0)(y-y_0)d^2$]			− 2·136 054 3 [$(x-x_0)d^2$]	42·882 390 2 [$(y-y_0)d^2$]		86 73·10⁻¹⁰ [vv]

Die Unbekannten ergeben sich hieraus mit:

$$(3)\qquad \begin{cases} m = + \ \ 3{\cdot}93\,342 \cdot 10^{-5}, \\ n = - \ 24{\cdot}80\,60 \ \cdot 10^{-5}, \\ p = - \ 99{\cdot}06\,09 \ \cdot 10^{-5}, \\ q = - \ 11{\cdot}60\,28 \ \cdot 10^{-5}. \end{cases}$$

Die Polarkoordinaten des Standpunktes lauten:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} r = 1041 \cdot 29 m, \\ \theta = 170^0\ 59'\ 24 \end{cases}$$

und die rechtwinkligen Koordinaten sind:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta = -\ 1059 \cdot 180 m, \\ y = y_0 + r\sin\theta = -\ \ 284 \cdot 083 m. \end{cases}$$

Die Bildweite der Camera wird erhalten mit:

$$(\mathrm{II})\qquad f = \frac{m}{p}\,\frac{\cos\gamma\cos(\theta+\gamma)}{\sin\theta} = 242 \cdot 44 \ \mathrm{mm}$$

und der Orientierungswinkel der Bilddistanz beträgt:

$$(\mathrm{III})\qquad \gamma = 15^0\ 41'\ 26''.$$

Die Lage des Hauptpunktes und damit auch jene der Vertikallinie ergiebt sich durch die Abszisse:

$$(\mathrm{IV})\qquad \xi_0 = 68 \cdot 103 \ \mathrm{mm}.$$

Die Richtigstellung des Horizontes wird ermittelt bei dem Beispiele, das sich an das Problem der drei Strahlen anschliefst.

Um ein Bild von der Genauigkeit der ermittelten Gröfsen zu erhalten, wurden vorerst die mittleren Fehler der neuen Unbekannten: *m*, *n*, *p* und *q* bestimmt.

Es ist:

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta m = \pm \dfrac{\mu}{\sqrt{G_m}} = \mu\sqrt{Q_{11}}, \\ \Delta n = \pm \dfrac{\mu}{\sqrt{G_n}} = \mu\sqrt{Q_{22}}, \\ \Delta p = \pm \dfrac{\mu}{\sqrt{G_p}} = \mu\sqrt{Q_{33}}, \\ \Delta q = \pm \dfrac{\mu}{\sqrt{G_q}} = \mu\sqrt{Q_{44}}, \end{cases}$$

worin der mittlere Fehler der Gewichtseinheit mit Zuhilfenahme der Kolumne (36) in Tabelle I erhalten wird mit:

$$(5)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{5-4}} = \pm\, 9 \cdot 3129 \cdot 10^{-5}.$$

Zur Berechnung der Gewichtszahlen dienen nachstehende Gewichtsgleichungen, die nach Bessels Vorgange in bekannter Weise unmittelbar aus den Normalgleichungen aufgestellt werden können.

Wir erhalten:

$$(6)\left\{\begin{array}{l} 165\cdot306\ Q_{11}+17\cdot408\cdot6\ Q_{12}+11\cdot638\cdot3\ Q_{13}-4\cdot227\cdot07\,Q_{14}=1,\\ 17\cdot408\cdot6\ Q_{11}+1\cdot221\cdot315\,Q_{12}+4\cdot227\cdot07\,Q_{13}-183\cdot544\ Q_{14}=0,\\ 11\cdot638\cdot3\ Q_{11}+4\cdot227\cdot07\ Q_{12}+1\cdot661\cdot21\,Q_{13}-865\cdot526\ Q_{14}=0,\\ -4\cdot227\cdot07\,Q_{11}-183\cdot544\ Q_{12}-865\cdot526\ Q_{13}+28\cdot797\cdot9\ Q_{14}=0, \end{array}\right.$$

ferner

$$(7)\left\{\begin{array}{l} 165\cdot306\ Q_{21}+17\cdot406\cdot6\ Q_{22}+11\cdot628\cdot3\ Q_{23}-4\cdot227\cdot07\,Q_{24}=0,\\ 17\cdot408\cdot6\ Q_{21}+1\cdot221\cdot315\,Q_{22}+4\cdot227\cdot07\,Q_{23}-183\cdot544\ Q_{24}=1,\\ 11\cdot638\cdot3\ Q_{21}+4\cdot227\cdot07\ Q_{22}+1\cdot661\cdot21\,Q_{23}-865\cdot526\ Q_{24}=0,\\ -4\cdot227\cdot07\,Q_{21}-183\cdot544\ Q_{22}-865\cdot526\ Q_{23}+28\cdot797\cdot9\ Q_{24}=0, \end{array}\right.$$

weiter

$$(8)\left\{\begin{array}{l} 165\cdot306\ Q_{31}+17\cdot408\cdot6\ Q_{32}+11\cdot638\cdot3\ Q_{33}-4\cdot227\cdot07\,Q_{34}=0,\\ 17\cdot408\cdot6\ Q_{31}+1\cdot221\cdot315\,Q_{32}+4\cdot227\cdot07\,Q_{33}-183\cdot544\ Q_{34}=0,\\ 11\cdot638\cdot3\ Q_{31}+4\cdot227\cdot07\ Q_{32}+1\cdot661\cdot21\,Q_{33}-865\cdot526\ Q_{34}=1,\\ -4\cdot227\cdot07\,Q_{31}-183\cdot544\ Q_{32}-865\cdot526\ Q_{33}+28\cdot797\cdot9\ Q_{34}=0, \end{array}\right.$$

und endlich:

$$(9)\left\{\begin{array}{l} 165\cdot306\ Q_{41}+17\cdot408\cdot6\ Q_{42}+11\cdot638\cdot3\ Q_{43}-4\cdot227\cdot07\,Q_{44}=0,\\ 17\cdot408\cdot6\ Q_{41}+1\cdot221\cdot315\,Q_{42}+4\cdot227\cdot07\,Q_{43}-183\cdot544\ Q_{44}=0,\\ 11\cdot638\cdot3\ Q_{41}+4\cdot227\cdot07\ Q_{42}+1\cdot661\cdot21\,Q_{43}-865\cdot526\ Q_{44}=0,\\ -4\cdot227\cdot07\,Q_{41}-183\cdot544\ Q_{42}-865\cdot526\ Q_{43}+28\cdot797\cdot9\ Q_{44}=0. \end{array}\right.$$

Werden die vorstehenden Gewichtsgleichungen 6—9 aufgelöst, so ergeben sich für die eingeführten Zeichen Q die Werte:

$$\begin{array}{llll} Q_{11}=+\frac{1}{83.645}, & Q_{12}=-\frac{1}{12,782.800}, & Q_{13}=-\frac{1}{11.894}, & Q_{14}=-\frac{1}{11,927.300} \\ & Q_{21} & Q_{31} & Q_{41} \\ & Q_{22}=+\frac{1}{50.474}, & Q_{23}=+\frac{1}{67\,211}, & Q_{24}=+\frac{1}{7.882} \\ & & Q_{32} & Q_{42} \\ & & Q_{33}=+\frac{1}{822.95}, & Q_{34}=+\frac{1}{8.403} \\ & & & Q_{43} \\ & & & Q_{44}=+\frac{1}{1.181} \end{array}$$

die Gewichtszahlen selbst werden sein:

$$(10)\quad \begin{cases} G_m = \frac{1}{Q_{11}} = 83.645 \\ G_n = \frac{1}{Q_{22}} = 50.474 \\ G_p = \frac{1}{Q_{33}} = 822{\cdot}96 \\ G_q = \frac{1}{Q_{44}} = 1.181{\cdot}9 \end{cases}$$

und die mittleren Fehler der Unbekannten: m, n, p und q sind dann:

$$(11)\quad \begin{cases} \Delta m = 3{\cdot}220\ .10^{-7} \\ \Delta n = 4{\cdot}145\ .10^{-7} \\ \Delta p = 32{\cdot}463\ .10^{-7} \\ \Delta q = 27{\cdot}089\ .10^{-7}. \end{cases}$$

Die mittleren Fehler der Unbekannten: θ, γ, r und f werden sein:

$$(V)\quad \begin{cases} \Delta\theta = \pm 4'\ 26'' \\ \Delta\gamma = \pm 9'\ 6'' \\ \Delta r = \pm 3{\cdot}203\,m \\ \Delta f = \pm 0{\cdot}80\ mm. \end{cases}$$

Die relativen Fehler der Längen r und f berechnen sich zu:

$$(VI)\quad \begin{cases} \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{325} \\ \frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{306} \end{cases}$$

oder in Prozenten ausgedrückt:

$$\begin{cases} \frac{\Delta r}{r} = 0{\cdot}31\,\% \\ \frac{\Delta f}{f} = 0{\cdot}33\,\%. \end{cases}$$

Die mittleren Fehler der rechtwinkligen Koordinaten haben die Beträge:

(VII)

$$\begin{cases} \Delta x = \pm 3{\cdot}410\ \text{m} \\ \Delta y = \pm 1{\cdot}082\ \text{m}, \end{cases}$$

was auf einen mittleren Punktfehler führt:

$$M = \pm \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \pm 3{\cdot}50\ \text{m}.$$

Der Hauptpunkt der Perspektive resp. des Photogrammes und da-

mit die Lage der Vertikallinie wird bestimmt durch die Abszisse ξ_0, bezogen auf p_0:

(VIII)
$$\begin{cases} \xi_0 = 68{\cdot}103 \text{ mm}, \\ \text{mit dem mittleren Fehler:} \\ \Delta\xi_0 = \pm\, 0{\cdot}69 \text{ mm}, \end{cases}$$

was den relativen Fehler bedingt:

$$\frac{\Delta\xi_0}{\xi_0} = \frac{1}{99}$$

oder in Prozenten:

$$\frac{\Delta\xi_0}{\xi_0} = 1{\cdot}01\,\%.$$

II.

Das Dreistrahlen-Problem.

In der geodätischen Praxis ist diese Aufgabe unter den verschiedensten Namen bekannt: „Die Aufgabe des Snellius“, „Das Pothenot'sche Problem“, „Rückwärtseinschneiden“ etc. und findet bei trigonometrischen Punktbestimmungen ausgedehnte Verwendung.

In der Photogrammetrie läfst sich die Aufgabe in nachfolgender Weise formulieren:

> Drei Punkte: P_0, P_1 und P_2 sind der horizontalen und der vertikalen Lage nach bekannt durch ihre rechtwinkligen Koordinaten: (x_0, y_0), (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sowie ihre absoluten Höhen: H_0, H_1 und H_2.
>
> In einem vierten Punkte P wird bei vertikaler Lage der Bildebene eines photogrammetrischen Apparates eine Aufnahme ausgeführt und auf dem Photogramme werden die Abszissendifferenzen: d_1, d_2 gemessen, ebenso die Horizontalwinkel α_1 und α_2 nach den gegebenen Punkten mit einem Winkelmessinstrumente ermittelt.
>
> Man fragt:
>
> a) nach den Koordinaten des Standpunktes,
> b) nach den perspektivischen Konstanten der Kamera, Bildweite und Lage des Hauptpunktes sowie
> c) nach der Orientierung der Bildebene im Raume.

Auch hier kann, wie bei dem Fünfstrahlen-Probleme die Lösung durch eine einfache oder, wenn mehr als zwei Punkte ihrer Lage nach gegeben sind, durch mehrfache Bestimmung erfolgen.

1.

Einfache Bestimmung.

Wenn auch in diesem Falle die Festlegung der Station durch Polarkoordinaten, bezogen auf P_0, erfolgen soll, so sind wie früher dieselben vier Unkannten:

$$r,\ \theta,\ f \text{ und } \gamma$$

zu bestimmen.

Kennt man einmal die Polarkoodinaten des Standpunktes: r und θ, so lauten seine rechtwinkligen Koordinaten:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta. \end{cases}$$

Die Polarwinkel der von P_0 ausgehenden Polstrahlen r_1 und r_2 werden durch die Ausdrücke erhalten:

$$(2)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ \operatorname{tg}\theta_2 = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} \end{cases}$$

und die Radienvektoren:

$$(3)\qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{\sin\theta_1} = \dfrac{x_1 - x_0}{\cos\theta_1} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\ r_2 = \dfrac{y_2 - y_0}{\sin\theta_2} = \dfrac{x_2 - x_0}{\cos\theta_2} = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}. \end{cases}$$

Aus den Dreieeken: PP_0P_1 und PP_0P_2 folgen nach dem Sinussatze die Proportionen:

$$(4)\qquad \begin{cases} r : r_1 = \sin[\alpha_1 - \theta_1 + \theta] : \sin\alpha_1 \\ r : r_2 = \sin[\alpha_2 - \theta_2 + \theta] : \sin\alpha_2; \end{cases}$$

ferner lassen sich für die Tangenten der Winkel α_1 und α_2 aus den Dreiecken: PP_1P_1' und $Pp_1'p_1''$ sowie PP_2P_2' und $Pp_2'p_2''$ die Gleichungen aufstellen:

$$(5)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{d_1\cos\gamma}{\dfrac{f}{\cos\gamma} - d_1\sin\gamma} = \dfrac{r_1\sin(\theta - \theta_1)}{r - r_1\cos(\theta - \theta_1)} \\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{d_2\cos\gamma}{\dfrac{f}{\cos\gamma} - d_2\sin\gamma} = \dfrac{r_2\sin(\theta - \theta_2)}{r - r_2\cos(\theta - \theta_2)}. \end{cases}$$

Werden nun die vorstehenden Gleichungen (4) und (5) entwickelt und die Variablen entsprechend vereinigt, so gelangen wir zu folgenden drei Doppelgleichungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} r_1 \sin(\alpha_1 - \theta_1)\dfrac{\cos\theta}{r} + r_1\cos(\alpha_1 - \theta_1)\dfrac{\sin\theta}{r} = \sin\alpha_1 \\ r_2 \sin(\alpha_2 - \theta_2)\dfrac{\cos\theta}{r} + r_2\cos(\alpha_2 - \theta_2)\dfrac{\sin\theta}{r} = \sin\alpha_2, \end{cases}$$

weiter:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{f}{\cos^2\gamma} - d_1 \operatorname{tg}\gamma = d_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 \\ \dfrac{f}{\cos^2\gamma} - d_2 \operatorname{tg}\gamma = d_2 \operatorname{cotg}\alpha_2 \end{cases}$$

und endlich:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{f}{\cos^2\gamma}\dfrac{\sin(\theta-\theta_1)}{r} - \dfrac{d_1\sin(\theta-\theta_1)}{r}\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{d_1}{r_1} - d_1\dfrac{\cos(\theta-\theta_1)}{r} \\ \dfrac{f}{\cos^2\gamma}\dfrac{\sin(\theta-\theta_1)}{r} - \dfrac{d_2\sin(\theta-\theta_2)}{r}\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{d_2}{r_2} - d_2\dfrac{\cos(\theta-\theta_2)}{r}. \end{cases}$$

Werden für die folgenden Quotienten neue Unbekannte eingeführt und zwar:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{r} = \xi_1 \\ \dfrac{\cos\theta}{r} = \eta_1 \end{cases}$$

ferner

$$\begin{cases} \dfrac{f}{\cos^2\gamma} = \xi_2 \\ \operatorname{tg}\gamma = \eta_2 \end{cases}$$

gesetzt, so erscheinen die Doppelgleichungen (6), (7) und (8) in der Form:

$$(6')\qquad \begin{cases} r_1\cos(\alpha_1-\theta_1)\,\xi_1 + r_1\sin(\alpha_1-\theta_1)\,\eta_1 = \sin\alpha_1 \\ r_2\cos(\alpha_2-\theta_2)\,\xi_1 + r_2\sin(\alpha_2-\theta_2)\,\eta_1 = \sin\alpha_2, \end{cases}$$

weiter:

$$(7')\qquad \begin{cases} \xi_2 - d_1\eta_2 = d_1\operatorname{cotg}\alpha_1 \\ \xi_2 - d_2\eta_2 = d_2\operatorname{cotg}\alpha_2 \end{cases}$$

und die dritte Doppelgleichung:

$$(8')\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin(\theta-\theta_1)}{r}\xi_2 - d_1\dfrac{\sin(\theta-\theta_1)}{r}\eta_2 = \dfrac{d_1}{r_1} - d_1\dfrac{\cos(\theta-\theta_1)}{r} \\ \dfrac{\sin(\theta-\theta_2)}{r}\xi_2 - d_2\dfrac{\sin(\theta-\theta_2)}{r}\eta_2 = \dfrac{d_2}{r_2} - d_2\dfrac{\cos(\theta-\theta_2)}{r}. \end{cases}$$

Aus (6) folgt das erste Unbekanntenpaar:

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{r_2\sin\alpha_1\sin(\alpha_2-\theta_2) - r_1\sin\alpha_2\sin(\alpha_1-\theta_1)}{r_1 r_2\sin[(\alpha_2-\alpha_1)-(\theta_2-\theta_1)]} \\ \eta_1 = \dfrac{r_1\sin\alpha_2\cos(\alpha_1-\theta_1) - r_2\sin\alpha_1\cos(\alpha_2-\theta_2)}{r_1 r_2\sin[(\alpha_1-\alpha_2)-(\theta_1-\theta_2)]} \end{cases}$$

und für die Polarkoordinaten von P selbst:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\xi_1}{\eta_1} = \dfrac{r_2 \sin\alpha_1 \sin(\alpha_2 - \theta_2) - r_1 \sin\alpha_2 \sin(\alpha_1 - \theta_1)}{r_1 \sin\alpha_2 \cos(\alpha_1 - \theta_1) - r_2 \sin\alpha_1 \cos(\alpha_2 - \theta_2)} \\ r^2 = \dfrac{1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} = \dfrac{r_1^2 \sin^2\alpha_2 + r_2^2 \sin^2\alpha_1 - 2 r_1 r_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{(r_1 r_2)^2 \sin[(\alpha_1 - \alpha_2) - (\theta_1 - \theta_2)]}. \end{cases}$$

Zufolge (7′) lauten die Unbekannten:

$$(10)\quad \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{d_1 d_2 [\operatorname{cotg}\alpha_1 - \operatorname{cotg}\alpha_2]}{d_2 - d_1} = \dfrac{d_1 d_2}{d_2 - d_1} \cdot \dfrac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} \\ \eta_2 = \dfrac{d_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 - d_2 \operatorname{cotg}\alpha_2}{d_2 - d_1}. \end{cases}$$

Die Bildweite f und der Orientierungswinkel γ werden dann sein:

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\gamma = \eta_2 = \dfrac{d_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 - d_2 \operatorname{cotg}\alpha_2}{d_2 - d_1} \\ f = \xi_2 \cos^2\gamma = \dfrac{d_1 d_2}{d_2 - d_1} \cdot \dfrac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} \cos^2\gamma. \end{cases}$$

Die Doppelgleichung (8) und (8′) vereinigt sämtliche geforderten Unbekannten und kann zur Berechnung irgend eines Paares derselben r, θ oder f, γ herangezogen werden, wenn bereits ein Paar hievon bekannt ist. Ist z. B. r und θ aus Gleichung (I) bestimmt worden, so dient zur Berechnung von ξ_2 und η_2 die Gleichung (8′):

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(\theta - \theta_1)}{r} \xi_2 - d_1 \dfrac{\sin(\theta - \theta_1)}{r} \eta_2 = \dfrac{d_1}{r_1} - d_1 \dfrac{\cos(\theta - \theta_1)}{r} \\ \dfrac{\sin(\theta - \theta_2)}{r} \xi_2 - d_2 \dfrac{\sin(\theta - \theta_2)}{r} \eta_2 = \dfrac{d_2}{r_2} - d_2 \dfrac{\cos(\theta - \theta_2)}{r}, \end{cases}$$

und aus Gleichung (II) folgt dann f und γ.

Da nun diese Bestimmung sicherlich verwickelter ist als jene, die sich durch Auflösung der Gleichung (7) für ξ_2 und η_2 bietet, so dürfte sich die Heranziehung der Gleichung (8′) nicht als praktisch erweisen.

Die aufgestellte Doppelgleichung (8′) wird zur Kontrole gute Dienste leisten und zu diesem Zwecke mit Vorteil herangezogen werden können.

Kennt man die Polarkoordinaten nach (I), so sind die rechtwinkligen Koordinaten gegeben durch:

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta. \end{cases}$$

Was die Festlegung des Hauptpunktes bezw. der Vertikallinie, die Überprüfung des Horizontes, Ermittelung der Höhen etc. betrifft, so gilt das, was beim Fünfstrahlenprobleme entwickelt wurde.

2.

Mehrfache Bestimmung.

Dieser Fall tritt dann ein, wenn mehr als 3, z. B. $n+1$ Punkte der Lage nach gegeben vorliegen und die Horizontalwinkel $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ gemessen wurden, sowie auch die Abszissendifferenzen $d_1 d_2 \cdots d_n$.

Es seien $(n+1)$ Punkte durch ihre rechtwinkligen Koordinaten und Höhen:

$$P_0(x_0 y_0 H_0), \quad P_1(x_1, y_1, H_1) \cdots \quad P_n(x_n, y_n, H_n)$$

gegeben; im Standpunkte P seien die Horizontalwinkel: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ mit großer Schärfe gemessen und die Abstände: $d_1, d_2 \cdots d_n$ auf den Photogrammen, bezogen auf den Bildpunkt p_0, ermittelt worden.

Es handelt sich:

a) um die Koordinaten der Station,
b) um die perspektivischen Konstanten der Kamera und
c) um den Orientierungswinkel der Bildebene.

Für die vier Unbekannten: r, θ, f und γ, die auch bei der mehrfachen Bestimmung gesucht werden, lassen sich mit Heranziehung der neuen Variablen: ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 auf Grund der Gleichungen: 1. (6′) und (7′) im ganzen $2n$ Bestimmungsgleichungen aufstellen, wovon $2n-4=2(n-2)$ Gleichungen überschüssig erscheinen; es sind somit die Sätze der Methode der kleinsten Quadrate auf die Bestimmungsgleichungen anwendbar. Aus den zwei Gruppen von Bestimmungsgleichungen, und zwar n für die neu eingeführten Unbekannten ξ_1 und η_1 und ebenso viele für ξ_2 und η_2, lassen sich zwei Gruppen von je zwei Normalgleichungen bilden, die zur Berechnung der wahrscheinlichsten Werte der ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 führen.

Für ξ_1 und η_1 gelten die nach 1, Gleichung (6) gebildeten Bestimmungsgleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} r_1 \cos(\alpha_1-\theta_1)\,\xi_1 + r_1 \sin(\alpha_1-\theta_1)\,\eta_1 = \sin\alpha_1 \\ r_2 \cos(\alpha_2-\theta_2)\,\xi_1 + r_2 \sin(\alpha_2-\theta_2)\,\eta_1 = \sin\alpha_2 \\ \vdots \\ r_n \cos(\alpha_n-\theta_n)\,\xi_1 + r_n \sin(\alpha_n-\theta_n)\,\eta_1 = \sin\alpha_n, \end{cases}$$

woraus die Normalgleichungen folgen:

$$(2)\begin{cases} [r^2\cos^2(\alpha-\theta)]\,\xi_1 + [r^2\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]\,\eta_1 = [r\sin\alpha\cos(\alpha-\theta)] \\ [r^2\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]\,\xi_1 + [r^2\sin^2(\alpha-\theta)]\,\eta_1 = [r\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)] \end{cases}$$

und die neuen Unbekannten selbst:

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{[r^2 \sin^2(\alpha-\theta)]\,[r \sin\alpha \cos(\alpha-\theta)] - [r^2 \sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]\,[r \sin\alpha \sin(\alpha-\theta}{[r^2 \sin^2(\alpha-\theta)]\,[r^2 \cos^2(\alpha-\theta)] - [r^2 \sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]^2} \\[2ex] \eta_1 = \dfrac{[r^2 \cos^2(\alpha-\theta)]\,[r \sin\alpha \sin(\alpha-\theta)] - [r^2 \sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]\,[r \sin\alpha \cos(\alpha-\theta]}{[r^2 \sin^2(\alpha-\theta]\,[r^2 \cos^2(\alpha-\theta)] - [r^2 \sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]}. \end{cases}$$

Die Polarkoordinaten des Standpunktes lauten

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\xi_1}{\eta_1} \\[1ex] r^2 = \dfrac{1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} \end{cases} \\ \text{und weiter die rechtwinkligen Koordinaten:} \\ \begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta\,. \end{cases} \end{cases}$$

Zur Berechnung der Bildweite und des Orientierungswinkels folgen nach 1. Gleichung (7′) die Bestimmungsgleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} \xi_2 - d_1\eta_2 = d_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 \\ \xi_2 - d_2\eta_2 = d_2 \operatorname{cotg}\alpha_2 \\ \quad\vdots \\ \xi_2 - d_n\eta_2 = d_n \operatorname{cotg}\alpha_n\,, \end{cases}$$

welche die Normalgleichungen zu bilden gestatten:

$$(5)\quad \begin{cases} n\xi_2 - [d]\eta_2 = [d \operatorname{cotg}\alpha] \\ -[d]\xi_2 + [dd]\eta_2 = -[dd \operatorname{cotg}\alpha]; \end{cases}$$

die neuen Unbekannten selbst sind dann:

$$(6)\quad \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{[dd][d \operatorname{cotg}\alpha] - [d][dd \operatorname{cotg}\alpha]}{n[dd] - [d]^2} \\[2ex] \eta_2 = \dfrac{[d][d \operatorname{cotg}\alpha] - n[dd \operatorname{cotg}\alpha]}{n[dd] - [d]^2}. \end{cases}$$

Da nun die gesuchten Unbekannten f und γ mit ξ_2 und η_2 in einem sehr einfachen Zusammenhange stehen, so ist:

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\gamma = \eta_2 = \dfrac{[d][d \operatorname{cotg}\alpha] - n[dd \operatorname{cotg}\alpha]}{n[dd] - [d]^2} \\[2ex] f = \xi_2 \cos^2\gamma = \dfrac{[dd][d \operatorname{cotg}\alpha] - [d][dd \operatorname{cotg}\alpha]}{n[dd] - [d]^2}\cos^2\gamma\,. \end{cases}$$

Die Festlegung des Hauptpunktes der Photographie und damit der Vertikallinie erfolgt durch die Abszissen der Bildpunkte $p_0', p_1' \cdots, p_n'$, die sich aus nachstehenden Gleichungen berechnen lassen:

$$
\text{(III)}\qquad \begin{cases} \xi_0 = f \operatorname{tg} \gamma \\ \xi_1 = f \operatorname{tg} (\gamma - \alpha_1) \\ \xi_2 = f \operatorname{tg} (\gamma - \alpha_2) \\ \vdots \\ \xi_n = f \operatorname{tg} (\gamma - \alpha_n), \end{cases}
$$

wobei noch zur Kontrole die Beziehungen bestehen müssen:

$$
(7)\qquad \begin{cases} \xi_0 = \xi_1 + d_1 \\ \xi_0 = \xi_2 + d_2 \\ \vdots \\ \xi_0 = \xi_n + d_n. \end{cases}
$$

Prof. Dr. A. Schell der k. k. technischen Hochschule in Wien hat in Dr. J. M. Eders Handbuch der Photographie I. Bd., 2. Hälfte, 2. Auflage, die Bestimmung der Bildweite f und die Festlegung des Hauptpunktes der Photographie in analoger Weise mit Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gelöst.

Was die Überprüfung und etwaige Bestimmung des Horizontes betrifft, so kann die Untersuchung in ähnlicher Weise geführt werden wie bei dem Probleme der fünf Strahlen.

3.

Genauigkeits-Untersuchungen.

a) *Einfache Bestimmung.*

Neben den rechtwinkligen Koordinaten der gegebenen Punkte treten noch die Winkel: α_1 und α_2, sowie die gemessenen Abszissendifferenzen: d_1 und d_2 in den Ausdrücken für die neuen Unbekannten: ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2, welche die Berechnung von r, θ, f, γ und ξ_0 vermitteln, auf.

Sind die Fehler der gemessenen Gröfsen: $\varDelta d_1$, $\varDelta d_2$ und $\varDelta \alpha_1$, $\varDelta \alpha_2$, so ergeben sich für die mittleren Fehler der neuen Unbekannten ξ_1, η_1, ξ_2 und η_2, die als Funktionen der gemessenen Gröfsen erscheinen, die allgemeinen Ausdrücke:

$$
(1)\qquad \begin{cases} \varDelta \xi_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{d\xi_1}{d\alpha_1}\right)^2 \varDelta \alpha_1^2 + \left(\frac{d\xi_1}{d\alpha_2}\right)^2 \varDelta \alpha_2^2} \\ \varDelta \eta_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{d\eta_1}{d\alpha_1}\right)^2 \varDelta \alpha_1^2 + \left(\frac{d\eta_1}{d\alpha_2}\right)^2 \varDelta \alpha_2^2}, \\ \text{ferner:} \\ \varDelta \xi_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{d\xi_2}{dd_1}\right)^2 \varDelta d_1^2 + \left(\frac{d\xi_2}{dd_2}\right)^2 \varDelta d_2^2 + \left(\frac{d\xi_2}{d\alpha_1}\right)^2 \varDelta \alpha_1^2 + \left(\frac{d\xi_2}{d\alpha_2}\right)^2 \varDelta \alpha_2^2} \\ \varDelta \eta_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{d\eta_2}{dd_1}\right)^2 \varDelta d_1^2 + \left(\frac{d\eta_2}{dd_2}\right)^2 \varDelta d_2^2 + \left(\frac{d\eta_2}{d\alpha_1}\right)^2 \varDelta \alpha_1^2 + \left(\frac{d\eta_2}{d\alpha_2}\right)^2 \varDelta \alpha_2^2}, \end{cases}
$$

für welche die partiellen Differentialquotienten aus Abschnitt II, 1, Gleichung (9) und (10) einfach berechnet werden können.

Sind nun die mittleren Fehler in (1) bestimmt, so kann man zur Ermittelung der mittleren Fehler von r, θ, x, y, f, γ und ξ_0 schreiten.

Da wir nun haben:

$$(2)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\xi_1}{\eta_1} \\ r^2 = \dfrac{1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} \\ f = \xi_2 \cos^2\gamma = \dfrac{\xi_2}{1+\eta_2^2} \\ \operatorname{tg}\gamma = \eta_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta = x_0 + \dfrac{\eta_1}{\xi_1^2+\eta_1^2} \\ y = y_0 + r\sin\theta = y_0 + \dfrac{\xi_1}{\xi_1^2+\eta_1^2}, \end{cases}$$

und die gesuchten Gröſsen als Funktionen der neuen Variablen ξ_1, η_1, ξ_2 und η_2 auftreten, so lassen sich nach den Sätzen der Methode der kleinsten Quadrate die mittleren Fehler unter der Voraussetzung, daſs die neuen Variablen als von einander unabhängig angesehen werden, in nachstehender Weise ausdrücken:

$$(3)\qquad \begin{cases} \varDelta\theta^2 = \cos^4\theta\left[\left(\dfrac{d\operatorname{tg}\theta}{d\xi_1}\right)^2 \varDelta\xi_1^2 + \left(\dfrac{d\operatorname{tg}\theta}{d\eta_1}\right)^2 \varDelta\eta_1^2\right], \\ \varDelta r^2 = \dfrac{1}{(2r)^2}\left[\left(\dfrac{dr^2}{d\xi_1}\right)^2 \varDelta\xi_1^2 + \left(\dfrac{dr^2}{d\eta_1}\right)^2 \varDelta\eta_1^2\right], \\ \varDelta f^2 = \left(\dfrac{df}{d\xi_2}\right)^2 \varDelta\xi_2^2 + \left(\dfrac{df}{d\eta_2}\right)^2 \varDelta\eta_2^2, \\ \varDelta\gamma^2 = \cos^2\gamma\left(\dfrac{d\operatorname{tg}\gamma}{d\eta_2}\right)^2 \varDelta\eta_2^2. \end{cases}$$

Werden nun die partiellen Differentialquotienten der vorstehenden Gleichungen aus (2) abgeleitet, so folgt:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\operatorname{tg}\theta}{d\xi_1}\right) = \dfrac{1}{\eta_1} = \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\xi_1} \\ \left(\dfrac{d\operatorname{tg}\theta}{d\eta_1}\right) = \dfrac{\xi_1}{\eta_1^2} = -\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\eta_1}, \end{cases}$$

ferner:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dr^2}{d\xi_1}\right) = -2r^4\xi_1 \\ \left(\dfrac{dr^2}{d\eta_1}\right)^2 = -2r^4\eta_1, \end{cases}$$

dann:

$$\begin{cases} \left(\frac{df}{d\xi_2}\right) = \cos^2\gamma = \frac{f}{\xi_2} \\ \left(\frac{df}{d\gamma}\right) = -2\xi_2 \cos\gamma \sin\gamma = -\xi_2 \sin 2\gamma \\ \qquad = -2f \operatorname{tg}\alpha = -2f\eta_2 \end{cases}$$

und

$$\left(\frac{d\operatorname{tg}\gamma}{d\xi_2}\right) = 0 \qquad \left(\frac{d\operatorname{tg}\gamma}{d\eta_2}\right) = 1$$

Durch Einsetzen der partiellen Differentialquotienten in (3) ergeben sich die einfachen Ausdrücke für die mittleren Fehler der gesuchten Gröfsen:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \Delta\theta^2 = \frac{r^2\cos^2\theta}{\eta_1^2}[\eta_1^2\Delta\xi_1^2 + \xi_1^2\Delta\eta_1^2] \\ \quad = \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2\left[\left(\frac{\Delta\xi_1}{\xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\eta_1}{\eta_1}\right)^2\right] \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \Delta r^2 = r^6[\xi_1^2\Delta\xi_1^2 + \eta_1^2\Delta\eta_1^2] \\ \quad = r^4[\sin^2\theta\Delta\xi_1^2 + \cos^2\theta\Delta\eta_1^2] \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \Delta f^2 = f^2\left[\left(\frac{\Delta\xi_2}{\xi_2}\right)^2 + 4\eta_2^2\cos^4\gamma\Delta\eta_2^2\right] \\ \quad = \frac{f^2}{\xi_2^2}[\Delta\xi_2^2 + 4f\eta_2^2\Delta\eta_2^2] \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \Delta\gamma^2 = \cos^4\gamma\Delta\eta_2^2 \\ \quad = \left(\frac{f}{\xi_2}\right)^2\Delta\eta_2^2; \end{cases}$$

die relativen Fehler der Längen ergeben sich unmittelbar:

$$\begin{cases} \frac{\Delta r}{r} = \pm r\sqrt{\sin^2\theta\,\Delta\xi_1^2 + \cos^2\theta\,\Delta\eta_1^2]} \\ \frac{\Delta f}{f} = \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta\xi_2}{\xi_2}\right)^2 + 4\eta_2^2\cos^4\gamma\Delta\eta_2^2}. \end{cases}$$

Die mittleren Fehler der rechtwinkligen Koordinaten, der mittleren Punktfehler und der mittleren Fehler der Abszisse für die Festlegung des Hauptpunktes sind durch entsprechende Ausdrücke bestimmbar, wie selbe in I, 3 abgeleitet wurden, nämlich:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} \Delta x^2 = \cos^2\theta\Delta r^2 + r^2\sin^2\theta\Delta\theta^2 \\ \Delta y^2 = \sin^2\theta\Delta r^2 + r^2\cos^2\theta\Delta.\Delta\theta^2 \\ \Delta M^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2 \\ \Delta\xi_0^2 = \pm\xi_0^2\left[\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\gamma}{\frac{\sin 2\gamma}{2}}\right)^2\right]. \end{cases}$$

b. *Mehrfache Bestimmung.*

Bei der mehrfachen Bestimmung werden statt der mittleren Fehler der Unbekannten auf Grund der überschüssigen Anzahl von Gleichungen, die zu ihrer Bestimmung vorliegen, die mittleren Fehler in die Rechnung einzuführen sein.

Die mittleren Fehler der Hilfsgrößen ξ_1, η_1, ξ_2 und η_2 ergeben sich nach Bestimmung der mittleren Fehler der Gewichtseinheiten μ_1 und μ_2, sowie der Gewichtszahlen: G_{ξ_1}, G_{η_1}, G_{ξ_2} und G_{η_2} aus den Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta\xi_1 = \dfrac{\mu_1}{\sqrt{G_{\xi_1}}} = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{(n-2)G_{\xi_1}}} = \mu_1\sqrt{Q'_{11}} \\ \Delta\eta_1 = \dfrac{\mu_1}{\sqrt{G_{\eta_1}}} = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{(n-2)G_{\eta_1}}} = \mu_1\sqrt{Q'_{22}} \\ \Delta\xi_2 = \dfrac{\mu_2}{\sqrt{G_{\xi_2}}} = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{(n-2)G_{\xi_2}}} = \mu_2\sqrt{Q''_{11}} \\ \Delta\eta_2 = \dfrac{\mu_2}{\sqrt{G_{\eta_2}}} = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{(n-2)G_{\eta_2}}} = \mu_2\sqrt{Q''_{22}}. \end{cases}$$

Für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit gilt der Ausdruck:

$$\mu_1 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-2}},$$

worin $[vv]$ die Summe der Fehlerquadrate der Bestimmungsgleichungen II, 2 und $n-2$ ihre überschüssige Anzahl bedeutet.

Zur Ermittelung von G_{ξ_1} und G_{η_1} dienen die Gewichtsgleichungen, die sich unmittelbar aus den Normalgleichungen II, 2 Gl. (2) ergeben, und zwar hat man für G_{ξ_1}:

$$\begin{cases} [r^2\cos^2(\alpha-\theta)]Q'_{11} + [rr\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]Q'_{12} = 1 \\ [rr\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]Q'_{11} + [r^2\sin^2(\alpha-\theta)]Q'_{12} = 0, \end{cases}$$

woraus dieses selbst sich ergiebt mit:

$$(2)\quad Q'_{11} = \frac{1}{G_{\xi_1}} = \frac{[r^2\sin^2(\alpha-\theta)]}{[r^2\sin^2(\alpha-\theta)][r^2\cos^2(\alpha-\theta)] - [r^2\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]^2}.$$

Für die Berechnung von $Q'_{22} = \dfrac{1}{G_{\eta_1}}$ hat man die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} [rr\cos^2(\alpha-\theta)]Q'_{21} + [r^2\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]Q'_{22} = 0 \\ [r^2\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]Q'_{21} + [r^2\sin^2(\alpha-\theta)]Q'_{22} = 1, \end{cases}$$

und für dieses selbst ist:

$$(3)\quad Q'_{22} = \frac{1}{G_{\eta_1}} = \frac{[r^2\cos^2(\alpha-\theta)]}{[r^2\sin^2(\alpha-\theta)][r^2\cos^2(\alpha-\theta)] - [r^2\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]^2}.$$

Die gesuchten mittleren Fehler von ξ_1 und η_1 werden die Form annehmen:

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta\xi_1 = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{(n-2)}\dfrac{[r^2\sin^2(\alpha-\theta)]}{[r^2\sin^2(\alpha-\theta)][r^2\cos^2(\alpha-\theta)]-[r^2\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]^2}} \\ \Delta\eta_1 = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{n-2}\dfrac{[r^2\cos^2(\alpha-\theta)]}{[r^2\sin^2(\alpha-\theta)][r^2\cos^2(\alpha-\theta)]-[r^2\sin^2(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]^2}}. \end{cases}$$

In analoger Weise wird die Gewichtseinheit für die Unbekannten ξ_2 und η_2 erhalten:

$$\mu_2 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-2}},$$

wobei $[vv]$ die Summe der Fehlerquadrate der Bestimmungsgleichungen II, 2 Gl. (4) bedeutet und unter $n-2$ die überschüssige Anzahl derselben verstanden wird.

Zur Berechnung der Gewichtszahlen: G_{ξ_2} und G_{η_2} gelten die aus den Normalgleichungen für ξ_2 und η_2 in II, 2 Gl. (5) leicht aufstellbaren Doppelgleichungen:

$$\begin{cases} nQ''_{11} - [d]Q''_{12} = 1 \\ -[d]Q''_{11} + [dd]Q''_{12} = 0 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} nQ''_{21} - [d]Q''_{22} = 0 \\ -[d]Q''_{21} + [dd]Q''_{22} = 1. \end{cases}$$

Die Gewichtszahlen selbst lauten:

$$(5)\quad \begin{cases} G_{\xi_2} = \dfrac{1}{Q''_{11}} = \dfrac{[dd]}{n[dd]-[d]^2} \\ G_{\eta_2} = \dfrac{1}{Q''_{22}} = \dfrac{n}{n[dd]-[d]^2}. \end{cases}$$

Die mittleren Fehler der Hilfsgröfsen ξ_2 und η_2 können dann geschrieben werden:

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta\xi_2 = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{n-2}\dfrac{n[dd]-[d]^2}{[dd]}} \\ \Delta\eta_2 = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{n-2}\dfrac{n[dd]-[d]^2}{n}}. \end{cases}$$

Durch Einsetzen der mittleren Fehler für ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 in die Gleichungen (I) bis (V) des vorhergehenden Abschnittes erhalten wir die mittleren Fehler der Gröfsen: r, θ, x, y, f, γ und ξ_0.

Von Interesse ist der Zusammenhang, welcher zwischen den mittleren Fehlern von ξ_1 und η_1 einerseits und jenen der rechtwinkligen Koordinaten x und y andererseits besteht. Auch hier wird vorausgesetzt, dafs alle berechneten Fehler als von einander unabhängig angesehen werden.

Die neuen Unbekannten ξ_1 und η_1 sind:

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{\sin\theta}{r} \\ \eta_1 = \frac{\cos\theta}{r} \end{cases}$$

und ihre mittleren Fehler berechnen sich hieraus zu:

$$(8) \qquad \begin{cases} \varDelta\xi_1^2 = \left(\frac{d\xi_1}{dr}\right)^2 \varDelta r^2 + \left(\frac{d\xi_1}{d\theta}\right)^2 \varDelta\theta^2 \\ \varDelta\eta_1^2 = \left(\frac{d\eta_1}{dr}\right)^2 \varDelta r^2 + \left(\frac{d\eta_1}{d\theta}\right)^2 \varDelta\theta^2. \end{cases}$$

Da nun:

$$\begin{cases} \left(\frac{d\xi_1}{dr}\right) = -\frac{\sin\theta}{r^2} = -\frac{\xi_1}{r} \\ \left(\frac{d\xi_1}{d\theta}\right) = \frac{\cos\theta}{r} = \eta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d\eta_1}{dr}\right) = -\frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{\eta_1}{r} \\ \left(\frac{d\eta_1}{d\theta}\right) = -\frac{\sin\theta}{r} = -\xi_1 \end{cases}$$

ist, so geht nach Einführung der Werte Gleichung (8) über in:

$$(9) \qquad \begin{cases} \sin^2\theta\varDelta r^2 + r^2\cos^2\theta\varDelta\theta^2 = r^4\varDelta\xi_1^2 \\ \cos^2\theta\varDelta r^2 + r^2\sin^2\theta\varDelta\theta^2 = r^4\varDelta\eta_1^2. \end{cases}$$

Werden die Gleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$$

entsprechend differentiiert und die mittleren Fehler der Koordinaten aufgestellt, so folgt:

$$\begin{cases} \varDelta x^2 = \left(\frac{dx}{dr}\right)^2 \varDelta r^2 + \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 \varDelta\theta^2 \\ \varDelta y^2 = \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 \varDelta r^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 \varDelta\theta^2. \end{cases}$$

Da nun die partiellen Differentialquotienten hierin sind:

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dr}\right) = \cos\theta = \frac{x - x_0}{r} \\ \left(\frac{dx}{d\theta}\right) = -r\sin\theta = -(y - y_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{dy}{dr}\right) = \sin\theta = \frac{y - y_0}{r} \\ \left(\frac{dy}{d\theta}\right) = r\cos\theta = (x - x_0) \end{cases}$$

so folgt:

$$(10) \qquad \begin{cases} \varDelta x^2 = \cos^2\theta \varDelta r^2 + r^2 \sin^2\theta \varDelta \theta^2 \\ \varDelta y^2 = \sin^2\theta \varDelta r^2 + r^2 \cos^2\theta \varDelta \theta^2 . \end{cases}$$

Durch Vergleichung der Ausdrücke (9) und (10) ergiebt sich die bemerkenswerte Beziehung:

$$(11) \qquad \begin{cases} \varDelta x^2 = r^4 \varDelta \eta_1^2 \\ \varDelta y^2 = r^4 \varDelta \xi_1^2 , \end{cases}$$

durch deren Verwertung der mittlere Punktfehler die Form annimmt:

$$(12) \qquad M^2 = \varDelta x^2 + \varDelta y^2 = r^4 (\varDelta \xi_1^2 + \varDelta \eta_1^2)$$

oder nach Heranziehung der Gleichung (4) auch:

$$(13) \qquad M^2 = \frac{[vv]}{n-2} \frac{[rr]}{[r^2 \sin^2(\alpha - \theta)][r^2 \cos^2(\alpha - \theta)] - [r^2 \sin(\alpha - \theta)\cos(\alpha - \theta)]^2}$$

Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate hat bei dem benutzten Achsensystem die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P ergeben mit:

$$\begin{cases} x \pm \varDelta x \\ y \pm \varDelta y , \end{cases}$$

wobei $\pm \varDelta x$ und $\pm \varDelta y$ die mittleren Fehler der Koordinaten darstellen. Der mittlere Punktfehler

$$M^2 = \varDelta x^2 + \varDelta y^2$$

ist, wie (12) und (13) lehren, invariant und vom Koordinatensystem vollends unabhängig; es ist daher klar, daſs bei Annahme zweier anderen Koordinatenrichtungen sich zwei andere mittlere Fehler hätten ergeben müssen, der mittlere Punktfehler aber konstant bleiben müſste.

Denkt man sich nun das Koordinatensystem allmählich in verschiedene Lagen gebracht, die zugehörigen mittleren Fehler entsprechend verzeichnet, so werden dieselben auf einer Kurve sich befinden, die als Kurve der mittleren Fehler bezeichnet wird.

Sämtliche mittleren Koordinatenfehler erfüllen die Bedingung, daſs die Summe der mittleren Fehlerquadrate:

$$\varDelta x_1^2 + \varDelta y_1^2 = \varDelta x_2^2 + \varDelta y_2^2 = \ldots = \varDelta x^2 + \varDelta y^2 = M^2,$$

dem Quadrate des mittleren Fehlers gleich ist, d. h. im Bilde müssen die Abstände der zu den mittleren Fehlern gehörigen Achsenpunkte, welche mit dem Punkte $P(x, y)$ ein rechtwinkliges Dreieck bestimmen, einander gleich sein.

Zwei ausgezeichnete Werte dieser mittleren Fehler, deren Extreme, bilden die Halbachsen der Fehlerellipse und zwar:

Die grofse Halbachse A entspricht dem Maximum,

die kleine Halbachse B entspricht dem Minimum des mittleren wahrscheinlichen Fehlers.

Nennen wir das Azimut der grofsen Achse der Fehlerellipse φ, so hat man nach der Theorie der Fehlerellipse:

$$(14)\quad \begin{cases} A^2 = \dfrac{[aa]+[bb]+W}{[aa][bb]-[ab]^2}\cdot\dfrac{\mu_1}{2} \\ B^2 = \dfrac{[aa]+[bb]-W}{[aa][bb]-[ab]^2}\cdot\dfrac{\mu_1}{2} \\ \operatorname{tg}2\varphi = \dfrac{-2[ab]}{a[a]-[bb]} \\ M^2 = A^2+B^2, \end{cases}$$

wobei

$$W = \frac{-2[ab]}{\sin 2\varphi} = \frac{[aa]-[bb]}{\cos 2\varphi}$$

darstellt.

Die nach Gaufs bezeichneten Summen haben in Bezug auf die Normalgleichungen II, 2 Gl. (2) die Werte:

$$(15)\quad \begin{cases} [aa] = [r^2\cos^2(\alpha-\theta)] : r^4 \\ [ab] = [r^2\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)] : r^4 \\ [bb] = [r^2\sin^2(\alpha-\theta)] : r^4. \end{cases}$$

Denkt man sich das rechtwinklige Koordinatensystem jetzt gegen das System der Fehlerellipse um den Winkel ψ gedreht, so ergiebt sich:

$$A^2\cos^2\psi + B^2\sin^2\psi = R_1^2,$$

und weiter statt ψ gesetzt $\psi + 90^0$, so folgt:

$$A^2\sin^2\psi + B^2\cos^2\psi = R_2^2.$$

Beide Gleichungen erfüllen die Bedingung:

$$A^2 + B^2 = R_1^2 + R_2^2 = M^2,$$

also liegen die so erhaltenen Punkte auf der Kurve der mittleren Fehler.

Die Gleichung:

$$A^2\cos^2\psi + B^2\sin^2\psi = R_1^2$$

stellt die Polargleichung der Kurve der mittleren Fehler dar, wobei die grofse Halbachse der Ellipse als Polarachse und der Winkel ψ als Richtungswinkel auftritt. Auch wäre es nicht schwer darzuthun, dafs die vorstehende Gleichung die Fufspunktskurve der Fehlerellipse darstellt, nämlich den geometrischen Ort der Fufspunkte der vom Ellipsenzentrum auf die Tangenten der Fehlerellipse gefällten Lote.

Unter der Voraussetzung, daſs die schöne Beziehung (11) besteht, erhält man zwar richtige Dimensionen der Fehlerellipse, da $\varDelta x^2 + \varDelta y^2$ konstant bleibt, doch weicht das Azimut φ der groſsen Achse vom richtigen ab.

In diesen behandelten Genauigkeitsuntersuchungen wurde die Abhängigkeit der eingeführten Unbekannten ξ_1, η_1 und ξ_2 und η_2, als deren Funktionen die zu bestimmenden Gröſsen:

$$(16)\qquad \begin{cases} \theta = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\xi_1}{\eta_1} \\ r = \dfrac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} \\ x = x_0 + \dfrac{\eta_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} \\ y = y_0 + \dfrac{\xi_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} \\ \gamma = \operatorname{arc\,tg} \eta_2 \\ f = \xi_2 \cos^2 \gamma \\ \xi_0 = f \operatorname{tg} \gamma \end{cases}$$

zu betrachten sind, nicht berücksichtigt. Dadurch haben sich nur Näherungswerte für die mittleren Fehler der gesuchten Unbekannten ergeben, welche gewisser Korrektionen bedürfen, um die wirklichen mittleren Fehler zu geben.

Indem wir in ähnlicher Weise wie bei I, 3, *b* Gleichungen 9—17 vorgehen, erhalten wir schlieſslich für die mittleren Fehler der Unbekannten:

$$(17)\qquad \begin{cases} \varDelta\theta = \pm \dfrac{\sin 2\theta}{2} \sqrt{\left(\dfrac{\varDelta \xi_1}{\xi_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\varDelta \eta_1}{\eta_1}\right)^2 - \dfrac{2}{\xi_1 \eta_1} 2 \mu_1^2 Q'_{12}} \\ \varDelta r = \pm r^3 \sqrt{(\xi_1 \varDelta \xi_1)^2 + (\eta_1 \varDelta \eta_1)^2 + 2 \xi_1 \eta_1 \mu_1^2 Q'_{12}} \\ \varDelta x = \pm 2 \cdot \xi_1^2 \operatorname{tg} \theta \sqrt{(\varDelta \xi_1)^2 + \left(\dfrac{\varDelta \eta_1}{\operatorname{tg} 2\theta}\right)^2 + \dfrac{2 \mu_1^2}{\operatorname{tg} 2\theta} Q'_{12}} \\ \varDelta y = \pm 2 \eta_1^2 \operatorname{ctg} \theta \sqrt{\left(\dfrac{\varDelta \xi_1}{\operatorname{tg} 2\theta}\right)^2 + \varDelta \eta_1^2 - \dfrac{2 \mu_1^2}{\operatorname{tg} 2\theta} Q'_{12}} \\ \varDelta \gamma = \pm \cos^2 \gamma \cdot \varDelta \eta_2 \\ \varDelta f = \pm f \sqrt{\left(\dfrac{\varDelta \xi_2}{\xi_2}\right)^2 + (2 \cos^2 \gamma \eta_2 \varDelta \eta_2)^2 - \dfrac{4 \cos^2 \gamma \eta_2}{\xi_2} \mu_2^2 Q''_{12}} \\ \varDelta \xi_0 = \pm \xi_0 \sqrt{\left(\dfrac{\varDelta \xi_2}{\xi_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\varDelta \eta_2}{\eta_2} \dfrac{1 - \eta_2}{1 + \eta_2}\right)^2 + \dfrac{2 \mu_2^2}{\eta_2 \xi_2} \dfrac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} Q''_{12}} \end{cases}$$

* * *

Um auch von der Genauigkeit der Höhenverhältnisse eine Vorstellung zu erhalten, führen wir nachstehende Untersuchung aus.

Angenommen, die Abstände der einzelnen Punkte vom Standpunkte $\varrho_0 = r$, ϱ_1, $\varrho_2 \ldots$ seien auf Grund der Gleichungen I 1, Gl. (19) bekannt, die Ordinaten y_0, $y_1 \ldots$ gemessen und es sei die Frage nach der Genauigkeit der Höhen der fixierten Punkte.

Die Höhe eines Punktes erscheint allgemein in der Form:

$$H_n = H + \frac{\varrho y}{f} \cos(\gamma - \alpha). \tag{18}$$

Wird hierin die Höhe des Instrumenthorizontes H als fehlerfrei angesehen, während die anderen Gröfsen, als deren Funktion H erscheint, mit gewissen Fehlern Δy, $\Delta \varrho$, Δf, $\Delta \gamma$ und $\Delta \alpha$ behaftet sind, so ergiebt sich nach den Sätzen der Methode der kleinsten Quadrate für den mittleren Fehler in der Höhe H der Ausdruck:

$$\Delta H_n^2 = \left(\frac{dH_n}{d\varrho}\right)^2 \Delta\varrho^2 + \left(\frac{dH_n}{dy}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{dH_n}{df}\right)^2 \Delta f^2 + \left(\frac{dH_n}{d\gamma}\right)^2 \Delta\gamma^2 + \left(\frac{dH_n}{d\alpha}\right)^2 \Delta\alpha^2.$$

Werden die partiellen Differentialquotienten:

$$\begin{cases} \left(\frac{dH_n}{d\varrho}\right) = \frac{y}{f}\cos(\gamma-\alpha) & = \frac{H_n - H}{\varrho} \\ \left(\frac{dH_n}{dy}\right) = \frac{\varrho}{f}\cos(\gamma-\alpha) & = \frac{H_n - H}{y} \\ \left(\frac{dH_n}{df}\right) = -\frac{y\varrho}{f^2}\cos(\gamma-\alpha) & = -\frac{H_n - H}{f} \\ \left(\frac{dH_n}{d\alpha}\right) = \frac{y\varrho}{f}\sin(\gamma-\alpha) & = \frac{H_n - H}{\operatorname{cotg}(\gamma-\alpha)} \\ \left(\frac{dH_n}{d\gamma}\right) = -\frac{y\varrho}{f}\sin(\gamma-\alpha) & = -\frac{H_n - H}{\operatorname{cotg}(\gamma-\alpha)} \end{cases}$$

berechnet und in die Gleichung eingeführt, so erhalten wir:

$$\Delta H^2 = (H_n - H)^2\left[\left(\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\alpha}{\operatorname{cotg}(\gamma-\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\gamma}{\operatorname{cotg}(\gamma-\alpha)}\right)^2\right] \tag{19}$$

und hieraus den relativen Fehler in der Höhe:

$$\frac{\Delta H_n}{H_n - H} = \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\alpha}{\operatorname{cotg}(\gamma-\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\gamma}{\operatorname{cotg}(\gamma-\alpha)}\right)^2}. \tag{20}$$

4.

Beispiel.

Gelegentlich der photographischen Aufnahme zum Zwecke der Behandlung des Fünfstrahlen-Problems wurden auch die Horizontalwinkel α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_5$, welche die Strahlen von dem Standpunkte nach

den einzelnen Punkten mit einander einschliefsen, mit einem Theodolite gemessen; dadurch bietet sich auch Gelegenheit, das Dreistrahlenproblem in einem besonderen Falle vorführen zu können.

Die gemessenen Horizontalwinkel sind in nachstehendem Protokolle verzeichnet.

Winkel				Anmerkung
Name	Gröfse			
	°	′	″	
α_1	1	26	17	Die Winkel beziehen sich auf St. Michael als Null-Richtung.
α_2	11	37	29	
α_3	24	2	20	
α_4	36	47	31	
α_5	37	57	59	

Die erforderlichen Koordinaten der gegebenen Punkte, die gemessenen Abszissendifferenzen d und alle weiteren zur Aufstellung der für das Dreistrahlenproblem nötigen Daten für die Bestimmungs- und Normalgleichungen finden sich in der Tabelle II (S. 76).

Auf Grund der in der nachstehenden Tabelle II zusammengestellten Daten der Kolonnen 18, 19 und 21 können nachfolgende Bestimmungsgleichungen für ξ_1 und η_1 angesetzt werden:

$$(1)\quad \begin{cases} 279\cdot175\,\xi_1 - 70\cdot827\,\eta_1 = 0\cdot025\ 096, \\ 201\cdot076\,\xi_1 - 180\cdot863\,\eta_1 = 0\cdot201\ 500, \\ 209\cdot990\,\xi_1 - 395\cdot991\,\eta_1 = 0\cdot407\ 355, \\ 175\cdot388\,\xi_1 - 603\cdot743\,\eta_1 = 0\cdot598\ 913, \\ 567\cdot586\,\xi_1 - 558\cdot625\,\eta_1 = 0\cdot615\ 200, \end{cases}$$

welche nachstehende zwei Normalgleichungen geben, deren Koeffizienten aus den Kolonnen 27, 28, 29, 30 und 31 entnommen werden, nämlich:

$$(2)\quad \begin{cases} 515\cdot365\,\xi_1 - 522\cdot678\,\eta_1 = 573\cdot252, \\ -522\cdot678\,\xi_1 + 871\cdot103\,\eta_1 = -904\cdot807. \end{cases}$$

Die Unbekannten werden lauten:

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_1 = +1\cdot5044\cdot10^{-4}, \\ \eta_1 = -9\cdot4843\cdot10^{-4}. \end{cases}$$

Für die Polarkoordinaten ergiebt sich dann:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} r = \dfrac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}} = 1041\cdot330 \text{ m}, \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\xi_1}{\eta_1} \text{ oder } \theta = 170^0\ 59'\ 12''. \end{cases}$$

Tabelle II.

1			2		3		4	5	6	7	8	9
Punkt			Koordinaten		Gemessene Gröfsen							
No.	Bezeichnung	Name	x	y	d	$\sphericalangle \alpha$	$x-x_0$	$y-y_0$	$\log(x-x_0)$	$\log(y-y_0)$	$\log \mathrm{tg}\, \theta$	θ
			m	m	m	° ′ ″						° ′ ″
1	P_0	St. Michael	− 30·592	− 447·179		0 0 0						
2	P_1	Augustiner	− 311·459	− 388·379	0·00 652	1 26 17	− 280·867	+ 63·800	2·44 850_1 *n*	1·80 482	9·35 631_9 *n*	167 12 8
3	P_2	St. Peter	+ 129·917	− 229·508	0·05 087	11 37 29	+ 160·509	+ 217·671	2·20 550_2	2·33 780_2	0·13 230	53 35 42
4	P_3	St. Stefan	0·000	0·000	0·10 368	24 2 20	+ 30·592	+ 447·179	1·48 560_8	2·65 047_9	1·16 487_1	86 5 11
5	P_4	Franziskaner	− 251·773	+ 141·315	0·16 166	36 47 31	− 221·181	+ 588·494	2·34 475_2 *n*	2·76 974_5	0·42 499_3 *n*	110 35 55
6	P_6	Universität	+ 73·322	+ 342·487	0·16 740	37 57 59	+ 103·914	+ 789·666	2·01 667_7	2·89 744_3	0·88 076_6	82 30 12

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\log \sin \theta$	$\log \cos \theta$	$\alpha-\theta$	$\log \sin(\alpha-\theta)$	$\log \cos(\alpha-\theta)$	$\log r$	$\log r \sin(\alpha-\theta)$	$\log r \cos(\alpha-\theta)$	$r \sin(\alpha-\theta)$	$r \cos(\alpha-\theta)$	$\log \sin \alpha$	α	$\log r^2 \sin^2(\alpha-\theta)$
		° ′ ″										
9·34 540	9·98 907	194 14 9	9·39 078 *n*	9·98 646 *n*	2·45 942	1·85 020 *n*	2·44 588	279·175	− 70·827	8·39 960	0·02 509_6	3·70 040
9·90 571	9·77 341	318 1 47	9·82 526	9·87 127	2·48 209	2·25 735 *n*	2·30 336	201·076	− 180·863	9·30 428	0·20 150_0	4·51 470
9·99 898	8·83 412	297 56 9	9·94 619 *n*	9·67 070	2·65 150	2·59 769 *n*	2·32 220	209·990	− 395·991	9·60 997	0·40 735_5	5·19 538
9·97 130	9·54 632	286 11 36	9·98 241 *n*	9·44 546	2·79 844	2·78 085 *n*	2·24 390	175·388	− 603·743	9·77 736	0·59 891_3	5·56 170
9·99 627	9·11 551	315 27 47	9·84 595 *n*	9·85 286	2·90 117	2·74 712 *n*	2·75 403	567·586	− 558·625	9·78 902	0·61 520_0	5·49 424

23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$\log r^2 \cos^2(\alpha-\theta)$	$\log r^2 \sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)$	$\log r \cos\alpha \cos(\alpha-\theta)$	$\log r \sin\alpha \sin(\alpha-\theta)$	$r^2 \sin^2(\alpha-\theta)$	$r^2 \cos^2(\alpha-\theta)$	$r^2 \sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)$	$r \sin\alpha \sin(\alpha-\theta)$	$r \cos\alpha \cos(\alpha-\theta)$	v	vv
4·89 176	4·29 608 *n*	0·24 980 *n*	0·84 548	5016·50	77 940	− 19 773·2	− 1·77 746	− 7·00 617	− 0·000 391	152 $9 \cdot 10^{-10}$
4·60 672	4·56 071 *n*	1·56 163 *n*	1·60 764	82 711·5	40 432	− 86 367·5	− 36·44 42	+ 40·51 77	+ 0·000 880	774 $4 \cdot 10^{-10}$
4·64 440	4·91 989 *n*	2·20 766 *n*	1·98 217	156 811	44 096	− 83 156	− 161·38 8	+ 85·54 00	+ 0·001 268	1 607 $8 \cdot 10^{-10}$
4·48 780	5·02 475 *n*	2·55 821 *n*	2·02 126	364 500	80 747	− 105 864	− 361·58 3	+ 105·01 7	+ 0·001 705	2 907 $0 \cdot 10^{-10}$
5·50 806	5·50 115 *n*	2·53 614 *n*	2·54 305	812 064	322 150	− 317 064	− 344·66 9	+ 349·18 3	+ 0·001 664	2 768 $9 \cdot 10^{-10}$
				871 108	515 865	− 522 678	− 904·80 66	578·25 2		
				$[r^2 \sin^2(\alpha-\theta)]$	$[r^2 \cos^2(\alpha-\theta)]$	$[r^2 \sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)]$	$[r \sin\alpha \sin(\alpha-\theta)]$	$[r \sin\alpha \cos(\alpha-\theta)]$		

Um die mittleren Fehler von ξ_1 und η_1, d. i.:

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta\xi_1 = \mu_1\sqrt{Q'_{11}} = \dfrac{\mu_1}{\sqrt{G_{\xi_1}}}, \\ \Delta\eta_1 = \mu_1\sqrt{Q'_{22}} = \dfrac{\mu_1}{\sqrt{G_{\eta_1}}}, \end{cases}$$

zu erhalten, berechnet man vorerst den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, der sich nach Entnahme der Quadrate der Verbesserungen aus Kolonne 33 der Tabelle II ergiebt mit:

$$(5)\quad \mu_1 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} = 1654 \cdot 10^{-6}.$$

Zur Ermittelung der Gewichtszahlen G_{ξ_1} und G_{η_1} dienen die Gewichtsgleichungen, die sich aus den Normalgleichungen in bekannter Weise ergeben; sie lauten:

$$\begin{cases} 515 \cdot 365\, Q'_{11} - 522 \cdot 678\, Q'_{12} = 1, \\ -522 \cdot 622\, Q'_{11} + 871 \cdot 103\, Q'_{12} = 0 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} 515 \cdot 365\, Q'_{21} - 522 \cdot 678\, Q'_{22} = 0, \\ -522 \cdot 622\, Q'_{21} + 871 \cdot 103\, Q'_{22} = 1, \end{cases}$$

aus welchen die Gewichtszahlen sich ergeben mit:

$$(6)\quad \begin{cases} G_{\xi_1} = \dfrac{1}{Q'_{11}} = 201{\cdot}748, \\ G_{\eta_1} = \dfrac{1}{Q'_{22}} = 341{\cdot}008. \end{cases}$$

Die gesuchten mittleren Fehler der neuen Unbekannten werden dann:

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta\xi_1 = \dfrac{\mu_1}{\sqrt{G_{\xi_1}}} = \pm\, 3{\cdot}683.10^{-5}, \\ \Delta\eta_1 = \dfrac{\mu_1}{\sqrt{G_{\eta_1}}} = \pm\, 2{\cdot}833.10^{-5}. \end{cases}$$

Die mittleren Fehler der Polarkoordinaten lassen sich aus den abgeleiteten Ausdrücken:

$$\begin{cases} \Delta r = \pm\, r\sqrt{(\xi_1\Delta\xi_1)^2 + (\eta_1\Delta\eta_1)^2 + 2\xi_1\eta_1\mu_1^2 \cdot Q'_{12}}, \\ \Delta\theta = \pm\, \dfrac{\sin 2\theta}{2}\sqrt{\left(\dfrac{\Delta\xi_1}{\xi_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta\eta_1}{\eta_1}\right)^2 - \dfrac{2\mu_1^2}{\xi_1\eta_1} \cdot Q'_{12}} \end{cases}$$

berechnen; es ergiebt sich:

$$(\text{II})\quad \begin{cases} \Delta r = \pm\, 2{\cdot}58 \text{ m}, \\ \Delta\theta = \pm\, 14'\, 18'' \end{cases}$$

Der relative Fehler des Radiusvektors wird sein:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{404} \text{ oder } 0{\cdot}25\,\%.$$

Die rechtwinkligen Koordinaten des Standpunktes:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$$

ergeben sich mit:

(II) $$\begin{cases} x = -\ 1059{\cdot}09 \text{ m}, \\ y = -\ \ 284{\cdot}04 \text{ m}. \end{cases}$$

Ihre mittleren Fehler werden:

(II′) $$\begin{cases} \Delta x = \pm\, 3{\cdot}123 \text{ m}, \\ \Delta y = \pm\, 3{\cdot}955 \text{ m}, \end{cases}$$

und der mittlere Punktfehler:

(III) $$M = \pm\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \pm\, 5{\cdot}04 \text{ m}.$$

Um die Kurve der mittleren Fehler und die Fehlerellipse für den durch das Dreistrahlenproblem festgelegten Punkt graphisch darstellen zu können, wurden vorerst berechnet:

(8) $$\begin{cases} [aa] = +\dfrac{515\cdot 365}{r^4} \\ [ab] = -\dfrac{522\cdot 678}{r^4} \\ [bb] = +\dfrac{871\cdot 103}{r^4}, \\ \mu_1 = \pm\, 1{\cdot}654.10^{-6}, \\ W = \dfrac{1,\ 104\cdot 231}{r^4}, \\ \operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{+\,522\cdot 678\cdot 2}{-\,355\cdot 738}, \end{cases}$$

woraus sich nach den allgemeinen Formeln die Bestimmungsstücke für die Fehlerellipse ergeben:

(IV) $$\begin{cases} A = 4\cdot 775 \text{ m}, \\ B = 1\cdot 608 \text{ m}, \\ \varphi = 54^0\ 23'\ 48''. \end{cases}$$

Die Polargleichung für die Kurve der mittleren Fehler lautet dann:

(V) $$4\cdot 775^2 \cos^2\psi + 1\cdot 608^2 \sin^2\psi = R_1^2.$$

Der mittlere Punktfehler wird:

$$M^2 = A^2 + B^2 = 25 \cdot 38\ 09\ \text{m}^2$$

oder

$$M = \pm 5 \cdot 04\ \text{m}.$$

Auf Tafel I, Fig. 3 sind die Verhältnisse im Maſsstabe 1 : 75 graphisch zur Darstellung gebracht.

Die Fehlerellipse ist kräftig eingetragen und durch die Endpunkte ihrer Achsen: H, F, G, H, sowie durch den Winkel φ besonders hervorgehoben.

Die Kurve der mittleren Fehler wurde kräftig gestrichelt eingezeichnet; die Punkte A, B, C, D, in welchen die Kurve die Koordinatenachsen schneidet, entsprechen den mittleren Koordinatenfehlern: $\pm \Delta x$ und $\pm \Delta y$.

Die vier Punkte: J, K, L und M sind die auf Grund der Polargleichung für einen gewählten Winkel ψ resp. $\psi + 90^0$ zusammengehörigen Kurvenpunkte.

Tabelle III.

1			2		3				
Punkt			Gemessene Gröſsen		Logarithmen				
No.	Bezeichnung	Name	$\sphericalangle \alpha$	d	d	cotg α	d cotg α	d^2	d^2 cotg α
			0	mm					
1	P_0	St. Michael	$0{\cdot}00_0$	0·00					
2	P_1	St. Augustin	$1{\cdot}46_5$	6·52	0·81 425	1·60 042	2·41 467	1·62 850	3·22 892
3	P_2	St. Peter	$11{\cdot}59_0$	50·87	1·70 646	0·68 672	2·39 318	3·41 292	4·09 964
4	P_3	St. Stefan	$23{\cdot}94_8$	103·68	2·01 570	0·35 063	2·36 633	4·03 139	4·38 203
5	P_4	Franziskaner	$36{\cdot}67_5$	161·66	2·20 860	0·12 617	2·33 477	4·41 720	4·54 337
6	P_6	Universität	$37{\cdot}84_5$	167·40	2·22 376	0·10 771	2·33 147	4·44 752	4·55 523

4				5	6
Koeffizienten der Bestimmungs- und Normalgleichungen				v	vv
d	d cotg α	d^2	d^2 cotg α		
6·52	259·818	42·51	1 694·04	— 0·025	0·00 06 25
50·87	247·276	25 87·75	12 578·8	+ 0·039	15 21
103·68	232·450	10 749·31	24 100·6	+ 0·006	36
161·66	216·157	26 133·53	34 943·8	— 0·014	1 96
167·40	214·520	28 023·33	35 910·8	+ 0·008	64
490·13 $[d]$	1170·225 $[d \cot \alpha]$	67 536·63 $[d^2]$	109 228·0 $[d^2 \cot \alpha]$		0·00 24 42 $[vv]$

Die Bestimmungsgleichungen für ξ_2 und η_2 lassen sich mit Zuhilfenahme der Daten der Kolonne (4) sofort aufstellen. Sie lauten:

$$(9)\quad \begin{cases} \xi_2 - 6.52\,\eta_2 = 259.818 \\ \xi_2 - 50.87\,\eta_2 = 247.276 \\ \xi_2 - 103.68\,\eta_2 = 232.450 \\ \xi_2 - 161.66\,\eta_2 = 216.157 \\ \xi_2 - 167.40\,\eta_2 = 214.520 \end{cases}$$

Die Normalgleichungen, für welche die Koeffizienten der Unbekannten ξ_2 und η_2 aus der Kolonne (4) der vorstehenden Tabelle sich ergeben, sind:

$$(10)\quad \begin{cases} 5\,\xi_2 - 490.13\,\eta_2 = 1170.2, \\ -490.13\,\xi_2 + 67537\,\eta_2 = -109228. \end{cases}$$

Die Unbekannten folgen hieraus mit:

$$(11)\quad \begin{cases} \xi_2 = 261.627, \\ \eta_2 = 0.281\ 36. \end{cases}$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird:

$$(12)\quad \mu_2 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} = \sqrt{\frac{0.00\ 24\ 42}{3}} = \pm\sqrt{0.00\ 0814} = \pm\,0.02\ 853.$$

Die Gewichtsgleichungen lauten:

$$\begin{cases} 5\,Q''_{11} - 490.13\,Q''_{12} = 1, \\ 490.13\,Q''_{11} - 67.536.63\,Q''_{12} = 0, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} 5\,Q''_{21} - 490.13\,Q''_{22} = 0, \\ 490.13\,Q''_{21} - 67.536.63\,Q''_{22} = 1, \end{cases}$$

woraus sich ergiebt:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{Q''_{11}} = G_{\xi_2} = 1.44\ 301, \\ \dfrac{1}{Q''_{22}} = G_{\eta_2} = 19.491, \end{cases}$$

und schliefslich die mittleren Fehler:

$$(14)\quad \begin{cases} \Delta\xi_2 = \dfrac{\mu_2}{\sqrt{G_{\xi_2}}} = 0.023\ 749, \\ \Delta\eta_2 = \dfrac{\mu_2}{\sqrt{G_{\eta_2}}} = 0.000\ 205. \end{cases}$$

Die Bildweite und der Orientierungswinkel der Bildebene werden:

$$(\mathrm{VI})\quad \begin{cases} f = \xi_2 \cos^2\gamma = 242.44 \text{ mm}. \\ \operatorname{tg}\gamma = \eta_2 \qquad = 0.28\ 135_9 \\ \qquad\text{oder} \\ \gamma = 15^\circ\ 42'\ 51'' \end{cases}$$

Die mittleren Fehler von γ und f werden aus den Gleichungen berechnet:

$$\begin{cases} \Delta\gamma^2 = \cos^4\gamma\, \Delta\eta_2^2, \\ \Delta f^2 = f^2\left[\left(\frac{\Delta\xi_2}{\xi_2}\right)^2 + (2\cos^2\alpha\eta_2\,\Delta\eta_2)^2 - \frac{4\cos^2\alpha\eta_2\mu_2^2}{\xi_2}\cdot Q''_{12}\right], \end{cases}$$

welche nach ausgeführter Substitution geben:

$$\text{(VI')} \qquad \begin{cases} \Delta\gamma'' = \pm\, 39\cdot 2'', \\ \Delta f = \pm\, 0\cdot 044 \text{ mm}. \end{cases}$$

Der relative Fehler der Bildweite ist ein sehr geringer:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{0\cdot 044}{242\cdot 44} = \frac{1}{5\cdot 462}.$$

Die Vertikallinie bezw. der Hauptpunkt wird festgelegt durch seine Abszisse:

$$\xi_0 = f \operatorname{tg}\gamma = 68\cdot 2 \text{ mm},$$

welche mit einem mittleren Fehler behaftet ist:

$$\text{(VII)} \qquad \Delta\xi_0 = \pm\, 0\cdot 047 \text{ mm}$$

und einem relativen Fehler:

$$\frac{\Delta\xi_0}{\xi_0} = \frac{0\cdot 48}{68\cdot 21} = \frac{1}{1\cdot 430} \text{ oder } 0\cdot 07\,\%.$$

Um den angenommenen Horizont zu überprüfen und nötigenfalls berichtigen zu können, wurden an den Photogrammen Messungen und Berechnungen ausgeführt, die sich in der Tabelle IV (S. 82) zusammengestellt vorfinden.

Vorerst wurden die Ordinaten gerechnet nach der Formel:

$$y_n = \frac{(H_n - H)f}{\varrho_n \cos(\gamma - \alpha_n)}$$

und neben den direkt gemessenen in der Kolonne (2) angesetzt; diese Werte hätten sich auch bei der Messung auf dem Photogramme ergeben müssen, wenn die Horizontlinie richtig angenommen worden wäre.

Der Vergleich der gemessenen und gerechneten Ordinaten zeigt, dafs der angenommene Horizont mit der wahrscheinlichen Lage desselben sich nicht deckt, denn sonst müfsten die Ordinatendifferenzen Null sein. Ihr innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen liegender Betrag, sowie das überall negative Zeichen desselben lehrt, dafs der Horizont auf der Platte zu hoch angenommen wurde und zwar um die lineare Gröfse:

$$\frac{[\Delta y]}{n} = 0\cdot 712 \text{ mm}.$$

Tabelle IV.

1		2		3	4	5				
No.	Punkt	Ordinate		Δy	Verbesserte Ordinaten	Logarithmen				
		gerechnet	gemessen			Verbesserte Ordinaten	ϱ	$\cos(\gamma - \alpha_n)$	f	$H - h$
		mm	mm	mm	mm					
1	P_0	12·60	13·44	— 0·84	$12{\cdot}72_8$	$1{\cdot}10\ 476_2$	3·01 763	9·98 351		$1{\cdot}72\ 130_2$
2	P_1	14·15	14·89	— 0·74	$14{\cdot}17_8$	$1{\cdot}15\ 161_8$	2·87 754	9·98 644		$1{\cdot}63\ 099_8$
3	P_2		7·72		$7{\cdot}00_8$	0·84 559	3·07 569	9·99 891	2·38 460	1·53 559
4	P_3	24·51	$25{\cdot}11_5$	— 0·61	$24{\cdot}40_3$	$1{\cdot}38\ 544_4$	3·04 005	9·99 539		$2{\cdot}03\ 628_4$
5	P_4	8·45	9·07	— 0·62	$8{\cdot}35_8$	0·92 210	2·96 028	9·96 985		1·46 763
6	P_5	6·34	7·09	— 0·75	$6{\cdot}37_8$	0·80 468	3·11 202	9·96 632		1·49 842
				$\frac{[\Delta y]}{n} = -0{\cdot}712$						

6	7	8		9		10	11
Berechnete Höhe	Korrektionen wegen Refraktion und Erhebung des scheinb. Horizontes	Absolute Höhe[1]) α		Relative Höhe		ΔH	Anmerkung
		der Fixpunkte	und des Standpunktes	gegeben wahr.	gerechnet		
m	m	m	m	m			
$52{\cdot}63_8$	— 0·068	$250{\cdot}73_0$	197·044	52·170	52·570	— 0·400	
$42{\cdot}75_6$	— 0·041	$242{\cdot}27_1$	plus	43·711	42·715	+ 0·996	
$34{\cdot}33_3$	— 0·095	Unbekannt	Instrument-		34·238		
$108{\cdot}74_4$	— 0·068	$308{\cdot}33_0$	höhe	109·770	108·676	+ 1·094	
$29{\cdot}35_1$	— 0·068	$228{\cdot}31_2$	$I = 1{\cdot}516$	29·752	29·283	+ 0·469	
$31{\cdot}50_8$	— 0·115	$230{\cdot}00_0$	**198·560**	31·440	31·393	+ 0·047	

1) Die absoluten Höhen sind entnommen:

1. Der amtlichen Publikation des k. k. Finanz-Ministeriums „Koordinaten und Höhencoten der triangulierten Punkte in Nieder-Österreich“ und
2. Prof. Dr. W. Tinter: „Berichte über einige von ihm für Gradmessungszwecke ausgeführten Arbeiten“, veröffentlicht in den Verhandlungen der österreichischen Gradmessungskommission 1899.

Der Horizont hatte auf dem Photogramme eine unrichtige Lage und ist um 0·712 mm nach oben zu verschieben.

Werden die zu grofs gemessenen Ordinaten um den Betrag — 0·712 mm korrigiert, so ergiebt sich die Kolonne (4) für die verbesserten Ordinatenwerte.

Mit Benutzung dieser verbesserten Ordinaten wurden die relativen Höhen nach der Formel:

$$H_n - H = \frac{\varrho_n y_n}{f} \cos(\gamma - \alpha_n)$$

berechnet, wofür die Logarithmen der erforderlichen Gröfsen in der

Vertikalreihe (5) angesetzt sind und die berechneten Höhen in der Kolonne (6) erscheinen.

Die Korrektion wegen der Refraktion und der Erhebung des scheinbaren Horizontes über dem wahren finden sich in der Kolonne (7) und geben, mit dem notierenden Zeichen an (6) angebracht, den gerechneten Wert der relativen Höhe in der Vertikalreihe 9.

In der Kolonne (10) sind die Fehler in den photogrammetrisch bebestimmten Höhen notiert; dieselben wurden erhalten, indem die gerechneten relativen Höhen von den anderweitig aus scharfen geodätischen Messungen erhaltenen Höhen subtrahiert wurden.

Um nun diese absoluten Höhenfehler mit den mittleren wahrscheinlichen Fehlern der Höhen vergleichen zu können und so ein Bild von der Güte der photogrammetrischen Höhenmessung zu gewinnen, wurden die mittleren wahrscheinlichen Fehler der Höhen ermittelt nach der Formel:

$$\Delta H_n^2 = (H_n - H)^2\left[\left(\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2+\left(\frac{\Delta\alpha}{\operatorname{cotg}(\gamma-\alpha)}\right)^2+\left(\frac{\Delta\gamma}{\operatorname{cotg}(\gamma-\alpha)}\right)^2\right].$$

Wird in der angeführten Formel für $\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$ ein Mittelwert angenommen und zwar $\frac{\Delta r}{r}$, was bei dieser Fehlerrechnung vollends genügt, und wird $\Delta y = 0\cdot1$ mm gesetzt, so können die Daten zur Berechnung des mittleren Höhenfehlers in folgender Tabelle V zusammengestellt werden.

Tabelle V.

1		2	3	4	5	6	7	8	9	10
No.	Punkt	$\left(\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right)^2$	$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2$	$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2$	$\left[\frac{\Delta\alpha}{\operatorname{cotg}(\gamma-\alpha)}\right]^2$	$\left[\frac{\Delta\gamma}{\operatorname{cotg}(\gamma-\alpha)}\right]^2$	Summe aus 1—5	log $(H-h)[1-5]$	ΔH	Anmerkung.
									m	
1	P_0			$55\cdot360\cdot10^{-6}$	$0\cdot263\cdot10^{-6}$	$0\cdot55\cdot10^{-6}$	$76\cdot34\cdot10^{-6}$	0·68 686 — 1	± 0·486	
2	P_1			$41\cdot839\cdot10^{-6}$	$0\cdot215\cdot10^{-6}$	$0\cdot45\cdot10^{-6}$	$62\cdot67\cdot10^{-6}$	0·56 750 — 1	± 0·369	
3	P_2	$9\cdot46\cdot10^{-6}$	$10\cdot71\cdot10^{-6}$	$167\cdot750\cdot10^{-6}$	$0\cdot017\cdot10^{-6}$	$0\cdot04\cdot10^{-6}$	$187\cdot98\cdot10^{-6}$	0·71 577 — 1	± 0·520	
4	P_3			$15\cdot853\cdot10^{-6}$	$0\cdot071\cdot10^{-6}$	$0\cdot15\cdot10^{-6}$	$36\cdot24\cdot10^{-6}$	0·83 064 — 1	± 0·677	
5	P_4			$97\cdot350\cdot10^{-6}$	$0\cdot500\cdot10^{-6}$	$1\cdot04\cdot10^{-6}$	$119\cdot06\cdot10^{-6}$	0·59 008 — 1	± 0·389	
6	P_5			$234\cdot878\cdot10^{-6}$	$0\cdot560\cdot10^{-6}$	$1\cdot17\cdot10^{-6}$	$256\cdot78\cdot10^{-6}$	0·71 464 — 1	± 0·518	

Stellen wir der Übersicht wegen die absoluten oder wirklichen Fehler in der Höhe aus Tabelle IV und die mittleren Fehler aus Tabelle V zusammen, so ergiebt sich:

Tabelle VI.

No.	Punkt	Höhenfehler		Anmerkung
		wirklich	wahrscheinlich	
		m	m	
1	P_0	— 0·400	± 0·486	
2	P_1	+ 0·996	± 0·369	
3	P_2	unbekannt	± 0·520	
4	P_3	+ 1·094	± 0·677	
5	P_4	+ 0·469	± 0·389	
6	P_5	+ 0·047	± 0·518	

Die Höhe der Turmspitze zu St. Peter konnte in keiner geodätischen Publikation und auch vom Kataster nicht erhalten werden, daher war es nicht möglich, die Höhe dieses Punktes auf seine Richtigkeit zu prüfen.

Die Höhe der Turmspitze zu St. Peter ergiebt sich zu:

$$H_3 = 34 \cdot 328 \text{ m}$$

und ist auf

$$\Delta H_3 = + 0 \cdot 520 \text{ m genau.}$$

Um einen bequemeren Vergleich der Resultate, welche nach den behandelten zwei Methoden,

dem Fünf- und Dreistrahlenproblem,

gewonnen wurden, vornehmen zu können, sind die gewonnenen Daten in den nachstehenden zwei Tabellen übersichtlich zusammengestellt worden.

Tabelle VII.

Gröfse				
Bezeichnung		berechnet nach dem Probleme der	
		fünf Strahlen	drei Strahlen
Radiusvektor	r	1041·29 m	1041·330 m
Polarwinkel	θ	170° 59′ 25″	170° 59′ 12″
Rechtwinklige Koordinaten	x	— 1059·180 m	— 1059·092 m
	y	— 284·083 m	— 284·039 m
Bildweite	f	242·44 mm	— 242·44 mm
Orientierungswinkel	γ	15° 41′ 20″	15° 42′ 51″
Abszisse des Hauptpunktes	ξ_0	68·103 mm	68·212 mm

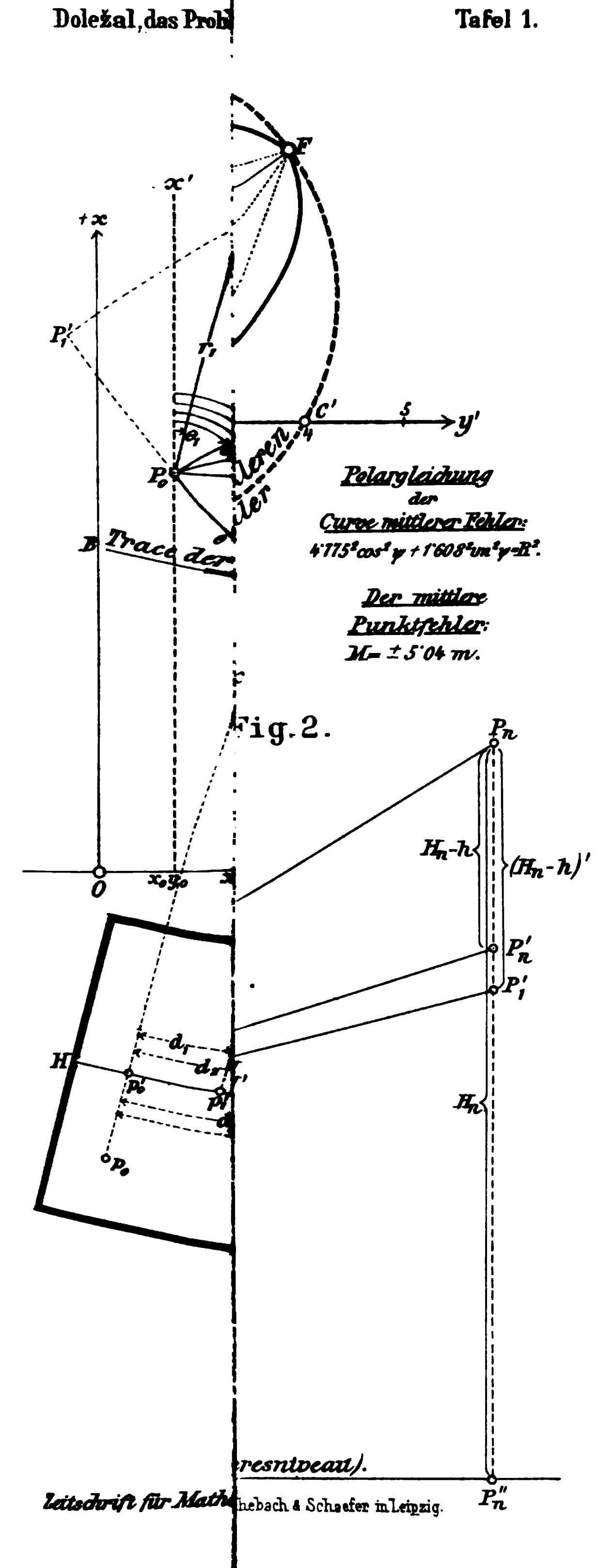

+y
F
x'
+x
P'1
r1
C'
y'
θ1
P0
B
Trace der
Polargleichung
der
Curve mittlerer Fehler:
4·775² cos² ψ + 1·608² sin² ψ = R².
Der mittlere
Punktfehler:
M = ± 5·04 m.
Fig. 2.
Pn
Hn-h
(Hn-h)'
0
x0 y0
P'n
P'1
d1
d2
H
p'0
Hn
p0
resniveau).
P''n

Tabelle VIII.

Genauigkeits-Daten.

Gröfse	Absoluter Fehler aus dem Fünfstrahlen-Probleme	Absoluter Fehler aus dem Dreistrahlen-Probleme	Relativer Fehler aus dem Fünfstrahlen-Probleme		Relativer Fehler aus dem Dreistrahlen-Probleme	
				%		%
r	$\pm$ 3·203 m	$\pm$ 2·580 m	$\frac{1}{325}$	0·31	$\frac{1}{404}$	0·25
θ	$\pm$ 4′ 26″	$\pm$ 14′ 18″				
x	$\pm$ 3·410 m	$\pm$ 2·10 m				
y	$\pm$ 1·082 m	$\pm$ 4·58 m				
f	$\pm$ 0·80 mm	$\pm$ 0·044 mm	$\frac{1}{306}$	0·33	$\frac{1}{5\,462}$	0·018
γ	$\pm$ 9′ 6″	$\pm$ 39·2″				
ξ_0	$\pm$ 0·69 mm	$\pm$ 0·048 mm	$\frac{1}{99}$	1·01	$\frac{1}{1\,430}$	0·07
M	$\pm$ 3·50 m	$\pm$ 5·04 m				

Zum Schlusse erfüllt der Verfasser dieser Arbeit eine angenehme Pflicht, wenn er dem Assistenten seiner Lehrkanzel, Herrn Bergingenieur Florian Lederer, der ihn bei der Ausrechnung der behandelten Beispiele thatkräftig unterstützte, auch an dieser Stelle seinen Dank ausspricht.

Über Gleichungswagen.

Von Rudolf Skutsch in Halensee.

In seinem bekannten Werk „Die Konstruktion der Wage“ definiert Herr Brauer die Wage mit ausdrücklicher Beschränkung als „ein zur Ausführung von Gewichtsvergleichungen bestimmtes mechanisches Instrument“. Aber zwei Überlegungen, die man in Herrn Brauers Einleitung selbst findet, fordern eine Erweiterung der Definition: erstens hat bereits der Sprachgebrauch gewisse andere Instrumente, wie Wasserwage und Setzwage, einbezogen, und zweitens kann man Wagen geeigneter Bauart mit Vorteil als Rechenmaschinen benützen.

Man wird daher — ebenfalls in Verfolg eines bereits von Herrn Brauer ausgesprochenen Gedankens — als Wage allgemein eine kinematische Kette bezeichnen dürfen, welche für den Angriff willkürlich zu wählender Kräfte vorgerichtet ist und benützt wird, um Beziehungen zwischen den Gröfsen und Lagen dieser Kräfte aus der Gleichgewichtslage abzuleiten, welche die Kette unter ihrem Einflufs annimmt. Alsdann umfafst die Definition die drei Fälle, dafs es sich um Be-

stimmung der Gröſse oder der Richtung einer Kraft handelt oder endlich, daſs sämtliche Kräfte nach Richtung und Gröſse bekannt sind und der Endzweck der Wägung die Aufsuchung des Wertes einer Koordinate[1]) ist, welche eine gewisse Gleichung erfüllt, deren Koeffizienten durch die bekannten Kräfte und Abmessungen der Kette bestimmt sind.

Für Wagen des letztgenannten Verwendungszweckes bietet sich von selbst die Bezeichnung Gleichungswagen dar; ihr vorzügliches Anwendungsgebiet bildet naturgemäſs die Lösung der algebraischen Gleichungen oder vielmehr die Ermittelung ihrer reellen Wurzeln. Den sonstigen für diesen Zweck vorgeschlagenen Geräten (vgl. z. B. Wehage, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1877) sind die im Folgenden betrachteten Wagenanordnungen wenigstens an Einfachheit des Aufbaues zweifellos überlegen.

Diesen Anordnungen liegen im allgemeinen Ketten von zweifacher Beweglichkeit zu Grunde. Während die eine der beiden Koordinaten, von denen hiernach die Lage der Kette abhängt, durch ein Stellwerk stetig verändert wird und als Stellwerkskoordinate ξ bezeichnet werden soll, nimmt die andere, wenn die Lage und Gröſse der auf das System wirkenden Kräfte durch die Parameter $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ bestimmt ist und stabile Gleichgewichtslagen innerhalb der Beweglichkeitsgrenzen der Kette vorausgesetzt werden, Werte η an, welche durch eine Gleichgewichtsbedingung

$$\Phi(\xi, \eta, a_0, a_1, a_2 \ldots a_n) = 0 \tag{1}$$

mit den Werten ξ zusammenhängen.

Die Systeme sind nun aber so gewählt, daſs bei Erfüllung einer bestimmten von den Parametern a_ν unabhängigen Gleichung

$$\varphi(\xi, \eta) = 0 \tag{2}$$

die erste Gleichung die Form annimmt

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} A_\nu x^\nu = 0, \tag{3}$$

wo die A_ν Funktionen nur der a_ν sind, x dagegen nur eine Funktion von ξ oder η ist. Wenn nun der Apparat so eingerichtet ist, daſs die Parameter a_ν stetig verändert und die zu einem beliebigen Wertsystem der A_ν gehörigen Werte der a_ν berechnet werden können, so ist leicht zu sehen, daſs der Apparat zur Lösung von Gleichungen höheren

1) Unter Koordinate ist irgend eine Gröſse verstanden, deren Werten die Lagen der Kette stetig zugeordnet sind.

Grades ganz ähnlich angewendet werden kann, wie man eine sogenannte Schnellwage handhabt. Ist nämlich eine Gleichung $\sum_{\nu=0}^{\nu=n} A_\nu x^\nu = 0$ zu lösen, so berechnet man zunächst aus den A_ν die a_ν, belastet darauf die Kette mit dem durch die a_ν bestimmten Kräftesystem und verändert ξ bis die Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ erfüllt ist. Nunmehr kann der gesuchte Wert von x aus ξ oder η berechnet, am einfachsten aber unmittelbar an einer Skala abgelesen werden. Die durch Gleichung (2) charakterisierten Lagen bezeichnen wir als entscheidende Lagen.[1]) Freilich würde es stets einer besonderen Untersuchung bedürfen, ob nach (1) für jeden Wert der Koordinate ξ und jedes Wertsystem der a_ν wirklich nur eine einzige Gleichgewichtslage existiert. Praktisch liefse sich aber die hieraus resultierende Unsicherheit, ob die Erfüllung der Gleichung (3) sich auch wirklich durch Eintritt der entscheidenden Lage anzeigt, etwa dadurch beseitigen, dafs man das Spiel der Wage durch Anschläge möglichst auf die unmittelbare Umgebung der durch Gleichung (2) charakterisierten Lagen einschränkt. In ähnlicher Hinsicht bietet die in Figur 10 dargestellte Gleichungswage Interesse. Sie besitzt für jeden Wert von ξ zwei entscheidende Lagen, die sich als Spiegelbilder entsprechen und reziproke Wurzelwerte x' und x'' bedingen. Hat also zufällig die zu lösende Gleichung zwei einander reziproke Wurzeln, so ist klar, dafs der Apparat nur eine der beiden Wurzeln anzeigen kann, wenn man nicht unter entsprechender Veränderung der erwähnten Spielbegrenzung die Koordinate ξ das betreffende Gebiet wiederholt durchlaufen lassen will.

Als besondere Form der Gleichung (2) ist auch diejenige $\xi = \text{const.}$ denkbar. Wenn diese Eintragung zum Ziele führt, so ist das Stellwerk überhaupt überflüssig, die zweifache Beweglichkeit fällt fort und die Wage wird zu einer Neigungswage. Ein Beispiel hierfür bieten die Figuren 3 und 4.

Wir gehen nunmehr zur Betrachtung der einzelnen Gleichungswagen über.

Die hydrostatische Gleichungswage des Herrn Meslin[2]) besteht aus einem um eine horizontale Achse drehbaren Wagebalken, an welchem Rotationskörper verschiedener Gestalt verschiebbar aufgehängt sind und zwar derart, dafs bei Horizontalstellung des Wagebalkens die Aufhängepunkte in einer durch die Achse gehenden, die tiefsten Punkte

1) Diese Betrachtungsweise läfst sich übrigens auch auf die gewöhnlichen Wagen zur Ausführung von Gewichtsvergleichungen anwenden.

2) Journal de physique 1900.

der Körper aber sämtlich in einer zweiten Horizontalebene liegen, welche von der ersteren den Abstand x' habe. Die einzelnen Körper sind von solcher Gestalt, daſs bei dieser Stellung ein in der Höhe x über der letzteren Ebene geführter Horizontalschnitt die Volumina mx, mx^2, mx^3 u. s. w. abschneidet. Hierbei ist in den Figuren 1 bis 4 die Längeneinheit gleich 0,9 cm und die Konstante $m = \frac{\pi}{16}$ gewählt. Die Aufhängungspunkte dieser Körper mögen — nach rechts als positiv gemessen — die Abstände a_1, a_2, a_3 u. s. w. von der Achse haben; auſserdem werde noch ein beliebig geformter Körper vom Volumen m im Abstand a_0 vermittelst eines dünnen Fadens von solcher Länge aufgehängt, daſs er sich bei horizontalem Stand des Wagebalkens noch ein gewisses Stück unterhalb der tiefsten Punkte der übrigen Körper befindet. Der Apparat wird nun zunächst ausbalanziert und alsdann allmählich in eine Flüssigkeit getaucht, deren spezifisches Gewicht kleiner ist als dasjenige der Körper.

Stellwerkskoordinate ist hier die Höhenlage ξ der Achse und zwar wollen wir die ξ abwärts von einem Punkte aus zählen, welcher in einer Höhe x' über der Oberfläche der Flüssigkeit liegt; als zweite Koordinate η führen wir den Sinus des Winkels ein, welchen der Wagebalken mit der Horizontalebene einschlieſst und bezeichnen ihn als positiv, wenn der rechte Arm nach abwärts zeigt. Die Eintauchtiefen der Rotationskörper sind alsdann bezw.

$$\xi + a_1\eta, \quad \xi + a_2\eta, \quad \ldots . \quad \xi + a_n\eta,$$

ferner die Flüssigkeitsverdrängung des Körpers vom Volumen m und der Rotationskörper

$$m, \quad m(\xi + a_1\eta), \quad m(\xi + a_2\eta)^2, \quad \ldots . \quad m(\xi + a_n\eta)^n.$$

Die Momente der Auftriebe in Bezug auf die Achse der Wage sind also bzw. proportional den Gröſsen

$$a_0, \quad a_1(\xi + a_1\eta), \quad a_2(\xi + a_2\eta)^2, \quad \ldots . \quad a_n(\xi + a_n\eta)^n$$

und die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} a_\nu (\xi + a_\nu \eta)^\nu = 0. \tag{4}$$

Jede lineare Gleichung zwischen ξ und η führt diese Gleichgewichtsbedingung bei Elimination der einen in eine algebraische Gleichung $n$ten Grades für die andere der beiden Gröſsen ξ und η über, welche sich durch Verfügung über die a_ν mit einer vorgegebenen Gleichung $n$ten Grades identifizieren läſst. Wollte man aber die entscheidenden

Lagen nach einer willkürlich angenommenen allgemeinen linearen Gleichung zwischen ξ und η wählen, so hätte man für die Auflösung der gegebenen Gleichung nichts gewonnen, weil man, wie leicht zu verfolgen, die a_ν selbst aus algebraischen Gleichungen zu bestimmen hätte, welche sogar den $n+1$ten Grad erreichen.

Auch die spezielle Form der linearen Gleichung

$$\eta = \frac{\xi}{c},$$

wobei die entscheidenden Lagen dadurch charakterisiert würden, daſs ein gewisser Punkt des Wagebalkens sich in der unveränderlichen Höhe x' über dem Flüssigkeitsniveau befände, würde wenig Nutzen versprechen. Er läſst sich allerdings zeigen, daſs in diesem Falle zur Ermittelung der a_ν dreigliedrige Gleichungen von der Form

$$A_n x^n + A_1 x - A_0 = 0$$

benützt werden können, welche ihrerseits auf die in Rede stehende Art und Weise durch Wägung lösbar sind.

Viel mehr Interesse bieten die beiden anderen Spezialisierungen der linearen Gleichung $\eta = p$ oder $\xi = q$. Im ersten Fall ist entscheidende Lage eine bestimmte feste Richtung des Wagebalkens, im zweiten erübrigt sich das Stellwerk und die Wage wird zu einer sogenannten Neigungswage. Diese Fälle möchte ich kurz betrachten, obgleich sich zeigen wird, daſs praktisch wohl nur die schon von Herrn Meslin angegebene Handhabung des Apparates in Frage kommen kann.

Mit $\eta = p$ geht die Gleichung (4) über in

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} a_\nu (\xi + a_\nu p)^\nu = 0, \tag{5}$$

und, um diese Gleichung mit einer vorgegebenen von der Form (3) zu identifizieren, hat man die a_ν aus folgendem Gleichungssystem zu bestimmen

$$\begin{aligned} a_n &= A_n \\ a_{n-1} + np a_n^2 &= A_{n-1} \\ a_{n-2} + \binom{n-1}{1} p a_{n-1}^2 + \binom{n}{2} p^2 a_n^3 &= A_{n-2} \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned} \tag{6}$$

Man erhält dann die Wurzeln der Gleichung als Werte der Koordinate ξ.

Sei etwa die Gleichung

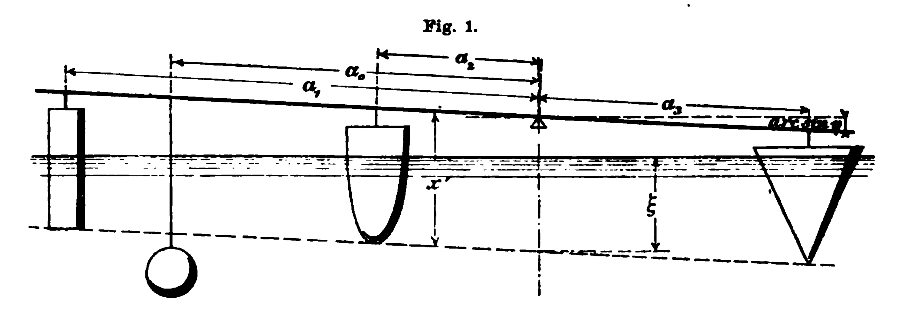
$$4x^3 - 6x - 3 = 0 \tag{7}$$

aufzulösen und wählt man $\eta = 0{,}05$, so ergeben sich die Abstände a_ν (Figur 1) der Reihe nach zu:

$$a_3 = 4;\quad a_2 = -2{,}4;\quad a_1 = -7{,}056;\quad a_0 = -5{,}487.$$

Herr Meslin hatte nur Horizontalstellung des Wagebalkens in

Fig. 1.

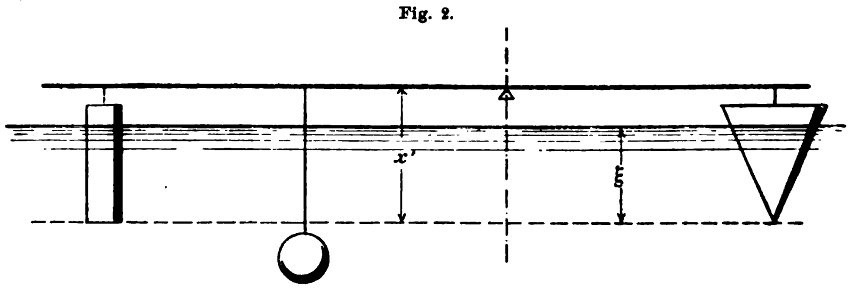


Betracht gezogen. Hierbei geht — mit $p = 0$ — das obige Gleichungssystem für die a_ν einfach in die $n + 1$ Gleichungen

$$a_\nu = A_\nu$$

über und die Lösung der Gleichung (7) wird durch Figur 2 veranschaulicht.

Fig. 2.



Mit $\xi = q$ geht Gleichung (4) über in

$$\text{(8)}\qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=n} a_\nu (q + a_\nu \eta)^\nu = 0$$

und die Identität mit (3) erfordert

$$\text{(9)}\qquad \begin{aligned} a_n^{n+1} &= A_n \\ a_{n-1}^n + nqa_n^n &= A_{n-1} \\ a_{n-2}^{n-1} + \binom{n-1}{1} q a_{n-1}^{n-1} + \binom{n}{2} q^2 a_n^{n-1} &= A_{n-2} \end{aligned}$$

u. s. w.

Man erhält dann die Wurzeln der Gleichung als Werte der Koordinate η.

Um bei Lösung numerischer Gleichungen reelle Werte für die a_ν^* zu erhalten, ist außer geeigneter Wahl der Größe q eine Transformation derselben vorzunehmen. Zur Lösung von (7) können wir etwa setzen $q = 1{,}3$ und $x = 1{,}5 + y$ oder

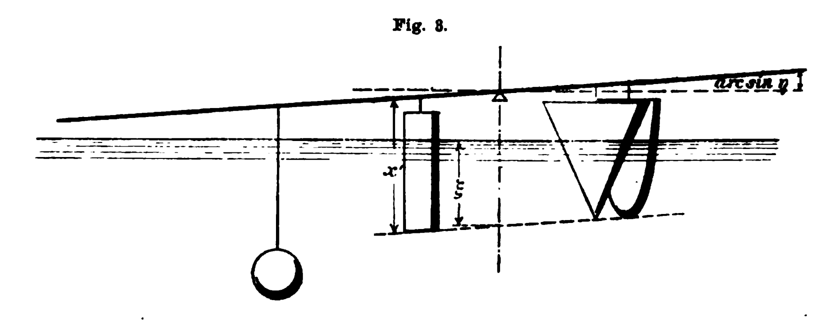
$$4y^3 + 18y^2 + 21y + 1{,}5 = 0.$$

Es ergiebt sich dann als eines der möglichen Wertsysteme

$$a_3 = +\,1{,}414; \quad a_2 = +\,1{,}910; \quad a_1 = -\,1{,}173; \quad a_0 = -\,3{,}31.$$

Die Lösung ist in Figur 3 dargestellt, sie ergiebt sich in der Form $y = \eta = -\,0{,}076$; also $x = 1{,}5 + y = 1{,}424$.

Fig. 3.



Wird insbesondere $q = 0$ gewählt, so geht das obige Gleichungssystem (9) in die $n + 1$ Gleichungen

$$a_\nu^{\nu+1} = A_\nu$$

über. Transformieren wir etwa Gleichung (7) durch die Substitution $x = 1{,}2 + y$ in

$$4y^3 + 14{,}4y^2 + 11{,}28y - 3{,}288 = 0$$

so wird (bei willkürlicher Verfügung über das Vorzeichen der zweiten und vierten Wurzel), wie in Figur 4 dargestellt:

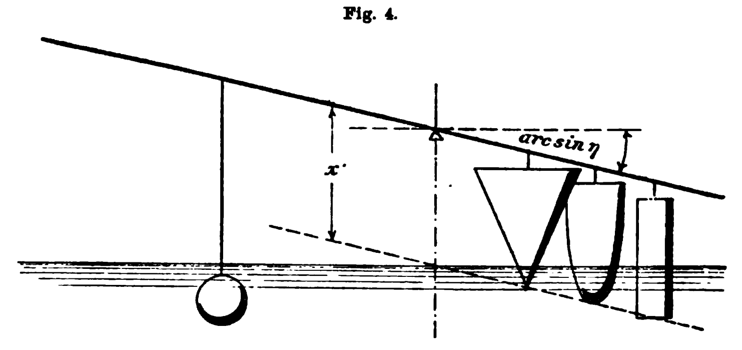
$$a_3 = +\,1{,}414; \quad a_2 = +\,2{,}433; \quad a_1 = +\,3{,}358; \quad a_0 = -\,3{,}288.$$

Im letzteren Fall ist zwar leicht einzusehen, daſs es stets durch lineare Transformation der gegebenen Gleichung gelingt, alle a_ν reell und alle Wurzeln der Gleichung zu echten Brüchen zu machen. Eine weitere Einschränkung für die Anwendung der beschriebenen Verfahren, welche wiederum nur das von Herrn Meslin angegebene nicht trifft, besteht aber darin, daſs keiner der Werte $\xi + a_\nu \eta$ negativ ausfallen darf. Denn wenigstens für die im Anschluſs an Herrn Meslin in den Figuren 1 bis 4 dargestellten Körper ist der Auftrieb eben nur so lange der νten Potenz dieser Gröſse proportional, als dieselbe positiv bleibt,

und eine Ergänzung der Körper zur Vermeidung dieses Mangels ist nur für ungerade Werte von ν ohne grofse Komplikation denkbar.

Die Rotationskörper des Herrn Meslin sind der Reihe nach ein cylindrischer Stab, ein Paraboloid, ein Kegel, ein Körper mit semikubischer und ein solcher mit apollonischer Parabel als Generatrix u. s. f. Herr Meslin macht darauf aufmerksam, dafs zur Lösung einer reduzierten kubischen Gleichung nur Kegel und Cylinder erforderlich sind. Wenn er hierbei den Vorteil in der Vermeidung des schwieriger herzustellenden Paraboloides sieht, so mag bemerkt werden, dafs das letztere auch durch einen ebenflächigen Keil mit horizontaler unten liegender Schneide ersetzt werden kann. Da man natürlich auch den Cylinder durch irgend welches Prisma, den Kegel durch irgend welche Pyramide ersetzen kann, so sind zur Lösung der allgemeinen Gleichung dritten Grades nur solche Körper erforderlich, welche von ebenen Figuren begrenzt werden.

Fig. 4.



Die folgenden Apparate stellen sich ausnahmslos als kinematische Ketten aus festen Körpern dar. Die Kette von einfacher Beweglichkeit welche festen Werten der Stellwerkskoordinate ξ entspricht, ist bei allen aus Wagebalken zusammengesetzt, welche durch Kuppelstäbe oder ähnliche Körper verbunden sind. Man kann sie in drei Gruppen teilen, je nachdem durch das Stellwerk entweder nur die Angriffspunkte der Kuppelstäbe oder nur die Unterstützungspunkte an den Wagebalken verschoben werden oder drittens sowohl Angriff der Kuppelstäbe als Unterstützung in festen Punkten der Wagebalken erfolgt. Die Gleichgewichtsbedingung für die entscheidenden Lagen ist bei allen so leicht anzusetzen, die allgemeine Form dagegen so kompliziert, dafs wir von nun an immer gleich die erstere formulieren wollen.

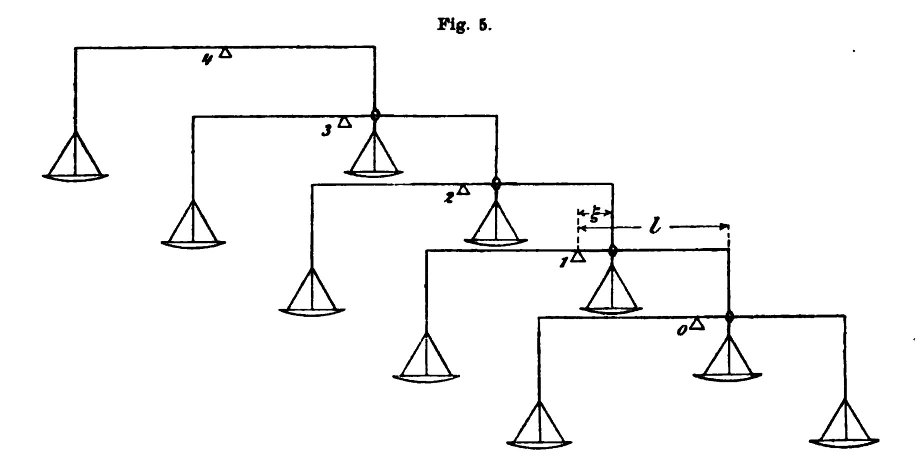
Nach der vorstehenden Einteilung würden die prinzipell fast übereinstimmenden Gleichungswagen der Herren Massau[1]) und Grant[2])

1) Note sur les intégraphes, Gand, 1887.

2) American Machinist 1896.

der ersten Gattung angehören. Was zunächst den auf die Ausgestaltung des Apparates etwas näher eingehenden Vorschlag von Herrn Grant anbetrifft, so benützt derselbe, wie aus Figur 5 zu ersehen, zur Lösung von Gleichungen $n$ten Grades ein System von $n+1$ gleichgrofsen gleicharmigen Balkenwagen, von denen jede mit einem Punkt ihres rechten Armes das rechte Balkenende der folgenden Wage unterstützt. Der Apparat ist nun so eingerichtet, dafs an sämtlichen Wagebalken die Entfernung des unterstützenden Punktes vom Drehpunkt stets übereinstimmt, im übrigen aber dieser gemeinschaftliche Wert durch ein Stellwerk stetig verändert werden kann. Nennen wir ihn ξ und die

Fig. 5.



Armlänge l, so gehören zu einer Elementardrehung δ des ersten Balkens offenbar Elementardrehungen $\frac{\xi}{l}\,\delta$, $\left(\frac{\xi}{l}\right)^2\delta, \cdots \left(\frac{\xi}{l}\right)^n\delta$ der übrigen Balken. Sind dieselben also durch Momente M_0, M_1, $M_2 \cdots M_n$ belastet, so lautet die Gleichgewichtsbedingung für das System nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$(10) \qquad M_0 + M_1\frac{\xi}{l} + M_2\left(\frac{\xi}{l}\right)^2 + \cdots + M_n\left(\frac{\xi}{l}\right)^n = 0.$$

Um darnach die Gleichung (3)

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=0} A_\nu x^\nu = 0$$

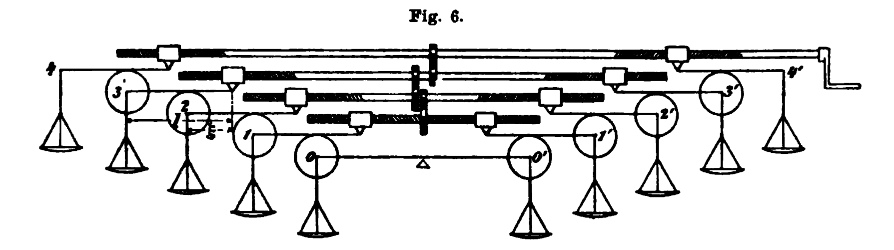
zu lösen, bringt man Momente M_ν von der Gröfse der Koeffizienten A_ν auf die einzelnen Wagebalken und verändert den Wert von ξ stetig vermittelst des Stellwerks. Bei Eintritt der entscheidenden Lage, d. h. bei horizontalem Stand der Balken ist $x = \frac{\xi}{l}$ eine Wurzel der Glei-

chung. Wurzelwerte $x > 1$ erhält man in der Form $x = \frac{l}{\xi}$, wenn man Momente M_ν von der Gröfse der Koeffizienten $A_{n-\nu}$ aufbringt, wie man sich durch Multiplikation der Gleichung (10) mit $\left(\frac{l}{\xi}\right)^n$ überzeugt. Macht man $M_\nu = (-1)^\nu A_\nu$, so ergeben sich echte Brüche unter den negativen Wurzeln der Gleichung in der Form $x = -\frac{\xi}{l}$; mit $M_\nu = (-1)^\nu A_{n-\nu}$ die übrigen negativen Wurzeln in der Form $x = -\frac{l}{\xi}$.

Wie man erreichen kann, dafs die Länge ξ für alle Wagebalken die nämliche bleibt, auf diese Frage geht Herr Massau überhaupt nicht ein. Er verwendet Robervalsche Wagen und stellt dieselben unveränderlich so nebeneinander auf, dafs ihre Drehachsen in eine Gerade fallen. Gekuppelt wird ein veränderlicher Punkt des in einen horizontalen Arm auslaufenden Plateaus jeder einzelnen Wage mit einem veränderlichen Punkt des Balkens der vorhergehenden. Da bei der Robervalschen Wage alle Punkte eines Plateaus gleiche Wege beschreiben, so ist nur die Verlegung des Balkenpunktes mafsgebend und die soeben entwickelte Gleichung gilt auch für Herrn Massaus Instrument. Die Anbringung eines Stellwerkes zur gleichzeitigen Veränderung der Arme ξ würde aber bei dieser Anordnung sehr schwierig sein. Bei Herrn Grants Gleichungswage gestaltet sich dagegen gerade das Stellwerk sehr einfach. Hier werden die einzelnen Wagenschneiden durch zwangläufig verbundene Schraubenspindeln mit Geschwindigkeiten bewegt, welche sich wie die Glieder einer arithmetischen Reihe verhalten. Nur ist in Herrn Grants Figur die Stützung des einen Balkens auf dem andern durch oben gelenkig angeschlossene, unten mit Ösen versehene Stäbe bewirkt und damit natürlich eine stetige Verstellung doch wieder ausgeschlossen, weil diese Stäbe im belasteten Zustand durch die gleitende Reibung am unteren Wagebalken mitgenommen werden und sich schräg stellen würden. Diese Schwierigkeit ist auch nicht ohne weiteres zu beseitigen; denn wollte man diese Kuppelstäbe etwa oben steif anschliefsen, so würde zwar stetige Verstellung ermöglicht sein, dafür aber die Reibung an den unteren Stützenenden beim Einspielen der Wage sehr störend wirken, allerdings um so weniger, je näher die sämtlichen reibenden Punkte und Balkendrehpunkte in eine Horizontalebene fallen. Die letztere geometrische Bedingung scheint Herr Massau verwirklichen gewollt zu haben, wobei dann für unendlich kleine Schwingungen um die entscheidende Lage die Relativbewegung der reibenden Punkte unendlich klein von höherer Ordnung würde. Jedenfalls sind beide Gleichungswagen als recht unvollkommene Beispiele der ersten Gattung anzusehen.

Eine bessere Lösung der Aufgabe ist in Figur 6 dargestellt. Der ganze Apparat ist hier in Zwillingsform ausgeführt, sodafs die eine Hälfte nur die positiven, die andere nur die negativen Momente aufnimmt. Hierdurch ist der wichtige Zweck erreicht, dafs die von einer Wage auf die benachbarte übertragene Kraft stets dieselbe Richtung behält. Infolgedessen konnten die Kuppelstäbe durch Rollen ersetzt werden, welche weder für eine stetige Verstellung des Apparates durch das Stellwerk, noch, wenn leicht genug beweglich, für ein empfindliches Spiel der Wage ein Hindernis bieten. Das Stellwerk kann wie

Fig. 6.



bei Herrn Grants Apparat in einfachster Weise unter Benützung von Schraubenspindeln hergestellt werden.

Mit den aus der Figur zu entnehmenden Bezeichnungen entsprechen einer sehr kleinen Senkung δ des linken Balkenendes der untersten Wage gleichzeitige Senkungen $\frac{l}{\xi}\delta$, $\left(\frac{l}{\xi}\right)^2\delta, \cdots \left(\frac{l}{\xi}\right)^n\delta$ der übrigen Balkenenden der linken Apparathälfte, dagegen gleichzeitige Senkungen $-\delta$, $-\frac{l}{\xi}\delta$, $-\left(\frac{l}{\xi}\right)^2\delta, \cdots -\left(\frac{l}{\xi}\right)^n\delta$ auf der rechten Seite. Somit ist die Gleichgewichtsbedingung für das in der Figur angeschriebene Lastensystem

$$(11) \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=n} P_\nu\left(\frac{l}{\xi}\right)^\nu - \sum_{\nu=0}^{\nu=n} P'_\nu\left(\frac{l}{\xi}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu=n}(P_\nu - P'_\nu)\left(\frac{l}{\xi}\right)^\nu = 0$$

Um also eine Gleichung von der Form (3)

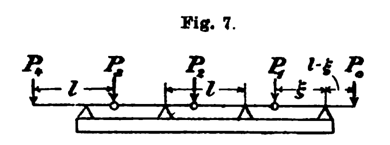
$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} A_\nu x^\nu = 0$$

zu lösen, mache man zunächst $(P_\nu - P'_\nu) = A_\nu$, um die positiven Wurzeln > 1 in der Form $x = \frac{l}{\xi}$ zu erhalten, darauf $(P_\nu - P'_\nu) = A_{n-\nu}$, um die positiven Wurzeln < 1 in der Form $x = \frac{\xi}{l}$ zu erhalten. $(P_\nu - P'_\nu) = (-1)^\nu A_\nu$ ergiebt die negativen Wurzeln > 1 und endlich $(P_\nu - P'_\nu) = (-1)^\nu A_{n-\nu}$ die negativen Wurzeln < 1. Selbstverständlich kommt

man mit n Kräften aus: ergiebt sich $P_\nu - P'_\nu$ positiv, so nehme man $P'_\nu = 0$; ist $P_\nu - P'_\nu$ negativ, so nehme man $P_\nu = 0$. Es wird dann von den entsprechenden Wageschalen beider Hälften des Apparates immer nur eine belastet. Daſs die unbelastete Wage im Gleichgewicht ist, kann man leicht aus (11) ableiten, wenn man es nicht unmittelbar aus Symmetriegründen folgern will. Die Ausführung des vorbeschriebenen Apparates kann konstruktiv kaum auf irgend welche Schwierigkeiten stoſsen, an Empfindlichkeit dürfte er Herrn Meslins Wage wohl übertreffen.

Die Grundform der zweiten Gattung ist womöglich noch einfacher. n gewichtslose Stäbe von der Länge l (die Wagebalken) sind in ihren Endpunkten gelenkig verbunden und zu einem geraden horizontalen Stabzug ausgestreckt (Fig. 7). Derselbe wird durch n Schneiden unterstützt, welche in gleichen Abständen l auf einem gemeinschaftlichen Stativ befestigt sind. Diese Schneiden teilen sämtliche Stablängen in dem nämlichen Verhältnis $\xi : l - \xi$, welchem durch Relativverschiebung des Stabzuges gegen das Stativ jeder positive Wert gegeben werden kann. Eine Abwärtsbewegung des rechten Stabzugendes um eine sehr kleine Gröſse δ ist den Bedingungen des Systems zufolge mit abwechselnden Auf- und Abwärtsbewegungen der übrigen Stabenden verbunden, welche, wie leicht zu sehen, durch die Gröſsen $-\frac{\xi}{l-\xi}\delta$, $+\left(\frac{\xi}{l-\xi}\right)^2\delta$, $-\left(\frac{\xi}{l-\xi}\right)^3\delta$ u. s. w. gemessen werden. Für die Lastenreihe in Figur 7 und horizontale Lage des Stabzuges liefert also das Prinzip der virtuellen Verrückungen die Gleichgewichtsbedingung

Fig. 7.



$$(12) \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu P_\nu \left(\frac{\xi}{l-\xi}\right)^\nu = 0.$$

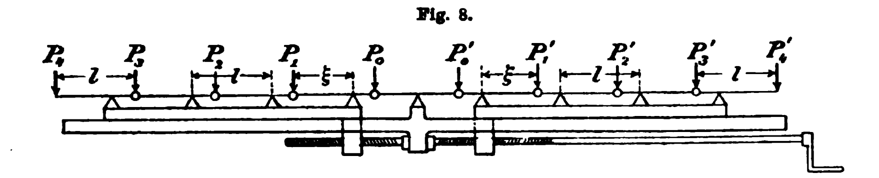
Wendet man nur abwärts gerichtete Kräfte an, so läſst sich (12) nur mit solchen Gleichungen (3) identifizieren, deren Glieder keine Zeichenfolge oder keinen Zeichenwechsel haben. Im ersteren Fall erhält man die Wurzeln in der Form $x = \frac{\xi}{l-\xi}$, im zweiten in der Form $(-x) = \frac{\xi}{l-\xi}$. Diese Beschränkung auf bestimmte Arten von Gleichungen und der Einfluſs des Eigengewichts der Wagebalken kommen gleichzeitig in Fortfall, wenn man den Apparat wieder in Zwillingsanordnung ausführt. Man verbindet hierbei zwei entsprechende

Enden der beiden Stabzüge durch einen in der Mitte unterstützten $(2n+1)$ten Stab und ordnet für beide Schneidensysteme einen gemeinschaftlichen symmetrischen Antrieb etwa durch rechts- oder linksgängiges Gewinde auf derselben Spindel an (Figur 8). Man hat dann auf der einen Seite die Senkungen $+\delta$, $-\left(\frac{\xi}{l-\xi}\right)\delta$, $+\left(\frac{\xi}{l-\xi}\right)^2\delta$, $\cdots(-1)^n\left(\frac{\xi}{l-\xi}\right)^n\delta$, auf der andern die Senkungen $-\delta$, $+\left(\frac{\xi}{l-\xi}\right)\delta$, $-\left(\frac{\xi}{l-\xi}\right)^2\delta$, $\cdots$ $(-1)^{n+1}\left(\frac{\xi}{l-\xi}\right)^n\delta$, und die Gleichgewichtsbedingung für die Lastenreihe in Figur 8 lautet:

$$(13)\qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=n}(-1)^\nu(P_\nu-P'_\nu)\left(\frac{\xi}{l-\xi}\right)^\nu=0,$$

Diese Gleichung zeigt zunächst, dafs bei symmetrischer Ausführung der Apparat im Gleichgewicht ist, wenn nur sein Eigengewicht wirkt, dafs

Fig. 8.



also das letztere die Giltigkeit der Gleichung (13) für die äufseren Lasten nicht beeinträchtigt.

Um die Gleichung mit der allgemeinen Form (3)

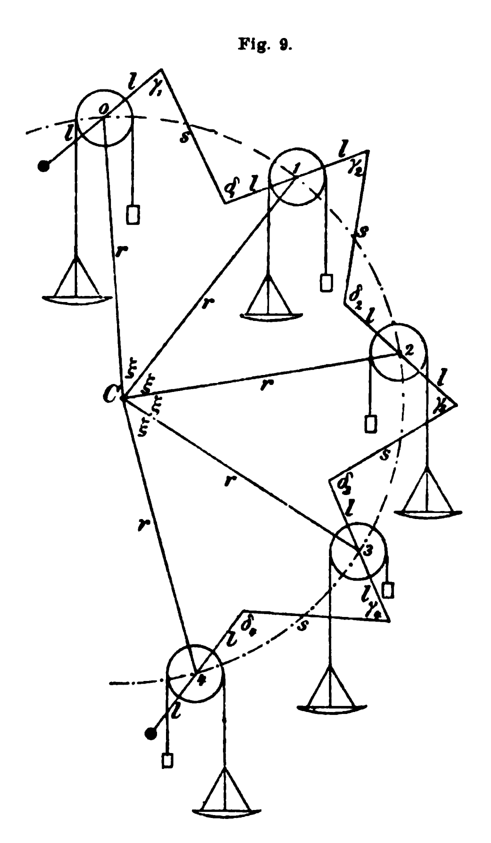
$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n}A_\nu x^\nu=0$$

zur Übereinstimmung zu bringen, mache man $(P_\nu-P'_\nu)=A_\nu$ um die negativen und $(P_\nu-P'_\nu)=(-1)^\nu A_\nu$ um die positiven Wurzeln der Gleichung zu erhalten. Die ersteren ergeben sich in der Form $x=-\frac{\xi}{l-\xi}$, die letzteren in der Form $x=\frac{\xi}{l-\xi}$. Wie bei der oben beschriebenen Zwillingsanordnung der ersten Gattung kommt man auch hier mit n positiven Kräften aus, indem man für positive Werte von $P_\nu-P'_\nu$ den Subtrahenden, für negative den Diminuenden gleich Null setzt.

In der vorbeschriebenen Form ist die Gleichungswage noch nicht brauchbar, da die zugrundeliegende Kette nur unendlich kleine Beweglichkeit besitzt. Um dem abzuhelfen, könnte man die Stäbe anstatt auf Schneiden auf drehbaren Rollen auflagern, welche durch das Stell-

werk gleichmäfsig bewegt werden. Ist nun Vorsorge getroffen, dafs die Stäbe auf den Rollen nur wälzen, nicht gleiten können, so ist bei horizontaler Lage der Stäbe das Verhältnis $\xi : l - \xi$ durchweg dasselbe und die Verbindung auf einander folgender Stäbe, die etwa abwechselnd höher und tiefer gelegt werden, kann in einfachster Weise durch gelenkig angeschlossene vertikale Kuppelstäbe erfolgen. Der Zwanglauf des Stellwerks und der Horizontalstäbe auf den Rollen kann durch Verzahnung oder durch Wickelung von Zugorganen erreicht werden; da die Schwierigkeiten auf konstruktivem Gebiete liegen würden, möchte eine schematische Skizze ebenso zwecklos als wohlfeil sein.

Fig. 9.



Übersichtliche und geometrisch nicht uninteressante Apparate der dritten Gattung erhält man, wenn man die Drehpunkte der Wagebalken in gleichen Abständen auf der Peripherie eines Kreises anordnet. Die Aufgabe des Stellwerks kann dann darin bestehen, nur den Halbmesser des Kreises oder nur den Abstand der Peripheriepunkte oder auch beide nach irgend einem Gesetz gleichzeitig zu verändern. Von der sich hier bietenden grofsen Mannigfaltigkeit der Lösungen sind nachstehend ohne besondere Auswahl zwei beliebige herausgegriffen, für diese aber gewisse Stablängen und Winkel aus Zweckmäfsigkeitsgründen bestimmt worden.

In der Gleichungswage nach Figur 9 werden die einzelnen Radialstäbe eines fächerförmigen Gestells (etwa durch einen Zahnradmechanismus) gleichzeitig u. zw. so verstellt, dafs die Winkel zwischen benachbarten Radialstäben unter einander stets gleich bleiben. Der Endpunkt eines jeden Radialstabes r dient als Drehpunkt eines zweiarmigen Wagebalkens ll, auf welchen aber die Gewichte nicht in festen Punkten und in bestimmter Richtung, sondern vermittelst Rollen

wirken, an deren Umfang sie angreifen.[1]) Die Endpunkte benachbarter Wagebalken sind durch Kuppelstäbe s verbunden; die Buchstaben r, l und s werden im folgenden zugleich als Maſs für die Längen der betreffenden Stäbe benützt. Werden nun die Wagebalken vermittelst am Rollenumfang angreifender Gewichte durch die Momente M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 belastet, so hat das System für jeden Wert der Stellwerkskoordinate ξ eine bestimmte Gleichgewichtslage. Bezeichnen wir die Spannkräfte in den vier Kuppelstäben mit S_1, S_2, S_3 und S_4, die Winkel zwischen Wagebalken und Kuppelstäben in der aus der Figur ersichtlichen Weise, so ergiebt sich successive, wenn Zugspannungen und linksdrehende Momente als positiv eingeführt werden,

$$(14)\qquad \begin{aligned} S_1 \sin \gamma_1 &= \frac{M_0}{l} \\ S_1 \sin \delta_1 + S_2 \sin \gamma_2 &= \frac{M_1}{l} \\ S_2 \sin \delta_2 + S_3 \sin \gamma_3 &= \frac{M_2}{l} \\ S_3 \sin \delta_3 + S_4 \sin \gamma_4 &= \frac{M_3}{l} \\ S_4 \sin \delta_4 &= \frac{M_4}{l}\,. \end{aligned}$$

Multipliziert man die zweite dieser Gleichungen mit $-\frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta_1}$, die dritte mit $+\frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta_1}\cdot\frac{\sin \gamma_2}{\sin \delta_2}$, die vierte mit $-\frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta_1}\cdot\frac{\sin \gamma_2}{\sin \delta_2}\cdot\frac{\sin \gamma_3}{\sin \delta_3}$ und die fünfte mit $\frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta_1}\cdot\frac{\sin \gamma_2}{\sin \delta_2}\cdot\frac{\sin \gamma_3}{\sin \delta_3}\cdot\frac{\sin \gamma_4}{\sin \delta_4}$, so fallen bei Addition aller Gleichungen die Stabspannungen S heraus und man erhält bei Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors $\frac{1}{l}$:

$$(15)\quad M_0 - M_1 \frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta_1} + M_2 \frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta_1}\cdot\frac{\sin \gamma_2}{\sin \delta_2} - M_3 \frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta_1}\cdot\frac{\sin \gamma_2}{\sin \delta_2}\cdot\frac{\sin \gamma_3}{\sin \delta_3} + M_4 \frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta_1}\cdot\frac{\sin \gamma_2}{\sin \delta_2}\cdot\frac{\sin \gamma_3}{\sin \delta_3}\cdot\frac{\sin \gamma_4}{\sin \delta_4} = 0.$$

Es ist aber leicht einzusehen, daſs — innerhalb gewisser Grenzen — für jeden Wert von ξ eine Lage des Systems existiert, bei welcher sämtliche Fünfecke $rlslr$ kongruent sind. Für diese Lagen wird also $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4$ und $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ und, wenn wir infolgedessen die Indices dieser Winkel als überflüssig fortlassen, so nimmt Gleichung (15) die einfachere Form an

$$(16)\quad M_0 - M_1 \frac{\sin \gamma}{\sin \delta} + M_2 \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \delta}\right)^2 - M_3 \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \delta}\right)^3 + M_4 \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \delta}\right)^4 = 0$$

1) Diese Rollen haben in den Figuren 9 und 10 lediglich der Übersichtlichkeit wegen sehr kleine Durchmesser erhalten.

oder, wenn wir die willkürliche Beschränkung auf eine bestimmte Anzahl von Wagebalken aufgeben:

$$(17) \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=n}(-1)^\nu M_\nu \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\right)^\nu = 0.$$

Um also mit diesem Apparat eine Gleichung (3)

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} A_\nu x^\nu = 0$$

zu lösen, hätte man die Momente $M_\nu = (-1)^\nu A_\nu$ zu machen und die Stellwerkskoordinate ξ zu verändern, bis die Fünfecke $rlslr$ kongruent sind; in dieser entscheidenden Lage liefert der Quotient $\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}$ eine Wurzel der Gleichung. Die Kongruenz sämtlicher Fünfecke folgt zwar schon aus der Gleichheit z. B. zweier aufeinander folgenden Winkel γ oder δ; aber die stetige Veränderung von ξ wird illusorisch gemacht, wenn zwei gleichzeitige Beobachtungen erforderlich sind. Die Feststellung der entscheidenden Lage wird also besser etwa folgendermaſsen geschehen. Die Gesamtheit der entscheidenden Lagen bestimmt nämlich für jeden Punkt des Stabes s inbezug auf einen benachbarten Stab r einen geometrischen Ort, der auf einer mit r verbundenen Ebene vorgezeichnet werden kann. Zu beobachten ist alsdann nur, wann der betreffende Punkt die vorgezeichnete Kurve passiert. In Figur 9 ist im besondern $s = 2l$ gemacht. Alsdann liegen in allen entscheidenden Lagen die Mittelpunkte der Stäbe s auf dem Kreise 01234. Denn bezeichnet man die Scheitel der Winkel δ_1, γ_2 und δ_2 mit D_1, G_2 und D_2, so ist wegen Kongruenz der Fünfecke $CD_1 = CD_2$, und es sind in den Dreiecken CD_1G_2 und CD_2G_2 die Seiten paarweise gleich. Diese Dreiecke sind also kongruent, die die Seiten D_1G_2 und D_2G_2 halbierenden Transversalen sind gleich und der Mittelpunkt von s hat den Abstand r von C.

Mit dieser Gleichungswage kann man nur Wurzeln ermitteln, die sich nicht allzusehr von dem Wert 1 entfernen. Denn offenbar würde bei sehr spitzen oder sehr stumpfen Winkeln γ und δ die Reibung in den Gelenken die Genauigkeit arg beeinträchtigen. Läſst man noch Winkel von 45^0 und 135^0 zu, so müssen die Wurzeln jedenfalls zwischen den Grenzen $\sqrt{2}$ und $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ liegen und auch dieses Gebiet kann nur dann völlig ausgenützt werden, wenn man die Stablängen so wählt, daſs in den entscheidenden Lagen für $\gamma = 45^0$ $\delta = 90^0$ und für $\gamma = 90^0$ $\delta = 135^0$ wird. Nachdem aus anderen Gründen $s = 2l$ angenommen war, lieſs sich die letztere Bedingung nur noch angenähert erfüllen

und zwar durch $r = 3{,}75\,l$. Jedenfalls würde also der Anwendung einer derartigen Gleichungswage die entsprechende Transformation der Gleichung vorhergehen müssen.

Eine andere Gleichungswage der dritten Gattung ist in Figur 10 abgebildet. Als Träger der Wagenschneiden dient wieder ein fächerförmiges Gestell von Radialstäben; aber diesmal sind die Winkel α zwischen denselben unveränderlich und durch das Stellwerk wird der

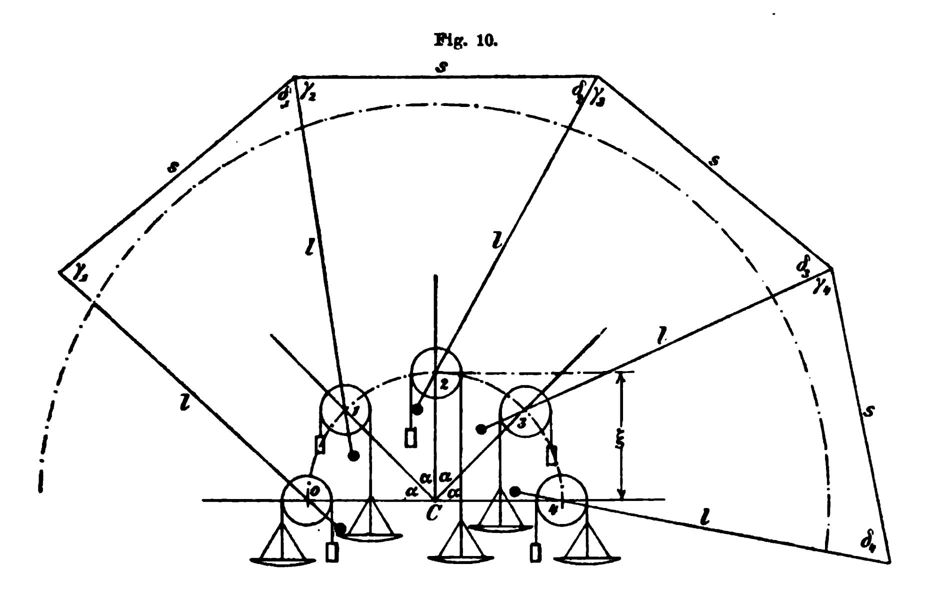


Fig. 10.

Halbmesser ξ des Kreises verändert, auf dessen Umfang sich die Schneiden befinden. Die Wagebalken l sind jetzt nur einarmig, können aber wie vorhin vermittelst der an ihnen befestigten Schnurrollen durch positive oder negative Momente M_0 bis M_4 belastet werden. Die Gleichgewichtsbedingungen für die an den Enden der Wagebalken angreifenden Kräfte lauten

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
S_1 \sin\gamma_1 &= \frac{M_0}{l}\\
S_2 \sin\gamma_2 - S_1 \sin\delta_1 &= \frac{M_1}{l}\\
S_3 \sin\gamma_3 - S_2 \sin\delta_2 &= \frac{M_2}{l}\\
S_4 \sin\gamma_4 - S_3 \sin\delta_3 &= \frac{M_3}{l}\\
- S_4 \sin\delta_4 &= \frac{M_4}{l}
\end{aligned}
$$

und nach Multiplikation der einzelnen Gleichungen mit

$$1, \frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}, \frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\delta_2}, \frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\delta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_3}{\sin\delta_3}, \frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\delta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_3}{\sin\delta_3}\cdot\frac{\sin\gamma_4}{\sin\delta_4}$$

ergiebt die Addition sämtlicher

$$(19)\quad \begin{aligned} M_0 + M_1\frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1} + M_2\frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\delta_2} + M_3\frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\delta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_3}{\sin\delta_3} \\ + M_4\frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\delta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_3}{\sin\delta_3}\cdot\frac{\sin\gamma_4}{\sin\delta_4} = 0. \end{aligned}$$

Entscheidende Lage ist wiederum die Kongruenz der Fünfecke. Dabei geht Gleichung (17), wenn zugleich die Beschränkung auf eine bestimmte Anzahl von Wagebalken aufgegeben wird, über in

$$(20)\quad \sum_{\nu=0}^{\nu=n} M_\nu\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\right)^\nu = 0.$$

Die Kongruenz der Fünfecke ist hier unabhängig von dem Verhältnis der Stablängen s und l daran zu erkennen, daſs die Endpunkte der Wagebalken auf einem Kreis vom Halbmesser $\frac{s}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ liegen. Man sieht nämlich leicht ein, daſs die Verbindungslinien der Endpunkte eines Kuppelstabes mit dem Punkt C, da sie gleiche Winkel mit den zugehörigen Radialstäben bilden, auch denselben Winkel α wie die letzteren einschlieſsen müssen. Übrigens ist auch für jeden mit einem Stab s fest verbundenen Punkt der geometrische Ort bei Eintritt der entscheidenden Lagen ein Kreis um C, insbesondere fällt die Spitze eines über s mit der Schenkellänge $\frac{s}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ konstruierten gleichschenkligen Dreiecks für jede entscheidende Lage mit C zusammen. Über die Beschränkung der Wurzelwerte auf das Gebiet $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ bis $\sqrt{2}$ gilt das oben Gesagte; um dieses Gebiet auszunützen, d. h. damit hier für $\gamma = 45^0$ $\delta = 90^0$ und für $\gamma = 90^0$ $\delta = 45^0$ wird, hat man den Winkel $\alpha = 45^0$ zu nehmen. Wird dabei, wie dies auch in Figur 10 geschehen ist, etwa $s = 0{,}9l$ gewählt, so durchläuft die Stellwerkskoordinate ξ die Werte von $0{,}18l$ bis $0{,}48l$, während das Verhältnis $\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}$ von 1 auf $\sqrt{2}$ steigt oder von 1 auf $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ fällt. Wie schon in der Einleitung erwähnt, hat nämlich die vorliegende Wage die Eigentümlichkeit, daſs jedem Wert der Stellwerkskoordinate zwei verschiedene entscheidende Lagen zugehören, welche durch Vertauschung der Winkel γ und δ als gegenseitige Spiegelbilder auseinander hervorgehen und demzufolge reziproke Werte des Quotienten $\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}$ ergeben.

Die Ausbalanzierung des Eigengewichts bietet auch bei den Wagen nach Figur 9 und 10 keine Schwierigkeit, sie kann durch Gegengewichte an den Stellen erfolgen, welche in den Figuren durch kleine schwarze Kreise bezeichnet sind.

Bei allen vorbeschriebenen Stabverbindungen wurden die Gleichungskoeffizienten durch Momente oder Gewichte dargestellt und infolgedessen liefert jeder der Apparate, wenn man ihn zur Auflösung linearer Gleichungen benützt, das Verhältnis zweier Gewichte. Es steht also nichts im Wege, ihn wie eine gewöhnliche Wage zu benützen, um ein unbekanntes Gewicht als Vielfaches eines bekannten auszudrücken. Geht man so von den Apparaten der ersten Gattung aus, so gelangt man zu der gewöhnlichen römischen Schnellwage, während die der zweiten Gattung zu der sogenannten dänischen Schnellwage führen. Was endlich die Apparate der dritten Gattung anbelangt, so wollen wir hier von einem solchen ausgehen, bei welchem die Abstände der Peripheriepunkte konstant bleiben und nur der Halbmesser des zugehörigen Kreises verändert wird. Ein solches Gerät würde bei Beschränkung auf lineare Gleichungen in ein Gelenkviereck übergehen, in welchem die beiden der festgestellten benachbarten Seiten gleichlang sind und durch Momente M_0 und M_1 belastet werden. Das Verhältnis dieser Momente ist dann gleich dem Verhältnis der Sinus derjenigen Winkel, welchen die beiden Stäbe in der Gleichgewichtslage mit dem vierten einschliefsen. Übrigens ist auch das Gelenkviereck bereits als Wage zur Bestimmung von Gewichten benützt worden, vgl. Brauer, die Konstruktion der Waage S. 47 (Wage von Pfanzeder).

Wir haben bisher immer stillschweigend die Stabilität der in Betracht kommenden Gleichgewichtslagen angenommen, was im allgemeinen unbegründet scheint. Nun läfst sich zwar durch Hinzufügung genügend grofser Kräfte, welche auf das System stets im Sinne der Erreichung einer entscheidenden Lage wirken und in dieser genügende Stabilität besitzen — im Interesse der Empfindlichkeit freilich eben nur gerade genügende — jede Labilität beseitigen. Eine vorteilhafte Verwirklichung gestattet dieser Gedanke aber doch wohl nur bei solchen Anordnungen, bei welchen sich der Zweck wie bei den gewöhnlichen Gewichtswagen durch ein verstellbares, während des Spieles der Wage aber fest mit einem Teil derselben verbundenes Reguliergewicht erreichen läfst und man würde den Gleichungswagen nach Figur 5, 6 und 8 ein solches Reguliergewicht hinzufügen können.

Indessen bietet sich ein ganz allgemeines und einfaches Mittel, wenn es sich schlechthin nur um die Vermeidung labiler Gleichgewichtslagen handelt und die Frage der Empfindlichkeit nicht aufgeworfen

wird. Kehrt man nämlich sämtliche Kräfte eines beliebigen Systems um, so unterscheiden sich die Arbeiten der beiden Systeme bei einer und derselben virtuellen Verrückung offenbar nur durch das Vorzeichen. Da nun für labile Gleichgewichtssysteme die virtuelle Arbeit bis auf eine positive unendlich kleine Gröfse zweiter Ordnung verschwindet, so entsteht durch Umkehrung sämtlicher Kräfte eines solchen Systems ein anderes, dessen virtuelle Arbeit bis auf eine negative unendlich kleine Gröfse zweiter Ordnung verschwindet, d. h. ein stabiles Gleichgewichtssystem. Wenn man also einen Versuch mit irgend einer Gleichungswage unter Umkehrung sämtlicher Kraftrichtungen wiederholt, so darf man sich auf die Beobachtung stabiler — oder indifferenter — Gleichgewichtslagen beschränken.

Das Verhalten des Virials und des Momentes eines stationären Kräftesystems bei der Bewegung des starren Körpers.

Von Karl Heun in Berlin.

Die Statik beschäftigte sich zunächst mit der Reduktion von Kräften, welche auf ein Massensystem von bekannter Konstitution in einer bestimmten Lage desselben wirken und leitete hieraus unmittelbar die *Gleichgewichtsbedingungen* ab.

An diese Untersuchungen schlofs sich dann die Frage über die *Sicherheit* des betrachteten Gleichgewichtszustandes, wodurch man Veranlassung erhielt, eine statische Gröfse näher zu verfolgen, deren Verhalten bei der Bewegung des Systems geeignet schien, den verlangten Aufschlufs zu geben.

Diese Gröfse trat — in expliziter Form — in den Untersuchungen von Lagrange (Méc. anal. 2. éd. t. 1, pag. 65—73) auf, ohne einen besonderen Namen zu erhalten. Auch war die Betrachtung derselben auf ein Kräftesystem beschränkt, für welches ein Potential existiert. Später wurde sie in allgemeiner Auffassung von Möbius und Minding eingehender untersucht und endlich durch Clausius durch die Bezeichnung „*Virial*“ als feststehender Begriff der Statik gekennzeichnet.

Das Virial ist definiert als die Summe der Produkte der Abstände der Massenpunkte des Systems von einem festen Bezugspunkte in die Projektionen der Kräfte auf diese Strecken — oder in der Sprache der

Vektoranalysis[1]) — als die Summe der *inneren* Produkte der Vektoren der Massenpunkte in die Vektoren der zugehörigen äufseren Kräfte.

Bei jeder Bewegung des Systems wird also das Virial in doppelter Hinsicht eine Änderung erleiden, indem sowohl die Vektoren der Angriffspunkte andere werden als auch gleichzeitig jede Kraft ihre Gröfse und Richtung ändert.

Aber schon bei der Formulierung des *Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten* hat man nicht die *vollständige* Variation des Virials betrachtet, sondern eine *partielle*, welche durch die Voraussetzung der Invarianz des gesamten Kräftesystems gekennzeichnet ist. Nach dieser Auffassung sind die Gleichgewichtsbedingungen gegeben durch das Verschwinden der ersten Variation des Virials für ein System möglicher Verschiebungen, wobei alle Vektoren, welche die wirkenden Kräfte darstellen, unverändert bleiben.

Der Bereich der möglichen Bewegungen des Systems der Angriffspunkte ist noch aufserdem in sofern räumlich beschränkt, als im Allgemeinen nur infinitesimal benachbarte Positionen und Konfigurationen des Systems zulässig sind.

Man erfährt demgemäfs aus dem Ansatz des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten unmittelbar nichts über das statische Verhalten des Systems, sobald die aufgefundene Gleichgewichtslage um endliche Beträge überschritten ist.

Bedenkt man aber, dafs das Lagrangesche Gleichgewichtsprinzip — unter Voraussetzung des Systems der möglichen Bewegungen aller Angriffspunkte der Kräfte — auch für jede Position, welche nicht durch das Gleichgewicht ausgezeichnet ist, die vollständige *Reduktion* des Kräftesystems auszuführen gestattet, so erkennt man, dafs diese weitergehende Frage nach dem Verlauf der statischen Beziehungen aufserhalb der Gleichgewichtslagen hiermit ebenfalls prinzipiell erledigt ist. Auch die Invarianz des Kräftesystems aufserhalb des infinitesimalen Bereiches, für welchen das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zum Ansatz kommt, ist für das allgemeine Reduktionsproblem nicht erforderlich.

Dennoch hat die „*Astatik*", wie sie in den wesentlichen Grundzügen von Möbius, Minding und Darboux ausgebildet vorliegt, nur *stationäre Kräftesysteme* betrachtet, also durchgehends die Annahme

1) Als Anhang ist am Schlusse dieser Arbeit eine kleine Legende der Vektorrechnung hinzugefügt, welche die hier gebrauchte Bezeichnungsweise erläutert und nötigenfalls die Umsetzung der Vektorformeln in die entsprechenden Formeln der Koordinatengeometrie ohne weiteres ersichtlich macht.

gemacht, dafs jede Kraft in unveränderlicher Richtung und Gröfse während der Bewegung an ihrem Angriffspunkte haftet.

Natürlich haben die Sätze der Astatik in Folge dieser einschränkenden Bedingung ein ziemlich eng begrenztes Anwendungsgebiet, aber sie besitzen auch — aus demselben Grunde — ein so einheitliches und eigenartiges Gepräge, dafs sie in ihrer gegenwärtigen Ausbildung als eins der schönsten Kapitel der elementaren Mechanik gelten können.

In methodischer Hinsicht macht sich jedoch in den vorhandenen Darstellungen der Astatik ein deutlich fühlbarer Mangel geltend. Man vermifst nämlich eine einheitliche Quelle, aus welcher die verschiedenen Resultate ungezwungen abgeleitet werden. Statt dessen begegnet man einer ganzen Reihe von einander unabhängiger und willkürlicher Auffassungen (astatische Paare), welche den Überblick beim Studium unnützerweise erschweren und auch wohl manche Sätze haben übersehen lassen, die auf geradem Wege liegen, wenn man nur den Ausgangspunkt richtig gewählt hat.

Wir gehen bei den nachfolgenden Untersuchungen von der Frage aus: Welche Veränderungen erleiden das Virial und das Moment eines stationären Kräftesystems in Folge der elementaren endlichen Bewegungen eines starren Körpers?

Es ergeben sich dann für die Translation, Rotation und die Schraubenbewegung äufserst einfache und übersichtliche Formeln, deren Diskussion die Sätze der Astatik als direkte Folgerungen liefert. Hierbei treten zwei zu einander konjugierte Vektoren $\overline{G}$ und $\overline{F}$ auf, welche durch das Darbouxsche Centralellipsoid geometrische Deutung finden.

Die Eigenschaften der Centrallinie, der Centralebene, sowie der Minding-Darbouxsche Fokalsatz hätten sich ebenfalls angliedern lassen. Doch konnte diese Ausführung unterbleiben, da die allgemeinen Entwickelungen soweit geführt sind, dafs der Zusammenhang dieses Teils der Astatik mit den hier mitgeteilten Virial- und Momentformeln leicht herstellbar ist.

Prinzipiell wichtiger wäre eine Ausdehnung der hier dargelegten Methode auf Gelenksysteme, welche aus starren Gliedern bestehen, um dadurch einmal die schon von Schell[1]) aufgeworfene Frage zur Entscheidung zu bringen, unter welchen Bedingungen die Verfolgung des Virials und des Momentes zur Festlegung des statischen Verhaltens eines stationären Kräftesystems in diesem erweiterten Falle ausreicht. Vielleicht findet dieses interessante Problem gelegentlich eine Bearbeitung im Sinne der elementaren Astatik.

---

1) Theorie der Bewegung und der Kräfte 2. Aufl. Bd. 2 S. 277—278.

A. Einfluſs der Translation auf das Virial und das Moment.

1. *Einführung des Virials.* Der Vektor $\bar{k}$ bezeichne nach Gröſse und Richtung eine Elementarkraft, die an einem bestimmten Punkte eines materiellen Systems angreift. Ihren Angriffspunkt beziehen wir durch den Vektor $\bar{x}$ auf einen bestimmten Punkt O des Raumes und bilden das innere Produkt

$$V = \bar{x}\bar{k}.$$

Die Gröſse V wird dann das „Virial" der Elementarkraft $\bar{k}$ genannt. Für ein System erhalten wir dann durch Summation über alle Punkte desselben, an welchen Kräfte angreifen,

$$V = \Sigma \bar{x}\bar{k}.$$

V wird dann das Virial des betrachteten Systems genannt. Einen solchen Ausdruck kann man im Besonderen für einen starren Körper, ein Gelenksystem von starren Gliedern oder auch für ein elastisches System aufstellen und im einzelnen untersuchen.

Variieren wir in V alle Vektoren $\bar{x}$ und lassen die $\bar{k}$ unverändert, so erhalten wir

(1) $$\delta_x V = \Sigma \delta\bar{x}\bar{k},$$

also die virtuelle Arbeit der Kräfte $\bar{k}$ in der Auffassung Lagranges. Das Verschwinden dieser partiellen Variation des Systemvirials V ist die allgemeine Gleichgewichtsbedingung der Statik. Sie sagt nichts über den *Fortbestand des Gleichgewichts* aus, wenn man endliche Bewegungen des Systems in Betracht zieht. Wir nennen deshalb das durch die Gleichung

(2) $$\delta_x V = 0$$

definierte Gleichgewicht eines Systems das *Positionsgleichgewicht* desselben.

Um die Gleichgewichtsbedingungen einer bestimmten Systemgattung nach Gl. (2) in expliziter Form aufstellen zu können, muſs man einen analytischen Ausdruck der Variation $\delta\bar{x}$ für jeden Angriffspunkt einer Elementarkraft haben. Für das starre System ist $\delta\bar{x}$ seit Euler bekannt, nämlich

(3) $$\delta\bar{x} = \delta\bar{c} - \overline{\eta x} \cdot \delta\theta.$$

Hierin bedeutet $\delta\bar{c}$ die virtuelle Translation aller Systempunkte, $\bar{\eta}$ die Achse der virtuellen Rotation und $\delta\theta$ die Amplitude der letzteren. Die Gleich. (2) nimmt jetzt die Form an:

$$\delta\bar{c} \cdot \Sigma\bar{k} + \delta\theta\Sigma\overline{\eta x}\bar{k} = 0$$

oder

$$\delta \bar{c} \cdot \Sigma \bar{k} + \delta \theta \, \Sigma \overline{x \bar{k} \bar{\eta}} = 0.$$

Hieraus folgt das bekannte Resultat

$$\Sigma \bar{k} = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma \overline{x \bar{k}} = 0.$$

2. *Einführung des Momentes.* Wir setzen im Folgenden

$$\Sigma \bar{k} = \bar{k}^* \quad \text{und} \quad \Sigma \overline{x \bar{k}} = \overline{M}.$$

$\bar{k}^*$ ist der Vektor der „Resultantkraft", $\overline{M}$ der Vektor des resultierenden Momentes aller Kräfte des Systems, oder — wenn man will — auch die Resultante aller „Elementarmomente" $\overline{x \bar{k}}$.

Wir bilden nun — nach Analogie der Gleichung (1) — auch die folgende

(4) $$\delta_x \overline{M} = \Sigma \overline{\delta x k}$$

und untersuchen die statische Bedeutung derselben für das starre System. Die Berücksichtigung der Gleich. (3) ergiebt sofort:

$$\delta_x \overline{M} = \overline{\delta c k^*} + \Sigma \overline{(\eta x) k} \cdot \delta \theta.$$

Nun ist aber

$$\overline{(\eta x) k} = = (\bar{x} \bar{k}) \cdot \bar{\eta} + (\bar{\eta} \bar{k}) \cdot \bar{x}.$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$\Sigma (\bar{\eta} \bar{k}) \cdot \bar{x} = \overline{G},$$

so dafs wir für die rechtwinkligen Komponenten[1]) dieses Vektors $\overline{G}$ die folgenden Ausdrücke haben

(6) $$\begin{cases} G_1 = A_{11} \eta_1 + A_{12} \eta_2 + A_{13} \eta_3, \\ G_2 = A_{21} \eta_1 + A_{22} \eta_2 + A_{23} \eta_3, \\ G_3 = A_{31} \eta_1 + A_{32} \eta_2 + A_{33} \eta_3, \end{cases}$$

worin

$$A_{\nu\mu} = \Sigma x_\nu k_\mu$$

bedeutet.

Die Gleichung für $\delta_x \overline{M}$ geht jetzt über in

(7) $$\delta_x \overline{M} + \overline{\delta c k^*} = [- V \cdot \bar{y} + \overline{G}] \delta \theta.$$

Soll also

(8) $$\delta_x \overline{M} = 0$$

sein, so müssen die folgenden Komponentengleichungen bestehen

1) Die rechtwinkligen Komponenten beliebiger Vektoren ($\bar{\eta}$, $\bar{x}$, $\bar{k}$, $\overline{M}$ u. s. w.) sind im Folgenden in derselben Weise bezeichnet, wie oben die Komponenten von $\overline{G}$.

$$(9)\quad \begin{cases} \delta c_2 k_3^* - \delta c_3 k_2^* - V\eta_1 + G_1 = 0, \\ \delta c_3 k_1^* - \delta c_1 k_3^* - V\eta_2 + G_2 = 0, \\ \delta c_1 k_2^* - \delta c_2 k_1^* - V\eta_3 + G_3 = 0. \end{cases}$$

Damit diese Gleichungen für ganz beliebige Verschiebungen $(\delta \overline{c})$ und beliebige Rotationen $(\overline{\eta}\delta\theta)$ identisch erfüllt sind, müssen also die folgenden Gleichungen bestehen:

$$(10)\quad \begin{cases} \varkappa_1 = 0, & A_{11} = 0, & A_{12} = 0, & A_{13} = 0, \\ \varkappa_2 = 0, & A_{21} = 0, & A_{22} = 0, & A_{23} = 0, \\ \varkappa_3 = 0, & A_{31} = 0, & A_{32} = 0, & A_{33} = 0. \end{cases}$$

Der Körper ist dann für ein „stationäres" Kräftesystem in *jeder* Lage im Gleichgewicht.

Während also die Bedingung $\delta_x V = 0$ das *Positionsgleichgewicht* des Systems ausdrückt, ist $\delta_x \overline{M} = 0$ die analoge Bedingung des *astatischen* Gleichgewichts.

Statt der Gleichungen (10) können wir auch kürzer schreiben

$$(11)\quad \overline{k}^* \equiv 0, \quad \overline{G} \equiv 0.$$

Der Ausdruck

$$G_1 = A_{11}\eta_1 + A_{12}\eta_2 + A_{13}\eta_3$$

nimmt mit Rücksicht auf die statischen Gleichungen

$$M_1 = A_{23} - A_{32}, \quad M_2 = A_{31} - A_{13}, \quad M_3 = A_{12} - A_{21}$$

die folgende Form an:

$$G_1 = A_{11}\eta_1 + A_{21}\eta_2 + A_{31}\eta_3 + \eta_2 M_3 - \eta_3 M_2.$$

Ganz analoge Ausdrücke erhält man für die beiden anderen Komponenten G_2 und G_3 entweder direkt oder durch zyklische Vertauschung der Indices. Setzen wir nun

$$(12)\quad \begin{cases} F_1 = A_{11}\eta_1 + A_{21}\eta_2 + A_{31}\eta_3, \\ F_2 = A_{12}\eta_1 + A_{22}\eta_2 + A_{32}\eta_3, \\ F_3 = A_{13}\eta_1 + A_{23}\eta_2 + A_{33}\eta_3, \end{cases}$$

so ist durch die Komponenten ein neuer Vektor $\overline{F}$ bestimmt, der mit $\overline{G}$ in der folgenden Beziehung steht

$$(13)\quad \overline{G} = \overline{F} + \overline{\eta M}.$$

Wir nennen $\overline{F}$ den zu $\overline{G}$ *konjugierten* Vektor.

3. *Einfluſs der Translation des Systems auf das Virial.* Da wir das Virial auf einen festen Punkt O des Raumes bezogen haben, so wird im allgemeinen jede Bewegung des Körpers eine Änderung des Virialwertes zur Folge haben. Für *Translationen* ist dieses Ver-

halten unmittelbar erkennbar und auch schon von Moebius behandelt worden[1]), weshalb hier einige kurze Andeutungen genügen.

Der Vektor des Angriffspunktes der Kraft $\bar{k}$ in der ursprünglichen Lage des Körpers sei $\bar{x}$. Derselbe gehe durch Translation um die Strecke $\bar{c}$ über in $\bar{x}^{(c)}$. Dann gelten für alle Angriffspunkte des Systems Gleichungen von der Form:

$$\bar{x}^{(c)} = \bar{x} + \bar{c}.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation und Addition

$$\Sigma \bar{x}^{(c)} \bar{k} = \Sigma \bar{x} \bar{k} + \bar{c} \Sigma \bar{k},$$

oder

(14) $$V^{(c)} = V + \bar{c}\bar{k}^*,$$

wenn wir wieder mit $\bar{k}^*$ die Resultante des Kräftesystems bezeichnen.

Steht die Richtung der Translation $\bar{c}$ auf der Richtung der Resultanten $\bar{k}^*$ (also auch auf der Richtung der Zentralachse) senkrecht, so bleibt $V^{(c)}$ unverändert. Fällt dagegen $\bar{c}$ in die Richtung von $\bar{k}^*$, so ist die Veränderung von $V^{(c)}$ ein Maximum, insbesondere wird $V^{(c)} = 0$ für eine Translation in der Richtung von $\bar{h}^*$ um die Strecke

(15) $$c = -\frac{V}{k^*}.$$

Hierdurch ist in dem Körper eine *Ebene des verschwindenden Virials* bestimmt, die also auf der Zentralachse des Kräftesystems senkrecht steht. Im allgemeinen Falle wird $V^{(c)} = 0$ für die Translation um die Strecke

$$c = -\frac{V}{k^* \cos(\bar{k}^* \mid \bar{c})}$$

in einer Richtung, welche einen beliebigen Winkel $(\bar{k}^* \mid \bar{c})$ mit $\bar{k}^*$ bildet.

4. *Änderung des Momentes bei der Translation.* Der Gleichung (14) entspricht für äufsere Produkte die folgende

(14') $$\overline{M}^c = \overline{M} + \overline{c\bar{k}^*}.$$

Verschwindet also die Resultante $\bar{k}^*$ oder fällt dieselbe mit der Richtung der Translation zusammen, so ist diese Bewegung des starren Körpers ohne Einflufs auf das Moment des stationären Kräftesystems.

Steht dagegen $\bar{k}^*$ senkrecht auf $\bar{c}$, so findet die stärkste Änderung des Momentes statt. Insbesondere wird $\overline{M}^c = 0$ für eine Translation senkrecht zu $\bar{k}^*$ um die Strecke

(15') $$c = \frac{M}{k^*}.$$

1) Man vgl. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Bd. 2, S. 273—275, wo diese Betrachtungen ausführlich dargestellt sind.

Man kann also zu jedem festen Körper, auf welchen ein stationäres Kräftesystem wirkt, einen Kreiscylinder vom Radius $\frac{M}{k^*}$ um k^* als Achse konstruieren, so dafs jede Seitenlinie desselben eine Linie verschwindenden Momentes bildet.

Im allgemeinen Falle wird $\bar{c}$ mit $\bar{k}^*$ einen Winkel einschliefsen, welcher von Null verschieden ist. Alsdann kann nach Gleichung (14′) immer ein verschwindender Wert des Momentes durch eine Translation erreicht werden, wenn in der Richtung von $\bar{c}$ die Strecke

$$c = -\frac{M}{k^* \sin(\bar{k}^* \mid \bar{c})}$$

zurückgelegt wird.

Für jede Translation lassen sich die Komponenten des neuen Momentes M^c aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} M_1^c &= M_1 + c_2 k_3^* - c_3 k_2^* \\ M_2^c &= M_2 + c_3 k_1^* - c_1 k_3^* \\ M_3^c &= M_3 + c_1 k_2^* - c_2 k_1^* \end{aligned}$$

berechnen.

B. Veränderung des Virials und des Momentes infolge einer Rotation um eine beliebige feste Achse des Systems.

5. *Endliche Drehungen des starren Systems.* Die Rotation des starren Körpers erfolge um eine feste Achse OA. Wir tragen von einem willkürlichen Anfangspunkte O aus auf derselben die Einheitsstrecke $\overline{OE} = \bar{\eta}$ ab und fällen von einem beliebigen Punkte X des Systemes auf diese Drehachse das Lot $\overline{XP} = \bar{e}$. Infolge der Rotation um den Winkel θ wird der Punkt X in die Lage X^θ übergeführt. Die entsprechenden Vektoren $\overline{OX}$ und $\overline{OX^\theta}$ mögen durch $\bar{x}$ und $\bar{x}^\theta$ bezeichnet werden. Der Vektor $\bar{e}$ geht über in $\bar{e} + \Delta\bar{e}$ so dafs $\bar{x}^\theta - \bar{x} = \Delta\bar{e}$ zu setzen ist. Nun folgt aus der Raumanschauung unmittelbar

$$\overline{e(e + \Delta e)} = e^2 \sin\theta \cdot \bar{\eta}$$

$$\bar{e}\overline{e + \Delta e} = e^2 \cos\theta$$

und hieraus

$$\overline{e \cdot \Delta k} = e^2 \sin\theta \cdot \bar{\eta} \quad \text{und} \quad \bar{e}\overline{\Delta e} = -2e^2 \sin\frac{\theta}{2}\cdot$$

Benutzt man also die identische Gleichung

$$e^2 \cdot \Delta\bar{e} = (\bar{e}\overline{\Delta e}) \cdot \bar{e} + (\overline{e \cdot \Delta e})\, e,$$

so erhält man die Beziehung

$$\Delta\bar{e} = -2\sin^2\frac{\theta}{2} \cdot \bar{e} + \sin\theta \cdot \overline{\eta e}.$$

Nun ist in dem rechtwinkligen Dreieck OPX

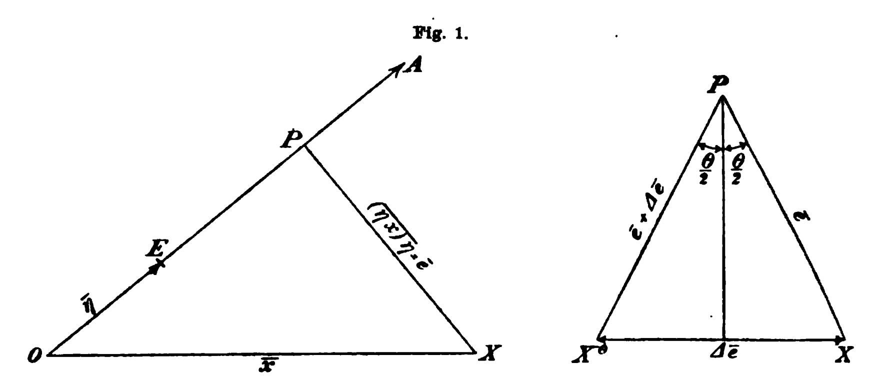
$$\overline{\eta e} = \overline{\eta x}$$

und infolgedessen

$$\bar{x}^\theta - \bar{x} = \Delta \bar{e} = \sin\theta \cdot \overline{\eta x} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\,\overline{\eta(\eta x)}. \tag{16}$$

Die Komponenten dieses Ausdruckes finden sich auch für schiefwinklige Koordinaten bei G. S. Ohm. Analyt. Geometrie des Raumes. 1849. pag. 123 mit der Bemerkung begleitet, daſs diese Formeln sich beim Übergang zu rechtwinkligen Koordinaten nicht vereinfachen, sondern dieselbe Gestalt beibehalten.

Fig. 1.



6. *Die Änderung des Virials eines stationären Kräftesystems am starren Körper.* Um die Beziehung zwischen

$$V = \Sigma\bar{x}\cdot\bar{k} \quad \text{und} \quad V^\theta = \Sigma\bar{x}^\theta\cdot\bar{k}$$

herzuleiten, brauchen wir nur mit Hilfe der Gleichung

$$\bar{x}^\theta = \bar{x} + \sin\theta\cdot\overline{\eta x} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\,\overline{\eta(\eta x)}$$

das innere Produkt $\bar{x}\bar{k}$ zu bilden und die Summation über alle Kräfte $\bar{k}$ des Systems zu erstrecken. Dies ergiebt

$$V^\theta = V + \sin\theta\cdot\Sigma\overline{\eta x k} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\,\Sigma\overline{\eta(\eta x)}\cdot\bar{x}. \tag{17}$$

Nun ist aber

$$\overline{yxk} = \overline{xky}.$$

Setzen wir also, wie früher

$$\Sigma\overline{xk} = \overline{M},$$

so wird

$$\Sigma\overline{\eta xk} = \overline{M\eta},$$

also gleich dem äuſseren Produkte des resultierenden Momentes aller Kräfte in Bezug auf den Punkt O in den Einheitsvektor $\bar{\eta}$, welcher auf der Rotationsachse aufgetragen ist.

Ferner wird

$$\overline{\eta(\eta x)k} = \overline{(\eta x)k} \cdot \bar{\eta} = -(\bar{x}\bar{k})\bar{\eta}\bar{\eta} + (\bar{\eta}\bar{k})\bar{x}\bar{\eta}$$

oder durch Ausführung der Summation mit Rücksicht auf die Gleichung (5)

$$\Sigma\overline{\eta(\eta x)k} = -V + \bar{G}\cdot\bar{\eta}.$$

Zur Abkürzung führen wir noch die Bezeichnungen

$$\dot{V} = \bar{M}\bar{\eta}, \quad \ddot{V} = -V + \bar{G}\bar{\eta} \tag{18}$$

ein, wodurch die Gleichung (17) die folgende Form annimmt:

$$V^\theta = V + \dot{V}\sin\theta + \ddot{V}(1-\cos\theta). \tag{19}$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch Differentiation nach θ:

$$\frac{dV^\theta}{d\theta} = \dot{V}\cos\theta + \ddot{V}\sin\theta$$

und ferner

$$\frac{d^2V^\theta}{d\theta^2} = -\dot{V}\sin\theta + \ddot{V}\cos\theta.$$

Mithin ist

$$\dot{V} = \left(\frac{dV^\theta}{d\theta}\right)_{\theta=0} = \frac{\delta V}{\delta\theta}, \tag{20}$$

$$\ddot{V} + \left(\frac{d^2V^\theta}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = \frac{\delta^2 V}{\delta\theta^2}. \tag{21}$$

Hier dient das Symbol δ nur zur Bezeichnung der betreffenden Derivierten für den speziellen Argumentwert $\theta = 0$.

Statt des Ausdruckes 19) können wir also auch schreiben

$$V^\theta = V + \frac{\delta V}{\delta\theta}\cdot\sin\theta + \frac{\delta^2 V}{\delta\theta^2}\cdot(1-\cos\theta). \tag{22}$$

Im Allgemeinen genügt V^θ der homogenen, linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3V^\theta}{d\theta^3} + \frac{dV^\theta}{d\theta} = 0, \tag{23}$$

welcher die Gleichung (19) als partikuläres Integral genügt.

7. *Die statische Bedeutung der Gröfsen $\dot{V}$ und $\ddot{V}$.* Aus der ersten der Gleichungen (18)

$$\dot{V} = \bar{M}\bar{\eta} = \frac{\delta V}{\delta\theta}$$

erkennt man sofort, dafs $\dot{V}$ verschwindet, wenn $\bar{M}$ auf $\bar{\eta}$ senkrecht steht. Alsdann sind die Kräfte in der ursprünglichen Lage des Systems ($\theta = 0$) in Bezug auf die Achse $\bar{\eta}$ im Gleichgewicht. Die Gröfse $\dot{V}$

ist also die „Gleichgewichtsfunktion“ für die Achse η. Dann ist aber nach Gleich. (21) die Gröfse $\ddot{V}$ die „Sicherheitsfunktion“ des Gleichgewichtes für die Achse $\overline{\eta}$ (cf. Möbius, Statik).

Aus der Gleichung

$$\ddot{V} = - V + \overline{G}\overline{\eta}$$

geht unmittelbar hervor, dafs die Sicherheitsfunktion gleich dem negativen Virial wird, sobald der Vecktor $\overline{G}$ auf der Achse $\overline{\eta}$ senkrecht steht. In diesem besonderen Falle entscheidet also das Vorzeichen des Virials über die Sicherheit oder Unsicherheit des etwa eintretenden Gleichgewichts.

Differentiiert man den Ausdruck für die Gleichgewichtsfunktion

$$\dot{V} = \overline{M}\overline{\eta}$$

nach θ in dem Sinne, welcher durch das Symbol δ ausgedrückt wird, so erhält man eine weitere Darstellungsform für die Sicherheitsfunktion, nämlich

(24) $$\ddot{V} = \frac{\delta \overline{M}}{\delta \theta} \cdot \overline{\eta} = \dot{\overline{M}}\overline{\eta},$$

woraus man sofort erkennt, dafs das Gleichgewicht um die Achse $\overline{\eta}$ für $\dot{V} = 0$ „neutral“ ist, wenn der Vektor $\dot{\overline{M}}$ auf $\overline{\eta}$ senkrecht steht.

Im allgemeinen Falle mufs man $\dot{V}$ und $\ddot{V}$ nach den Gleich. (18) direkt bestimmen, welche für rechtwinklige Komponenten der Vektoren $\overline{M}$, $\overline{G}$ und $\overline{\eta}$ die Form annehmen:

(25) $$\dot{V} = M_1 \cdot \eta_1 + M_2 \cdot \eta_2 + M_3 \cdot \eta_3,$$

(26) $$\ddot{V} = - V + G_1 \cdot \eta_1 + G_2 \cdot \eta_2 + G_3 \cdot \eta_3.$$

Mit Rücksicht auf die Gleich. (6) heifst der Ausdruck für die Sicherheitsfunktion auch

(27) $$\ddot{V} = -(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + A_{11}\eta_1^2 + A_{22} + \eta_2^2 + A_{33}\eta_3^2 \\ + (A_{12} + A_{21})\eta_1\eta_2 + (A_{23} + A_{32})\eta_2\eta_3 + (A_{31} + A_{13})\eta_3\eta_1.$$

Alle Achsen $\overline{\eta}$, für welche $\ddot{V}$ verschwindet, liegen auf dem Kegel zweiten Grades

(28) $$(A_{22} + A_{33})\eta_1^2 + (A_{33} + A_{11})\eta_2^2 + (A_{11} + A_{22})\eta_3^2 + (A_{12} + A_{21})\eta_1\eta_2 \\ + (A_{23} + A_{32})\eta_2\eta_3 + (A_{31} + A_{13})\eta_3\eta_1 = 0.$$

Wegen der eingehenderen Diskussion vergl. m. Möbius, Lehrbuch der Statik. Bd. 1. Kap. 9. Doch möchte ich ausdrücklich bemerken, dafs in den früheren Darstellungen der Sicherheitsfunktion $\ddot{V}$ immer gleichzeitig die Gleichgewichtsbedingung $\dot{V} = 0$ berücksichtigt ist, was

bei den obigen Entwicklungen keineswegs geschehen ist. Dementsprechend hat hier $\ddot{V}$ eine etwas allgemeinere Bedeutung als in den bisherigen Lehrbüchern der Statik. Streng genommen hätten wir $\ddot{V}$ erst dann als „Sicherheitsfunktion" bezeichnen dürfen, wenn zugleich $\dot{V} = 0$ ist. In der allgemeinen Gleichung (19) ist $\ddot{V}$ von $\dot{V}$ thatsächlich unabhängig.

Nehmen wir nun an, $\dot{V}$ und $\ddot{V}$ seien für eine bestimmte Anfangsposition des Systems von Null verschieden, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{d V^{\theta}}{d\theta} = \dot{V}\cos\theta + \ddot{V}\sin\theta$$

derjenige Wert des Winkels θ, für welchen $\frac{d V^{\theta}}{d\theta}$ zunächst gleich Null wird, nämlich

$$\text{(29)} \qquad \operatorname{tg}\theta' = -\frac{\dot{V}}{\ddot{V}}.$$

Ist dieser Winkel θ' erreicht, so geht das System in eine Gleichgewichtslage in Bezug auf die feste Drehachse $\bar{\eta}$ über. Der zugehörige Wert von $\frac{d^2 V^{\theta}}{d\theta^2}$ ist $\sqrt{\dot{V}^2 + \ddot{V}^2}$.

Insbesondere gelten für diesen Fall die folgenden einfachen Sätze:

Aus einer gegebenen Gleichgewichtslage ($\dot{V} = 0$) wird eine neue Gleichgewichtslage immer durch eine Drehung um 180° erreicht.

Bei jeder solchen Umwendung ändert $\ddot{V}^{\theta}$ sein Vorzeichen.

Die erreichten Gleichgewichtslagen sind also im Allgemeinen abwechselnd stabil und labil in Bezug auf die feste Drehachse.

Ist $\ddot{V} = 0$ und gleichzeitig $\dot{V} \lessgtr 0$, so wird die Gleichgewichtslage durch eine Drehung um 90° erreicht.

Das Gleichgewicht ist astatisch, wenn $\dot{V}$ und $\ddot{V}$ zugleich verschwinden. Das Virial bleibt in diesem besonderen Falle in Bezug auf Drehungen unveränderlich.

Das Vorstehende mag genügen, um zu zeigen, wie alle Eigenschaften eines stationären Kräftesystems, welches auf einen starren Körper mit fester Drehachse wirkt, unmittelbar aus der Grundgleichung (19) folgen.

8. *Einfluſs der Rotation auf das Moment eines stationären Kräftesystems.* Führt man in der Gleichung

$$\overline{M}^{\theta} = \Sigma\overline{x^{\theta} k}$$

für $\bar{x}^{\theta}$ den Wert

$$x^{\theta} = \bar{x} + \sin\theta\cdot\overline{\eta x} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\overline{\eta(\eta x)}$$

ein, so erhält man zunächst

$$\overline{M^\theta} = \overline{M} + \sin\theta \cdot \Sigma\overline{(\eta x)k} + 2\sin^2\frac{\theta}{2} \cdot \Sigma\overline{[\eta(\eta x)]k}.$$

Nun ist nach den Regeln der Vektorrechnung

$$\overline{(\eta x)k} = -(\overline{xk}) \cdot \overline{\eta} + (\overline{\eta k}) \cdot \overline{x},$$

also nach Ausführung der Summation

$$\Sigma\overline{(\eta x)k} = -V\overline{\eta} + \overline{G} = \overline{\dot{M}}. \tag{30}$$

Ferner ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleich. (12) der Ausdruck

$$\Sigma\overline{[\eta(\eta x)]k} = \Sigma(\overline{\eta x})\overline{\eta k} - \Sigma\overline{xk} = \overline{\eta F} - \overline{M} = \overline{\ddot{M}},$$

oder, wenn man die Gleichung (13) benutzt:

$$\overline{\ddot{M}} = \overline{\eta G} - \overline{\eta(\eta M)} - \overline{M} = \overline{\eta G} - (\overline{\eta M}) \cdot \overline{\eta} = \overline{\eta G} - \dot{V} \cdot \overline{\eta}.$$

Schreibt man also das Resultat in der Form

$$\overline{M^\theta} = \overline{M} + \overline{\dot{M}}\sin\theta + \overline{\ddot{M}}(1 - \cos\theta), \tag{31}$$

so ist

$$\overline{\dot{M}} = -V \cdot \overline{\eta} + \overline{G}, \tag{32}$$

$$\overline{\ddot{M}} = -\dot{V} \cdot \overline{\eta} + \overline{\eta G}, \tag{33}$$

womit alle in Betracht kommenden Gröfsen bestimmt sind.

Den Gleichungen (22) und (23) entsprechen also für Momente die vollkommen analogen Ausdrücke:

$$\overline{M^\theta} = \overline{M} + \frac{\partial \overline{M}}{\partial\theta} \cdot \sin\theta + \frac{\partial^2 \overline{M}}{\partial\theta^2} \cdot (1 - \cos\theta) \tag{34}$$

und

$$\frac{d^3\overline{M^\theta}}{d\theta^3} + \frac{d\overline{M^\theta}}{d\theta} = 0. \tag{35}$$

Aufserdem können noch die folgenden Formeln in Anwendung kommen:

$$\frac{d\overline{M^\theta}}{d\theta} = \overline{\dot{M}}\cos\theta + \overline{\ddot{M}}\sin\theta, \tag{36}$$

$$\frac{d^2\overline{M^\theta}}{d\theta^2} = -\overline{\dot{M}}\sin\theta + \overline{\ddot{M}}\cos\theta. \tag{37}$$

9. *Die statische Bedeutung des Vektors $\overline{\dot{M}}$.* Aus der Gleich. (32) schliefst man unmittelbar, dafs der Vektor $\overline{\dot{M}}$ mit den Vektoren $\overline{\eta}$ und $\overline{G}$ immer in einer Ebene liegt. Man kann also $\overline{\dot{M}}$ stets durch eine Parallelogramm-Konstruktion finden, wenn aufser der Drehachse noch

der Vektor $\overline{G}$ bekannt ist. Ferner erkennt man, daſs das Verschwinden des Vektors $\dot{\overline{M}}$ das Zusammenfallen der Vektoren $\overline{G}$ und $\overline{\eta}$ in eine Richtung zur Folge hat.

Werden die Vektoren $\overline{M}$ und $\dot{\overline{M}}$ gleichzeitig Null, dann erhält man die bekannten Bedingungsgleichungen für das astatische Gleichgewicht um eine freie Drehachse, wie sie von **Möbius** aufgestellt sind. Aus der Gleich. (32) folgt nämlich

$$\begin{aligned}(-V + A_{11})\eta_1 + A_{12}\eta_2 + A_{13}\eta_3 &= 0,\\ A_{21}\eta_1 + (-V + A_{22})\eta_2 + A_{23}\eta_3 &= 0,\\ A_{31}\eta_1 + A_{32}\eta_2 + (-V + A_{33})\eta_3 &= 0.\end{aligned}$$

Die Existenz einer „Gleichgewichtsachse“ ist also an die bekannte Bedingung geknüpft:

$$\begin{vmatrix} -V + A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & -V + A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & -V + A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

In Gleichung (33) ist wegen $\overline{M} = 0$ auch $\dot{V} = 0$, und da $\overline{G}$ in der Richtung von $\overline{\eta}$ fällt, wird auch $\overline{\eta G} = 0$, folglich $\ddot{\overline{M}} = 0$. Es ist also in der That $\overline{M}^{\theta}$ für die Achse $\overline{\eta}$ dauernd gleich Null. Wird dagegen $\dot{\overline{M}} = 0$, ohne daſs gleichzeitig $\overline{M} = 0$ ist, so verschwindet $\ddot{\overline{M}}$ nicht mehr, fällt aber in die Richtung der Drehachse, wie man aus Gleich. (33) sofort erkennt.

Um den Einfluſs der Bedingungen $\dot{\overline{M}} = 0$, $\overline{M} \lesseqgtr 0$ zu erkennen, setzen wir in der allgemeinen Gleichung (31) $\ddot{\overline{M}} = -V \cdot \overline{\eta}$ und erhalten

$$\overline{M}^{\theta} = \overline{M} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\dot{V} \cdot \overline{\eta}.$$

Soll nun nach einer gewissen Drehung Gleichgewicht erreicht werden, so muſs

$$\overline{M} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\dot{V} \cdot \overline{\eta} = 0$$

werden. $\overline{M}$ fällt jetzt in die Richtung der Drehachse und die Amplitude der Rotation ist bestimmt durch die Gleichung

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\overline{M}}{2\dot{V}}} = \sqrt{\frac{M}{2M\cos(\overline{M}\,|\,\overline{\eta})}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Es wird also $\theta = 90^0$. Die neue Position ist charakterisiert durch das Wertsystem

$$\overline{M}^{\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \dot{\overline{M}}^{\frac{\pi}{2}} = \ddot{\overline{M}}, \quad \ddot{\overline{M}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Eine weitere Drehung um einen rechten Winkel ergiebt demnach

$$\overline{M}^{\pi} = \overline{\ddot{M}}, \quad \overline{\dot{M}}^{\pi} = 0, \quad \overline{\ddot{M}}^{\pi} = -\overline{\ddot{M}}$$

und hieraus

$$\overline{M}^{\frac{3}{2}\pi} = 0, \quad \overline{\dot{M}}^{\frac{3}{2}\pi} = -\overline{\ddot{M}}, \quad \overline{\ddot{M}}^{\frac{3}{2}\pi} = 0.$$

Berücksichtigt man, dafs $\overline{M} + \overline{\ddot{M}} = 0$ ist, so läfst sich das Verhalten des Kräftesystems durch das folgende Schema darstellen

θ	$\overline{M}$	$\overline{\dot{M}}$	$\overline{\ddot{M}}$
0	$\overline{M}$	0	$-\overline{M}$
$\frac{\pi}{2}$	0	$-\overline{M}$	0
π	$-\overline{M}$	0	$\overline{M}$
$\frac{3}{2}\pi$	0	$\overline{M}$	$0.$

Bei einer vollen Umdrehung wird also die Gleichgewichtslage zweimal erreicht.

10. *Die Bedeutung der Bedingungsgleichung* $\overline{\ddot{M}} = 0$. Die Definitionsgleichung

$$\overline{\ddot{M}} = \overline{\eta F} - \overline{M}$$

ergiebt für $\overline{\ddot{M}} = 0$ sofort die Relation

$$\overline{M} = \overline{\eta F},$$

und hieraus schliefst man

$$\overline{M}\bar{\eta} = 0 = \dot{V}, \quad \text{also} \quad \overline{\eta G} = 0.$$

Der Vektor $\overline{G}$ fällt jetzt in die Richtung der Drehachse. Bezeichnet man mit L einen skalaren Koeffizienten, so wird

$$\overline{G} = L \cdot \bar{\eta}$$

oder explizit

$$\begin{aligned} A_{11}\eta_1 + A_{12}\eta_2 + A_{13}\eta_3 &= L\eta_1 \\ A_{21}\eta_1 + A_{22}\eta_2 + A_{23}\eta_3 &= L\eta_2 \\ A_{31}\eta_1 + A_{32}\eta_2 + A_{33}\eta_3 &= L\eta_3 . \end{aligned}$$

Bestimmt man also L aus der kubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_{11} - L & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - L & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - L \end{vmatrix} = 0,$$

so kennt man drei Rotationsachsen $\bar{\eta}'$, $\bar{\eta}''$, $\bar{\eta}'''$ und die zugehörigen Vektoren $\overline{G}'$, $\overline{G}''$, $\overline{G}'''$ und kann alsdann nach der Gleichung

$$\overline{\dot{M}} = -V \cdot \bar{\eta} + \overline{G}$$

auch die zugehörigen Werte von $\dot{M}$ berechnen, sodafs in der Hauptgleichung

$$\overline{M}^{\theta} = \overline{M} + \overline{\dot{M}} \sin \theta$$

alle Gröfsen explizit bekannt sind.

Die Gleichung

$$0 = \overline{M} + \overline{\dot{M}} \sin \theta'$$

giebt

(38) $$\sin \theta' = \frac{-M}{\dot{M}}$$

für die Amplitude der nächsten Gleichgewichtslage um die *freie* Achse η. Nun ist aber

$$\overline{\dot{M}} = -V\bar{\eta} + L\bar{\eta} = (-V + L)\eta$$

also

$$\dot{M} = -V + L.$$

Die Gleichung (38) geht also über in

(39) $$\sin \theta' = \frac{M}{L - V}.$$

Setzt man ferner voraus, dafs sich das System anfangs im Gleichgewicht befindet ($\overline{M} = 0$), so wird $\theta' = 180^0$ und man erhält den bekannten Satz:

Um jede der drei auf einander senkrechtstehenden Rotationsachsen $\bar{\eta}'$, $\bar{\eta}''$, $\bar{\eta}'''$ *gewinnt man durch eine Drehung um zwei rechte Winkel eine neue Gleichgewichtslage.*

Der Zusammenhang dieser Überlegungen mit Darbaux' Theorie des *astatischen Zentralellipsoides*, welches unmittelbar aus den Vektoren $\overline{F}$ oder $\overline{G}$ gewonnen wird, ist ein so naheliegender, dafs hier jede weitere Ausführung in dieser Richtung überflüssig erscheint.

11. *Die Erzielung einer ersten Gleichgewichtslage, wenn das System ursprünglich nicht im Gleichgewicht ist.* Wir betrachten zunächst noch die folgende Bedingung:

(40) $$\overline{\eta F} = 0.$$

Setzen wir wieder

$$\overline{F} = L\bar{\eta},$$

so mufs L der kubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_{11} - L & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} - L & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - L \end{vmatrix} = 0$$

genügen. Diese ergiebt aber dieselben Wurzeln L', L'', L''', wie die Bedingung $\overline{\eta G} = 0$, während die zugehörigen Achsen $\bar{\eta}'$, $\bar{\eta}''$, $\bar{\eta}'''$ nicht mit den im vorigen Falle ($\overline{\ddot{M}} = 0$) betrachteten übereinstimmen, da $\overline{F}$ mit $\overline{G}$ nur dann identisch wird, wenn $M = 0$ ist.

Aus der Gleich. (40) folgt $\overline{\ddot{M}} = -\overline{M}$ und die allgemeine Gleichung wird

(41) $$\overline{M}^{\theta} = \overline{M}\cos\theta + \overline{\dot{M}}\sin\theta .$$

Soll also $\overline{M}^{\theta} = 0$ werden, so bestimmt sich der Winkel θ aus der Gleichung

(42) $$\operatorname{tg}\theta = -\frac{M}{\dot{M}} .$$

Da jetzt $\overline{M} = -\overline{\ddot{M}}$ wird, so ist

$$\overline{\dot{M}} = -V\bar{\eta} + \overline{F} = (-V + L)\bar{\eta}, \text{ also}$$

(43) $$\operatorname{tg}\theta = \frac{M}{L - V} .$$

Für $L = V$ wird die erste Gleichgewichtslage durch eine Drehung um *einen rechten Winkel* erreicht.

Besteht keine der Bedingungsgleichungen

$$\overline{\ddot{M}} = 0 \quad \text{oder} \quad \overline{\ddot{M}} = -\overline{M},$$

so kann nach der allgemeinen Formel

$$\overline{M}^{\theta} = \overline{M} + \overline{\ddot{M}} + \sin\theta\cdot\overline{\dot{M}} - \cos\theta\cdot\overline{\ddot{M}}$$

doch noch eine Gleichgewichtslage erreicht werden, wenn die Vektoren $\overline{M}$, $\overline{\dot{M}}$ und $\overline{\ddot{M}}$ *in einer Ebene* liegen. Aus der hierzu notwendigen Bedingung

$$0 = \overline{M} + \overline{\ddot{M}} + \sin\theta\cdot\overline{\dot{M}} - \cos\theta\cdot\overline{\ddot{M}}$$

folgt nämlich

(44) $$0 = \overline{M\dot{M}} + \overline{\ddot{M}\dot{M}} - \cos\theta\,\overline{\ddot{M}\dot{M}}$$

und hieraus

(45) $$0 = \overline{M\dot{M}\,\ddot{M}},$$

wonach in der That $\overline{M}$, $\overline{\dot{M}}$ und $\overline{\ddot{M}}$ komplanar sein müssen.

Die Gleichung (44) ergiebt für den Drehwinkel zur Erreichung der ersten Gleichgewichtslage

(46) $$2\sin^2\frac{\theta}{2} = -\frac{M\sin(\overline{\dot{M}}\,|\,\overline{M})}{\ddot{M}\sin(\overline{\dot{M}}\,|\,\overline{\ddot{M}})} .$$

Das Resultat wird etwas übersichtlicher, wenn man statt der Gleich. (44) die folgende bildet:

(47) $$0 = \overline{M\ddot{M}} + \sin\theta\cdot\overline{\dot{M}\ddot{M}} .$$

Dann ergiebt sich einfacher:

$$\sin\theta = -\frac{M \sin(\overline{\ddot{M}} \mid \overline{M})}{\dot{M}\sin(\overline{\ddot{M}} \mid \overline{\dot{M}})}, \tag{48}$$

und man erkennt sofort, dafs die Bedingung

$$\overline{\dot{M}} \sin(\overline{\ddot{M}} \mid \overline{\dot{M}}) > M \sin(\overline{\ddot{M}} \mid \overline{M}) \tag{49}$$

bestehen mufs, damit θ einen reellen Werth annimmt.

Aus den Gleichungen (46) und (48) folgt noch durch Division

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = -\frac{\dot{M}\sin(\overline{\dot{M}} \mid \overline{M})}{\ddot{M}\sin(\overline{\ddot{M}} \mid \overline{M})}. \tag{50}$$

12. *Geometrischer Ort der Achsen* ($\bar{\eta}$) *für die zunächst erreichbare Gleichgewichtslage.* Der Vektor $\overline{\dot{M}}$ ist in Bezug auf $\bar{\eta}$ von der ersten Dimension, der Vektor $\overline{\ddot{M}}$ dagegen von der zweiten Dimension, wie man aus den Definitionsgleichungen (32) und (33) sofort erkennt. Nun ist aber die Bedingung

$$\overline{M \dot{M}}\, \overline{\ddot{M}} = 0$$

gleichbedeutend mit der Determinante

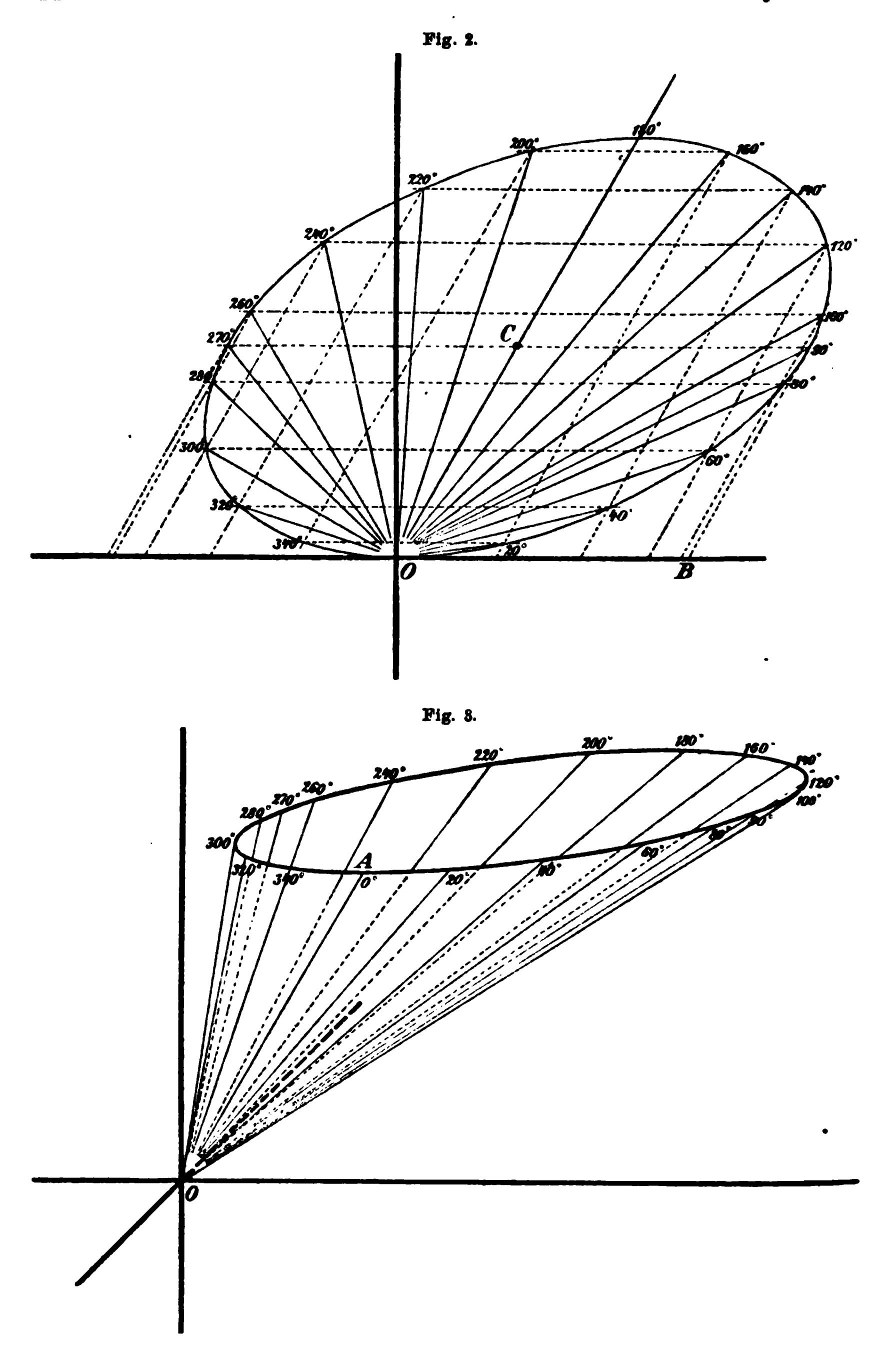
$$\begin{vmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ \dot{M}_1 & \dot{M}_2 & \dot{M}_3 \\ \ddot{M}_1 & \ddot{M}_2 & \ddot{M}_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{51}$$

Setzt man also die Komponenten der drei Vektoren in diesen Ausdruck ein, so erhält man eine homogene Gleichung dritten Grades in Bezug auf die drei Komponenten η_1, η_2, η_3. Jede Achse, welche zur Herbeiführung einer ersten Gleichgewichtslage des Systems dienen kann, liegt also auf *einem Kegel dritten Grades*, welcher durch die Gleich. (51) dargestellt wird. Auf demselben Kegel liegen aber auch die zu einander konjugierten Achsen, die den früher betrachteten speziellen Bedingungen $\overline{\eta G} = 0$ und $\overline{\eta F} = 0$ entsprechen.

13. *Verlauf des Vektors* $\overline{M^\theta}$ *im allgemeinen Falle.* Um sich von der Veränderung des Vektors $\overline{M^\theta}$ ein Bild zu verschaffen, wenn die Vektoren $\overline{M}$, $\overline{\dot{M}}$ und $\overline{\ddot{M}}$ nicht in einer Ebene liegen, führt man die geometrische Addition der Glieder von $\overline{M^\theta}$ zeichnerisch durch. In Fig. 2 ist zunächst die geometrische Summe

$$\overline{S^\theta} = \sin\theta \cdot \overline{\dot{M}} + (1 - \cos\theta) \cdot \overline{\ddot{M}}$$

für alle Winkel von $\theta = 0$ bis $\theta = 360^0$ in Intervallen von 20^0 graphisch ausgeführt, wobei $\overline{OB} = \overline{\dot{M}}$ und $\overline{OC} = \overline{\ddot{M}}$ angenommen wurde. Die



Endpunkte von $\bar{S}^{\theta}$ liegen auf einer Ellipse, welche die eine Koordinatenachse im Anfangspunkte O berührt. Die Zusammensetzung dieser

in einer Ebene liegenden Vektoren $\bar{S}^\theta$ mit $\bar{M}$ im Raume ergiebt dann

$$\bar{M}^\theta = \bar{M} + \bar{S}^\theta .$$

Die explizite Darstellung ist in Fig. 3 nach der Methode der schiefen Parallelprojektion gegeben, um das Resultat für das Auge etwas anschaulicher zu gestalten, als es die unmittelbare Verwendung von Grundrifs und Aufrifs ermöglicht hätte. Durch die beigefügten Werte von θ tritt die Korrespondenz beider Figuren deutlich hervor. Ohne Weiteres erkennt man aus Figur 3, das die Endpunkte von $\bar{M}^\theta$ auf einer Ellipse liegen, deren Lage und Gestalt sich auch in einfachster Weise durch analytische Diskussion der allgemeinen Gleich. (3) ergiebt. $OR = M^\theta$ für $\theta = 0$ nimmt in der Figur mit wachsenden Werten von θ zunächst zu, erreicht ein Maximum und sinkt von da ab bis zu einem Minimalwerte, der hier natürlich von Null verschieden ist. Ein Gleichgewichtszustand wird also bei der hier dargestellten Bewegung des Systems überhaupt nicht erreicht.

C. Verhalten des Virials und des Momentes bei der Schraubenbewegung.

14. *Die Virialformel.* Wir geben der Schraube die Ganghöhe h. Dann ist die Translation in Folge der Rotation um den Winkel θ der Gröfse und Richtung nach dargestellt durch den Vektor

$$\bar{c} = \frac{h\theta}{2\pi} \cdot \bar{\eta} = \bar{e} \cdot \theta .$$

Die Verbindung der Formeln (14) und (19) ergiebt sofort

$$V^s = V + V^* \cdot \theta + \dot{V} \sin\theta + \ddot{V}(1 - \cos\theta), \tag{52}$$

für den durch die Schraubenbewegung resultierenden Wert des Virials, wobei zur Abkürzung

$$V^* = \frac{h}{2\pi} \bar{\eta} \bar{k}^* = \bar{e} \bar{k}^* \tag{53}$$

gesetzt ist

Als Gleichungsbedingung folgt aus Gleichung (52)

$$\frac{dV^s}{d\theta} = V^* + \dot{V} \cos\vartheta + \ddot{V} \sin\theta \tag{54}$$

und hieraus für V^s die nicht homogene Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3 V^s}{d\theta^3} + \frac{dV^s}{d\theta} = V^* . \tag{55}$$

Nach Gleichung (54) findet das Gleichgewicht der Kräfte für eine reaktionsfähige[1]) Schraubenachse schon in der Nullstellung ($\theta = 0$) des

1) Die Achse mufs Drücke, welche senkrecht gegen sie gerichtet sind, aufnehmen können.

Kräftesystems statt, wenn

$$V^* + \dot{V} = 0$$

ist und kehrt wieder, sobald eine Rotation um zwei rechte Winkel erfolgt ist.

Um nun auch die Amplitude zu finden, für welche das Gleichgewicht eintritt, wenn ursprünglich

$$V^* + \dot{V} \lessgtr 0$$

ist, haben wir nur die Gleichung

$$0 = V^* + \dot{V}\cos\theta + \ddot{V}\sin\theta$$

nach θ aufzulösen. Hieraus ergiebt sich, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{\dot{V}}{\ddot{V}} = -\operatorname{tg}\psi$$

setzen:

(56) $$\sin(\theta - \psi) = \frac{V^*}{\dot{V}}\sin\psi = \frac{V^*}{\sqrt{\dot{V}^2 + \ddot{V}^2}},$$

und hieraus erkennt man, dafs die Bedingung

(57) $$V^{*2} < \dot{V}^2 + \ddot{V}^2$$

erfüllt sein mufs, damit für θ aus Gleichung (56) ein reeller Wert folgt.

Führt man den erhaltenen Wert von θ in den Ausdruck

$$\frac{d^2 V^\prime}{d\theta^2} = -\sin\theta \cdot \dot{V} + \cos\theta \cdot \ddot{V}$$

ein, so kann man auch die Frage nach der Sicherheit oder Unsicherheit der betreffenden Gleichgewichtslage beurteilen.

15. *Die Formel für das resultierende Moment.* Durch die Schraubenbewegung geht $\overline{M}$ in $\overline{M}^\prime$ über, und es besteht die Beziehung

(58) $$\overline{M}^\prime = \overline{M} + \overline{M}^* \cdot \theta + \overline{\dot{M}}\sin\theta + \overline{\ddot{M}}(1 - \cos\theta),$$

wenn wir

(59) $$\overline{M}^* = \frac{h}{2\pi}\eta\overline{k}^* = e\overline{k}^*$$

setzen.

Bei der Diskussion der Formel (58) kann man im einzelnen alle die Fälle berücksichtigen, die früher in Bezug auf die getrennte Translations- und Rotationsbewegung unterschieden wurden. Thatsächlich ist hier der Einflufs beider Bewegungsarten superponiert. Wenn man die Ganghöhe h als verfügbaren Parameter hat, so bietet die Herbeiführung der Gleichgewichtslagen einen gewissen Spielraum, woraus man gelegentlich einen Vorteil ziehen kann.

Legende zur Vektor-Analysis.

1. Der Vektor $\bar{a}$ ist bestimmt durch seine rechtwinkligen Koordinaten:

$$a_1, a_2, a_3.$$

Betrachten wir diese Koordinaten selbst als Vektoren, so ist

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3.$$

2. Das *innere* Produkt $\bar{a}\bar{x}$ der Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{x}$ ist definiert durch die Gleichung

(I) $$\bar{a}\bar{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = ax \cos(\bar{a}/\bar{x})$$

3. Das *äufsere* Produkt $\overline{\bar{a}\bar{x}} = \bar{C}$ welches wieder einen Vektor vorstellt, ist definiert durch die Gleichungen:

(II) $$C_1 = a_2 x_3 - a_3 x_2, \quad C_2 = a_3 x_1 - a_1 x_3, \quad C_3 = a_1 x_2 - a_2 x_1.$$

$\bar{C}$ steht also senkrecht auf $\bar{a}$ und $\bar{x}$, und es ist $C = ax \sin(\bar{a}/\bar{x})$. Die Faktoren von $\bar{C}$ sind nicht kommutativ. Es ist vielmehr $\overline{ba} = -\overline{ab}$.

4. Aus den Definitionen (I) und (II) ergeben sich die ternären Produkte:

$$\bar{a}\overline{bc} = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$
$$\bar{b}\overline{ca} = b_1(c_2 a_3 - c_3 a_2) + b_2(c_3 a_1 - c_1 a_3) + b_3(c_1 a_2 - c_2 a_1)$$
$$\bar{c}\overline{ab} = c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Es ist also

$$\bar{a}\overline{bc} = \bar{b}\overline{ca} = \bar{c}\overline{ab} = D,$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

zu setzen ist.

5. Nach den Gleichungen (II) bilde man das ternäre Vektorprodukt

$$\overline{a(\overline{bc})} = \bar{H} = \bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \bar{H}_3.$$

Dann ist

$$H_1 = a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3(b_3 c_1 - b_1 c_3) = (\bar{a}\bar{c}) \cdot b_1 - (\bar{a}\bar{b}) c_1, \quad \text{etc.}$$

Folglich besteht die Gleichung:

(III) $$\overline{a(\overline{bc})} = (\bar{a}\bar{c}) \cdot \bar{b} - (\bar{a}\bar{b}) \cdot \bar{c}.$$

6. Wird $\bar{a}\overline{bc} = 0$, so liegen die drei Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ in einer Ebene. Dies ist auch der Fall, wenn dieselben der Gleichung

(IV) $$\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c} = 0$$

genügen, worin α, β, γ beliebige skalare Gröfsen bedeuten.

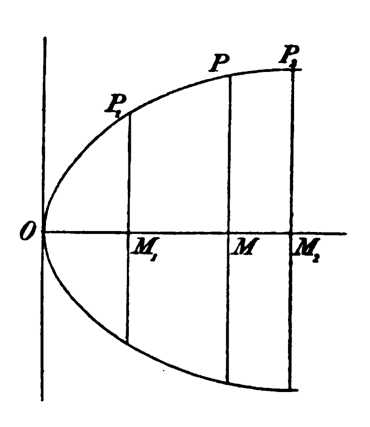
Zur Kubatur des Rotationsparaboloides.

Von Ferdinand Rudio in Zürich.

Es sei ein durch die Parabel $y^2 = 2px$ erzeugtes Rotationsparaboloid gegeben. Bezeichnet man die zu den Ordinaten M_1P_1 und M_2P_2 gehörenden Grundflächen mit g_1 und g_2 und die Höhe M_1M_2 mit h, so gilt bekanntlich für das Volumen des so bestimmten Körpers die Formel:

$$V = \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2)h. \tag{1}$$

Bei manchen Aufgaben der Praxis kommt es nun vor, daſs eine der beiden Grundflächen des als Rotationsparaboloid betrachteten Körpers der Messung nicht zugänglich ist oder sich aus irgend welchen Gründen für die Messung nicht eignet. Nun kann zwar stets $\frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ durch den mittleren Querschnitt ersetzt werden, aber unter Umständen ist auch dieser nicht verwertbar und dann muſs man seine Zuflucht zu irgend welchen anderen Dimensionen nehmen. Aus allen diesen Verlegenheiten hilft aber eine sehr nützliche, allgemeine und praktisch leicht zu handhabende Formel, die indessen trotz ihres ganz elementaren Charakters bisher unbeachtet geblieben zu sein scheint.



Man wähle auf M_1M_2 einen beliebigen Punkt M und lege durch ihn den Querschnitt g parallel zu den Grundflächen. Teilt dann M die Strecke M_1M_2 in dem Verhältnis $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, so ist die Abszisse x von M mit den Abszissen x_1 und x_2 von M_1 und M_2 durch die Formel verbunden

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Mit Rücksicht auf die Parabelgleichung folgt aber hieraus für die zugehörigen Ordinaten:

$$y^2 = \frac{y_1^2 + \lambda y_2^2}{1 + \lambda}$$

und folglich für die zugehörigen Querschnitte:

$$(2) \qquad g = \frac{g_1 + \lambda g_2}{1 + \lambda}.$$

Mit Hilfe dieser einfachen Relation, die dem Rotationsparaboloide eigentümlich ist, kann man jetzt etwa g_2 durch g_1 und g ausdrücken, wodurch (1) übergeht in:

$$(3) \qquad V = \frac{h}{2}\left(\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)g + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)g_1\right), \qquad \lambda = 0 \cdots \infty.$$

Diese Formel gestattet also, das Volumen des Rotationsparaboloides durch die Höhe, die eine Grundfläche und einen *beliebigen* Querschnitt, der in jedem einzelnen Falle zweckmäfsig gewählt wird, zu berechnen. Reduziert sich g_1 auf Null, wird also das Paraboloid vom Scheitel an gerechnet, so vereinfacht sich (3) zu

$$(4) \qquad V_0 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)gh.$$

Für $\lambda = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ erhält man demnach die Formeln:

$$V = h(2g - g_1) \qquad V_0 = 2gh$$

$$V = \frac{h}{2}(3g - g_1) \qquad V_0 = \tfrac{3}{2}gh$$

$$V = gh \qquad V_0 = gh$$

$$V = \frac{h}{4}(3g + g_1) \qquad V_0 = \tfrac{3}{4}gh$$

$$V = \frac{h}{3}(2g + g_1) \qquad V_0 = \tfrac{2}{3}gh.$$

Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme.

Von L. Burmester in München.

Zweiter Teil.

Der erste Teil dieser Abhandlung wurde vor 23 Jahren in dieser Zeitschrift 1878, Bd. 23, S. 108 veröffentlicht, und dieser zweiter Teil bildet nun den dort versprochenen Schlufs. In diesem zweiten Teil sollen hauptsächlich die Nullsysteme behandet werden, welche mit der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen Systeme im Zusammenhange stehen und zur weiteren Erkenntnis der Bewegungsvorgänge dieser Systeme führen. Die Untersuchung dieser Bewegungsvorgänge erhält auch physikalische Bedeutung, weil die in der Krystallographie definierte „homogene Deformation" der Krystalle, die durch Wärme oder durch andere Ursachen bewirkt wird, eine affine Veränderung ist, worauf Eug. Blasius zuerst hingewiesen hat.[1]) Wir wollen zunächst die im ersten Teile dieser Abhandlung abgeleiteten fundamentalen Beziehungen erörtern, welche für die weiteren Untersuchungen erforderlich sind.

„Die Endpunkte der Geschwindigkeiten sowie der Beschleunigungen jeder Ordnung der Systempunkte einer Phase eines beliebig bewegten affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems bilden ein affines räumliches System."

Die Bewegung eines affin-veränderlichen räumlichen Systems S ist durch die Bewegung von vier nicht in einer Ebene liegenden Systempunkten A, B, C, D bestimmt; demnach können wir zu diesen vier Punkten die vier homologen Punkte A_v, B_v, C_v, D_v eines affinen räumlichen Systems S_v beliebig annehmen und die Punkte des Systems S_v als die Endpunkte der Geschwindigkeiten oder der Beschleunigungen n^{ter} Ordnung der Punkte des Systems S betrachten. Wenn nun das System S_v die Endpunkte der Geschwindigkeiten enthält, dann repräsentieren die Verbindungsstrecken der homologen Punkte der beiden affinen Systeme S, S_v die Geschwindigkeiten der Punkte des affin-veränderlichen räumlichen Systems nach Gröfse und Richtung; wenn ferner das

1) Eug. Blasius, Die Ausdehnung der Krystalle durch Wärme. Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, 1884, Bd. 22, S. 528; ferner daselbst 1890, Bd. 41, S. 539.

System S_v die Endpunkte der Beschleunigungen n^{ter} Ordnung enthält, dann repräsentieren die Verbindungsstrecken der homologen Punkte die Beschleunigungen n^{ter} Ordnung nach Gröfse und Richtung. Ist das bewegte System S ein ähnlich-veränderliches oder starres räumliches System, dann sind die vier Punkte A_v, B_v, C_v, D_v von einander abhängig, und es können in diesen besonderen Fällen diese vier Punkte nicht mehr alle beliebig gewählt werden.

„Zwei affine räumliche Systeme S, S_v besitzen aufser der unendlich fernen Ebene drei selbstentsprechende Ebenen, die sich in einem im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkt und in drei selbstentsprechenden Geraden schneiden; von diesen selbstentsprechenden Ebenen können jedoch zwei imaginär sein, und dann sind auch zwei der selbstentsprechenden Geraden imaginär".

„Wenn das System S_v die Endpunkte der Geschwindigkeiten von den Punkten des affin-veränderlichen räumlichen Systems S enthält, dann sind die selbstentsprechenden Elemente der affinen Systeme S, S_v identisch mit den selbstentsprechenden Elementen der Systemphase S und einer unendlich nahen Systemphase".

„Die vierten Eckpunkte der Parallelogramme, welche in gleichem Sinne durch je drei homologe Punkte von drei affinen räumlichen Systemen bestimmt sind, bilden ein viertes affines räumliches System".

Nehmen wir an, es sei von drei affinen räumlichen Systemen S_0, S, S_v das eine S_0 zu einem Punkt $\mathfrak{O}_r$ zusammengeschrumpft, und denken wir uns durch je drei homologe Punkte $\mathfrak{O}_r A A_v$, $\mathfrak{O}_r B B_v$, $\mathfrak{O}_r C C_v$, ... die Parallelogramme $\mathfrak{O}_r A A_v A_r$, $\mathfrak{O}_r B B_v B_r$, $\mathfrak{O}_r C C_v C_r$ bestimmt, dann bilden die vierten Eckpunkte $A_r B_r C_r$ ... ein viertes affines räumliches System S_r. Hiernach erhalten wir den Satz, welchen Mehmke[1]) zuerst nach der Grassmannschen Methode der Rechnung mit geometrischen Gröfsen abgeleitet hat:

1. *Werden die Verbindungsstrecken der homologen Punkte zweier affiner räumlicher Systeme S, S_v, die auch ähnlich oder kongruent sein können, von einem Punkt $\mathfrak{O}_r$ aus nach Gröfse und Richtung abgetragen, so bilden die Endpunkte dieser abgetragenen Strecken ein affines räumliches System S_r; werden ferner umgekehrt die Strecken, welche einen beliebigen Punkt $\mathfrak{O}_r$ mit den Punkten eines räumlichen Systems S_r verbinden, nach Gröfse und Richtung an die homologen Punkte eines zu S_r affinen räumlichen Systems S angetragen, so bilden die Endpunkte dieser Strecken ein affines räumliches System S_v.*

Das System S_r wollen wir das *Abtragsystem* und den Punkt $\mathfrak{O}_r$

1) Civilingenieur 1883, Bd. 29, S. 492.

den *Urpunkt* desselben nennen. Dem Urpunkt $\mathfrak{O}_v$ im Abtragsystem S_v entspricht der im Endlichen befindliche selbstentsprechende Punkt O der beiden affinen Systeme S, S_v. Verschieben wir das Abtragsystem S_v parallel zu sich selbst bleibend, sodaſs der Urpunkt $\mathfrak{O}_v$ mit dem selbstentsprechenden Punkt O der Systeme S, S_v zusammenfällt; dann hat das Abtragsystem S_v dieselben selbstentsprechenden Elemente der Systeme S, S_v mit diesen gemeinsam. Je nachdem das System S_v die Endpunkte der Geschwindigkeiten oder der Beschleunigungen n^{ter} Ordnung des als affin-veränderlich betrachteten Systems S enthält, wollen wir das System S_v das *Abtragsystem der Geschwindigkeiten oder der Beschleunigungen* n^{ter} *Ordnung* nennen. Der dem Urpunkt $\mathfrak{O}_v$ entsprechende Punkt O in dem System S wird Geschwindigkeitspol resp. Beschleunigungspol n^{ter} Ordnung genannt. Derselbe besitzt also keine Geschwindigkeit, resp. keine Beschleunigung n^{ter} Ordnung. Die ausdrückliche Unterscheidung Geschwindigkeit und Beschleunigung n^{ter} Ordnung erscheint zweckmäſsig, weil die Geschwindigkeit stets in der Bewegungsrichtung oder in der Tangente der Bahnkurve des betreffenden Punktes liegt, was bei der Beschleunigung n^{ter} Ordnung im Allgemeinen nicht so ist. Wenn aber diese Unterscheidung nicht nötig ist, dann kann man die Geschwindigkeit auch als Beschleunigung nullter Ordnung bezeichnen und auffassen. Diese angeführten Beziehungen werden die Grundlagen unserer weiteren Betrachtungen bilden.

Nehmen wir in dem räumlichen Systeme S ein ebenes System s in einer Ebene e an, so entspricht demselben in dem affinen räumlichen System S_v ein ebenes System s_v in der homologen Ebene e_v. Denken wir uns das ebene System s_v auf die Ebene e senkrecht projiziert, und bezeichnen wir die Projektion desselben mit s_p, dann sind die beiden in der Ebene e befindlichen ebenen Systeme s, s_p affin und besitzen einen selbstentsprechenden Punkt E, dem ein homologer Punkt E_v in der Ebene e_v entspricht; demnach ist in einer Ebene e dieser Punkt E der einzige Punkt, dessen Verbindungsgerade mit dem homologen Punkt E_v auf dieser Ebene e senkrecht steht. Wenn wir von vorkommenden singulären Beziehungen absehen, so geht durch jeden Punkt des Systems S eindeutig eine Ebene, die senkrecht steht auf seiner Verbindungsgeraden mit dem homologen Punkt im System S_v, und in jeder Ebene giebt es im System S eindeutig einen Punkt, dessen Verbindungsgerade mit dem homologen Punkt des Systems S_v auf dieser Ebene senkrecht ist. Hiernach erhalten wir den Satz:

2. *Bei zwei affinen räumlichen Systemen bilden die Punkte des einen Systems und die Ebenen, welche in diesen Punkten senkrecht stehen auf den zugehörigen Verbindungsgeraden der homologen Punkte, ein Nullsystem.*

Das durch diesen Satz definierte Nullsystem wollen wir ein *Richtnullsystem* nennen. Je nachdem die Verbindungsstrecken der homologen Punkte der Systeme S, S_v Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen n^{ter} Ordnung darstellen, erhalten wir ein *Richtnullsystem für die Geschwindigkeiten oder für die Beschleunigungen n^{ter} Ordnung.* Nach dem 1. Satz im ersten Teil dieser Abhandlung bilden die Punkte, welche die Verbindungsstrecken der homologen Punkte zweier affiner räumlicher Systeme S, S_v in gleiche Verhältnisse teilen, ein affines räumliches System S_x, welches die selbstentsprechenden Elemente von S, S_v mit diesen gemeinsam hat. Demnach bilden auch die Punkte des Systems S_x und die in diesen Punkten auf den zugehörigen Verbindungsgeraden senkrecht stehenden Ebenen ein Richtnullsystem.

Um zu einer anderen Definition des Richtnullsystems zu gelangen und eine Bestimmung desselben abzuleiten, welche keine affinen räumlichen Systeme fordert, denken wir uns zu den affinen Systemen S, S_v das Abtragsystem $\mathfrak{S}_v$ konstruiert, indem wir von einem Urpunkt $\mathfrak{O}_v$ aus die Verbindungsstrecken der homologen Punkte der Systeme S, S_v gleich und gleich gerichtet abtragen. Wenn wir nun die Gerade, welche einen Punkt A des Systems S mit seinem homologen Punkte A_v im System S_v verbindet, kurz die *Richtungsgerade* des Punktes A nennen, so ergiebt sich, daſs einer beliebigen Geraden $\mathfrak{O}_v\mathfrak{h}_v$ im System $\mathfrak{S}_v$ eine durch den selbstentsprechenden Punkt O der Systeme S, S_v gehende Gerade $O\mathfrak{h}$ im System S eindeutig entspricht, deren Punkte Richtungsgerade besitzen, die zu der Geraden $\mathfrak{O}_v\mathfrak{h}_v$ parallel sind. Nehmen wir umgekehrt im System S eine durch den Punkt O gehende beliebige Gerade $O\mathfrak{h}$ an, so entspricht derselben eindeutig eine Gerade $\mathfrak{O}_v\mathfrak{h}_v$ in dem Abtragsystem $\mathfrak{S}_v$ und die Richtungsgeraden der Punkte auf $O\mathfrak{h}$ sind zu dieser Geraden $\mathfrak{O}_v\mathfrak{h}_v$ parallel. Dies Letztere ergiebt sich auch, wenn wir beachten, daſs einer Punktreihe auf einer Geraden $O\mathfrak{h}$ im System S eine ähnliche Punktreihe auf einer Geraden $O\mathfrak{h}_v$ im System S_v entspricht; und da der Punkt O der selbstentsprechende Punkt dieser ähnlichen Punktreihen ist, so sind die Verbindungsgeraden der homologen Punkte derselben parallel. Hiernach sind in dem Richtnullsystem den Punkten $A, B, C \ldots$, die auf einer durch den Punkt O gehenden Geraden $O\mathfrak{h}$ liegen, parallele Nullebenen $a, b, c, \ldots$ zugeordnet, die senkrecht auf der Geraden $\mathfrak{O}_v\mathfrak{h}_v$ stehen; und umgekehrt sind den parallelen Ebenen $a, b, c, \ldots$ die auf einer Geraden $\mathfrak{O}_v\mathfrak{h}_v$ senkrecht stehen, die Punkte $A, B, C, \ldots$ auf der Geraden $O\mathfrak{h}$ als Nullpunkte zugeordnet. Jeder durch den Punkt O gehenden Geraden $O\mathfrak{h}$ im System S entspricht projektiv eine durch den Urpunkt $\mathfrak{O}_v$ gehende Gerade $\mathfrak{O}_v\mathfrak{h}_v$ im Abtragsystem $\mathfrak{S}_v$. Denken wir uns nun durch den Punkt O

zu jeder Geraden $\mathfrak{O}_\nu \mathfrak{h}_\nu$ eine Ebene Oh' senkrecht gelegt, so erhalten wir zwei konjective reziproke Bündel, die wir mit $O(\mathfrak{h}, j)$ und $O(h', \mathfrak{j}')$ bezeichnen, um auszudrücken, dafs einer Geraden $O\mathfrak{h}$ und einer Ebene Oj im ersten resp. eine Ebene Oh' und eine Gerade $O\mathfrak{j}'$ im zweiten Bündel entspricht.

Um nun vermittelst dieser beiden konjektiven reziproken Bündel $O(\mathfrak{h}, j)$ und $O(h', \mathfrak{j}')$ zu einem Punkt A die zugehörige Nullebene zu erhalten, ziehen wir durch OA die Gerade $O\mathfrak{h}$ des Bündels $O(\mathfrak{h}, j)$, bestimmen die entsprechende Ebene Oh' in dem reziproken Bündel $O(h', \mathfrak{j}')$ und legen zu dieser Ebene durch den Punkt A die parallele Ebene a, welche die Nullebene des Punktes A ist. Um ferner zu einer Ebene a den zugehörigen Nullpunkt zu ermitteln, legen wir zu dieser Ebene durch O die parallele Ebene Oh' des Bündels $O(h', \mathfrak{j}')$ und bestimmen die entsprechende Gerade $O\mathfrak{h}$ in dem reziproken Bündel $O(\mathfrak{h}, j)$, welche die Ebene a in ihrem Nullpunkt A schneidet. Durch diese beiden konjektiven reziproken Bündel, welche abgeleitet aus den affinen Systemen S, S_v sich ergeben haben, ist das Richtnullsystem auch bestimmt. Hierbei ist aber behufs der Eindeutigkeit zu beachten, dafs die Nullpunkte sich auf den Geraden $O\mathfrak{h}$ des Bündels $O(\mathfrak{h}, j)$ befinden und die Nullebenen parallel zu den korrelativen Ebenen Oh' des Bündels $O(h', \mathfrak{j}')$ sind. Wenn wir dagegen die Nullpunkte auf den Geraden $O\mathfrak{j}'$ des Bündels $O(h', \mathfrak{j}')$ befindlich annehmen und die korrelative Ebene Oj des Bündels $O(\mathfrak{h}, j)$ bestimmen, dann erhalten wir ein zweites Richtnullsystem. Dieses zweite Richtnullsystem ist dasjenige, welches von den Punkten des Systems S_v und den Ebenen gebildet wird, die in diesen Punkten auf den Verbindungsgeraden der homologen Punkte von S_v, S senkrecht stehen.

Der selbstentsprechende Punkt O der beiden affinen räumlichen Systeme S, S_v, resp. der gemeinsame Mittelpunkt der konjektiven reziproken Bündel $O(\mathfrak{h}, j)$, $O(h', \mathfrak{j}')$, der allen durch ihn gehenden Ebenen als Nullpunkt zugeordnet ist, heifst der *Hauptpunkt*, und die unendlich ferne selbstentsprechende Ebene o_∞ dieser Systeme, die allen in ihr liegenden Punkten als Nullebene zugeordnet ist, heifst die *Hauptebene* des Richtnullsystems. Das Charakteristische des Richtnullsystems ist, dafs den Punkten auf einer durch den Hauptpunkt O gehenden Geraden parallele Nullebenen zugeordnet sind, die sich also in einer Geraden der unendlich fernen Hauptebene o_∞ schneiden, und dafs umgekehrt solchen Ebenen Nullpunkte zugeordnet sind, die auf einer durch den Hauptpunkt O gehenden Geraden liegen.

Wenn wir durch zwei beliebige konjektive reziproke Bündel $O(\mathfrak{h}, j)$, $O(h', \mathfrak{j}')$, die durch vier Gerade $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ und vier reziprok entsprechende

Ebenen e', f', g', h' bestimmt sind, in der angegebenen Weise das Nullsystem konstruieren, so ist noch zu beweisen, daſs dasselbe ein Richtnullsystem ist. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch einen Punkt $\mathfrak{O}_v$ die vier Geraden $\mathfrak{e}_v$, $\mathfrak{f}_v$, $\mathfrak{g}_v$, $\mathfrak{h}_v$ senkrecht zu den Ebenen $e'\, f'\, g'\, h'$; hierauf bestimmen wir eine Ebene x, welche die vier durch den Punkt O gehenden Geraden $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ so in vier Punkten E, F, G, H schneidet, daſs dieselben ein Parallelogramm bilden, und eine Ebene x_v, welche die vier durch den Punkt $\mathfrak{O}_v$ gehenden Geraden $\mathfrak{e}_v$, $\mathfrak{f}_v$, $\mathfrak{g}_v$, $\mathfrak{h}_v$ so in vier Punkten E_v, F_v, G_v, H_v schneidet, daſs dieselben ein Parallelogramm bilden, dessen Ecken aber gleiche Folge mit den Ecken des ersten Parallelogramms haben. Zwar giebt es drei verschiedene Ebenen, die vier durch einen Punkt gehende Gerade in Parallelogrammen schneiden; diese Mehrdeutigkeit wird aber dadurch ausgeschlossen, daſs die Ecken der in Betracht kommenden Parallelogramme gleiche Folge haben sollen. Wenn wir nun zu den Strecken $\mathfrak{O}_v E_v$, $\mathfrak{O}_v F_v$, $\mathfrak{O}_v G_v$, $\mathfrak{O}_v H_v$ die Strecken EE_v, FF_v, GG_v, HH_v gleich und gleich gerichtet konstruieren, so können wir nach dem 1. Satz diese Strecken als die Verbindungsstrecken homologer Punkte zweier affiner räumlicher Systeme S, S_v betrachten, die den selbstentsprechenden Punkt O besitzen. Zwar können wir jene Ebenen x, x_v parallel zu sich verlegen, dadurch wird jedoch nur bewirkt, daſs wir homologe Punkte anderer affiner Systeme erhalten, welche aber dieselben Verbindungsgeraden wie die homologen Punkte der affinen Systeme S, S_v liefern. Demnach ist das durch zwei beliebige, konjektive reziproke Bündel bestimmte Nullsystem identisch mit dem Richtnullsystem, welches durch die Punkte $E, F, \cdots$ des Systems S und die in demselben auf den Verbindungsgeraden EE_v, $FF_v, \cdots$ senkrechten Ebenen gebildet wird.

Hiernach ist das Richtnullsystem auch dadurch definiert, daſs dasselbe durch zwei konjektive reziproke Bündel $O(\mathfrak{h}, j)$, $O(h', \mathfrak{j}')$ bestimmt ist, und den Punkten einer Geraden $O\mathfrak{h}$ Nullebenen entsprechen, die zu der reziproken Ebene Oh' parallel sind, und umgekehrt.

Durch kollineare Transformation des Richtnullsystems erhalten wir das allgemeine räumliche Nullsystem zweiten Grades, welches Ameseder[1]) zuerst untersucht hat, und welches auch kurz das quadratische Nullsystem genannt wird. Dasselbe ist durch zwei konjektive reziproke Bündel, deren Mittelpunkt der Hauptpunkt O ist, und durch eine im Endlichen liegende Hauptebene o bestimmt. Das Charakteristische des quadratischen Nullsystems ist, daſs den Punkten auf einer durch den Hauptpunkt O gehenden Geraden Nullebenen zugeordnet sind, die einen

1) Ameseder, Das allgemeine räumliche Nullsystem zweiten Grades. Journal für reine und angewandte Mathematik, 1884, Bd. 97, S. 62.

Ebenenbüschel bilden, dessen Achse in der Hauptebene o liegt, und umgekehrt. Hiernach ergiebt sich der Satz:

3. *Das Richtnullsystem ist ein spezielles räumliches Nullsystem zweiten Grades, dessen Hauptebene im Unendlichen liegt.*

Nach diesem Ergebnis könnten wir die von Ameseder abgeleiteten Eigenschaften des allgemeinen räumlichen Nullsystems zweiten Grades spezialisiert auf das Richtnullsystem übertragen. Es ist aber zweckmäfsiger, dafs wir zum Verständnis der Beziehungen des Richtnullsystems zu der Bewegung des affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen, sowie des starren räumlichen Systems die erforderlichen projektiven Eigenschaften des Richtnullsystems in Anlehnung an die bisherigen Darlegungen ableiten.

In zwei konjektiven reziproken Bündeln $O(\mathfrak{h}, j)$ und $O(h', \mathfrak{j}')$, die zur Bestimmung eines Richtnullsystems dienen, erfüllen bekanntlich die Geraden, welche in den ihnen entsprechenden Ebenen liegen, einen reellen oder imaginären Kegel $O\mathfrak{k}^2$ zweiter Ordnung, der *Kernkegel* heifst, und diese Ebenen, welche einen Ebenenbüschel Ok^2 zweiter Ordnung bilden, umhüllen einen reellen oder imaginären Kegel $O\varkappa^2$ zweiter Ordnuug, der *Einhüllkegel* heifst, und den Kernkegel in zwei Mantellinien berührt. Die unendlich ferne Hauptebene o_∞ des Richtnullsystems schneidet diese beiden reziproken Bündel $O(\mathfrak{h}, j)$, $O(h', \mathfrak{j}')$ in zwei reziproken ebenen Systemen $s_\infty(\mathfrak{H}_\infty, j_\infty)$, $s_\infty(h'_\infty, \mathfrak{J}'_\infty)$, in denen einem Punkt $\mathfrak{H}_\infty$ eine Gerade h'_∞ und einer Geraden j_∞ ein Punkt $\mathfrak{J}'_\infty$ entspricht; sie schneidet ferner den Kernkegel $O\mathfrak{k}^2$ in dem Kernkegelschnitt $\mathfrak{k}^2_\infty$ den Ebenenbüschel Ok^2 in dem Geradenbüschel k^2_∞ zweiter Ordnung und den Einhüllkegel $O\varkappa^2$ in dem Einhüllkegelschnitt $\varkappa^2_\infty$, der von diesem Geradenbüschel umhüllt wird.

Durch die vermittelst der konjektiven reziproken Bündel erhaltene Konstruktion des Richtnullsystems ergeben sich hiernach die singulären Beziehungen: allen Punkten einer Mantellinie des Kernkegels $O\mathfrak{k}^2$ ist die durch dieselbe gehende reziproke Tangentialebene des Einhüllkegels $O\varkappa^2$ als einzige Nullebene zugeordnet; und allen Ebenen, welche durch eine Tangente des Einhüllkegelschnittes $\varkappa^2_\infty$ gehen, also zu einer Tangentialebene des Einhüllkegels parallel sind, ist der entsprechende inzidente Punkt des Kernkegelschnittes $\mathfrak{k}^{2'}_\infty$ als einziger Nullpunkt zugeordnet.

Da parallele Ebenen sich in einer Geraden und parallele Gerade sich in einem Punkt der unendlich fernen Hauptebene o_∞ schneiden, so wird die Ableitung der projektiven Beziehungen anschaulicher und allgemeiner, wenn wir uns behufs unserer Betrachtungen die Hauptebene o_∞ ins Endliche verlegt denken und uns also das allgemeine quadratische Nullsystem vorstellen.

Die beiden konjektiven reziproken Bündel $O(\mathfrak{h}, j)$, $O(h', \mathfrak{j}')$ seien gegeben; eine beliebige Gerade $\mathfrak{j}$ nehmen wir als Achse eines Ebenenbüschels $\mathfrak{j}(h)$ an, der die Hauptebene o_∞ in einem Geradenbüschel $\mathfrak{J}'_\infty(h'_\infty)$ schneidet, und betrachten die Gerade $O\mathfrak{j}'$, die von dem Hauptpunkt O nach dem Punkt $\mathfrak{J}'_\infty$ der Hauptebene o_∞ geht, als Achse eines zu $\mathfrak{J}'_\infty(h'_\infty)$ perspektiven Ebenenbüschels $\overline{O}\mathfrak{j}'(h')$, der zum Bündel $O(h', \mathfrak{j}')$ gehört; dann entspricht diesem Ebenenbüschel und dessen Achse, resp. ein Geradenbüschel $O(\mathfrak{h})$ und eine Ebene Oj im Bündel $O(h, j)$. Hiernach sind die Schnittpunkte der Geraden des Büschels $O(\mathfrak{h})$ mit den entsprechenden Ebenen des projektiven Büschels $\mathfrak{j}(h)$ die Nullpunkte dieser Ebenen; und folglich erfüllen dieselben einen Nullkegelschnitt ι^2, der durch den Hauptpunkt O sowie durch den Punkt $H_\mathfrak{j}$ geht, in welchem die Achse $\mathfrak{j}$ die Ebene Oj trifft. Da die Ebenen des Büschels $\mathfrak{j}(h)$ zu den Nullpunkten auf dem Nullkegelschnitt perspektiv sind, so ist der Punkt $H_\mathfrak{j}$ der Nullpunkt der Ebene $h_\mathfrak{j}$ dieses Büschels, die von dem Nullkegelschnitt ι^2 in diesem Punkt berührt wird.

Den Ebenen h_1, h_2 des Ebenenbüschels $\mathfrak{j}(h)$, welche durch die von dem Punkt $\mathfrak{J}'_\infty$ an den Einhüllkegelschnitt $\varkappa^2_\infty$ gelegten Tangenten $\mathfrak{J}'_\infty h'_{\infty 1}$, $\mathfrak{J}'_\infty h'_{\infty 2}$ gehen, entsprechen als Nullpunkte resp. die Punkte $\mathfrak{H}_{\infty 1}$, $\mathfrak{H}_{\infty 2}$, in denen die Ebene Oj den Kernkegelschnitt $\mathfrak{k}^2_\infty$ und zugleich diese Tangenten trifft; folglich geht der Nullkegelschnitt ι^2 auch durch diese beiden Punkte $\mathfrak{H}_{\infty 1}$, $\mathfrak{H}_{\infty 2}$. Hiernach ergiebt sich, dafs für alle Ebenenbüschel, deren Achsen $\mathfrak{j}$ durch einen in der Hauptebene o_∞ liegenden Punkt $\mathfrak{J}'_\infty$ gehen, die Nullkegelschnitte sich in der zu diesem Punkt korrelativen Ebene Oj befinden und den Hauptpunkt O, sowie die beiden Punkte $\mathfrak{H}_{\infty 1}$, $\mathfrak{H}_{\infty 2}$ gemeinsam haben. Je nachdem die Gerade $O\mathfrak{J}'_\infty$ aufsen in oder auf dem Einhüllkegel $O\varkappa^2$ liegt, sind die Punkte $\mathfrak{H}_{\infty 1}$, $\mathfrak{H}_{\infty 2}$ reell, imaginär oder fallen zusammen und es sind diese Nullkegelschnitte ι^2 resp. Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln. Zu einem Nullkegelschnitt ι^2, der also den Hauptpunkt O enthält, ist ein Nullkegel dual, der die unendlich ferne Hauptebene o_∞ berührt und demnach hier speziell ein parabolischer Nullcylinder ist. Hiernach erhalten wir die dualen Sätze.

4. *In einem Richtnullsystem erfüllen die Nullpunkte eines Ebenenbüschels einen Nullkegelschnitt, der die Achse dieses Ebenenbüschels trifft; und die Nullkegelschnitte, welche den Ebenenbüscheln entsprechen, deren Achsen durch einen Punkt der Hauptebene gehen, liegen in der zu diesem Punkt korrelativen, durch den Haupt-*

4a. *In einem Richtnullsystem umhüllen die Nullebenen einer Punktreihe einen parabolischen Nullcylinder, der die Gerade dieser Punktreihe berührt; und die parabolischen Nullcylinder, welche den Punktreihen entsprechen, deren Geraden in einer durch den Hauptpunkt gehenden Ebene liegen, sind gerichtet nach dem*

punkt gehenden Ebene und haben den Hauptpunkt sowie die beiden Punkte, in welchen diese Ebene den Kernkegelschnitt schneidet, als gemeinsame Schnittpunkte.

zu dieser Ebene korrelativen in der Hauptebene befindlichen Punkt und haben die Hauptebene sowie die beiden Ebenen, die von diesem Punkt berührend an den Einhüllkegel gehen, als gemeinsame Tangentialebenen.

Nehmen wir ein Ebenenbündel an, dessen Mittelpunkt M sein möge, so ergiebt sich durch analoge Betrachtungen wie vorhin aus den projektiven Beziehungen der beiden konjektiven reziproken Bündel $O(\mathfrak{h}, \mathfrak{j})$, $O(h', \mathfrak{j}')$: dafs die Nullpunkte der Ebenen dieses Bündels eine Nullfläche zweiter Ordnung erfüllen, die durch den Hauptpunkt O und durch den Kernkegelschnitt $\mathfrak{k}^2_\infty$ geht, die ferner im Punkt M die Nullebene desselben berührt und die Nullkegelschnitte aller Ebenenbüschel trägt, deren Achsen durch den Punkt M gehen. Hieraus folgt, dafs die Nullflächen aller Ebenenbündel den Kernkegelschnitt $\mathfrak{k}^2_\infty$ gemeinsam haben und durch den Hauptpunkt O gehen. Mit dieser Darlegung ergeben sich auch die zugehörigen dualen Beziehungen.

Liegt eine Achse $\mathfrak{j}$ eines Ebenenbüschels, welche die Hauptebene o_∞ in einem Punkt $\mathfrak{J}'_\infty$ trifft, in einer Tangentialebene $O\mathfrak{J}'_\infty\mathfrak{H}_{\infty 1}$ des Einhüllkegels Ox^2, welcher der inzidente Punkt $\mathfrak{H}_{\infty 1}$ auf dem Kernkegelschnitt $\mathfrak{k}^2_\infty$ entspricht, so schneidet die zum Punkte $\mathfrak{J}'_\infty$ korrelative Ebene Oj den Kernkegelschnitt in den gepaarten Punkten $\mathfrak{H}_{\infty 1}$, $\mathfrak{H}_{\infty 2}$ und den Kernkegel $O\mathfrak{k}^2$ in den Mantellinien $O\mathfrak{H}_{\infty 1}$, $O\mathfrak{H}_{\infty 2}$. Der Tangentialebene $O\mathfrak{J}'_\infty\mathfrak{H}_{\infty 1}$ entsprechen alle Punkte der Mantellinie $O\mathfrak{H}_{\infty 1}$ als Nullpunkte; demnach zerfällt der zu diesem Ebenenbüschel gehörende Nullkegelschnitt ι^2 in die Gerade $O\mathfrak{H}_{\infty 1}$ und eine in der Ebene Oj liegende Gerade ι, die nach dem zu $\mathfrak{H}_{\infty 1}$ gepaarten Punkt $\mathfrak{H}_{\infty 2}$ geht und die Nullpunkte aller anderen Ebenen dieses Ebenenbüschels enthält. Demzufolge ergiebt sich, wenn wir umgekehrt eine Punktreihe auf einer durch einen Punkt $\mathfrak{H}_{\infty 2}$ des Kernkegelschnittes gehenden Geraden ι annehmen, dann durch den Hauptpunkt O und die Gerade ι eine Ebene legen, die den Kernkegelschnitt $\mathfrak{k}^2_\infty$ in dem Punkt $\mathfrak{H}_{\infty 2}$ und ferner in dem Punkt $\mathfrak{H}_{\infty 1}$ schneidet, dafs dieser Punktreihe Nullebenen entsprechen, die einen Ebenenbüschel bilden, dessen Achse $\mathfrak{j}$ in der dem Punkt $\mathfrak{H}_{\infty 1}$ zugeordneten Tangentialebene des Einhüllkegels Ox^2 liegt. Diese Tangentialebene schneidet die dem Punkt $\mathfrak{H}_{\infty 2}$ zugeordnete Tangentialebene in einer Geraden $O\mathfrak{J}'_\infty$, und die Achse $\mathfrak{j}$ geht durch den Punkt $\mathfrak{J}'_\infty$ in der Hauptebene o_∞.

Einem in einer Ebene $O\mathfrak{H}_{\infty 1}\mathfrak{H}_{\infty 2}$ liegenden Büschel von Geraden ι, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{H}_{\infty 2}$ ist, entspricht ein in der Tangentialebene $O\mathfrak{J}'_\infty\mathfrak{H}_{\infty 1}$ liegender Büschel von Achsen $\mathfrak{j}$, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{J}'_\infty$ ist.

Im Nullsystem zweiten Grades heifst eine Gerade ι, deren Punktreihe ein Ebenenbüschel erster Ordnung entspricht, eine *Ordnungslinie* und die Achse $\mathfrak{j}$ dieses Ebenenbüschels eine *Ordnungsachse.*

Verlegen wir den Punkt $\mathfrak{J}'_\infty$, in welchem eine in der Tangentialebene $O\mathfrak{J}'_\infty\mathfrak{H}_{\infty\,\mathrm{I}}$ befindliche Ordnungsachse $\mathfrak{j}$ die Hauptebene o_∞ trifft, nach dem zweiten Schnittpunkt $\mathfrak{H}_{\infty\,\mathrm{II}}$, den diese Tangentialebene aufser dem Punkt $\mathfrak{H}_{\infty\,\mathrm{I}}$ mit dem Kernkegelschnitt $\mathfrak{k}^2_\infty$ bildet, dann fällt die zu dem Punkt $\mathfrak{J}'_\infty$ korrelative Ebene Oj mit dieser Tangentialebene zusammen, und zu dieser Ordnungsachse $\mathfrak{j}$ gehört eine Ordnungslinie ι, die durch den mit $\mathfrak{J}'_\infty$ identischen Punkt $\mathfrak{H}_{\infty\,\mathrm{II}}$ des Kernkegelschnittes $\mathfrak{k}^2_\infty$ geht. Wenn aber eine Ordnungsachse und eine Ordnungslinie durch einen Punkt gehen, dann müssen beide zusammenfallen. Solche Gerade, in denen eine Ordnungsachse und eine zugehörige Ordnungslinie vereint sind, heifsen *Leitlinien* des Nullsystems. Die Leitlinien gehen also durch den Kernkegelschnitt $\mathfrak{k}^2_\infty$ und berühren den Einhüllkegel Ox^2. Demnach liegen in einer Ebene zwei Leitlinien, die sich im Nullpunkt dieser Ebene schneiden, und durch einen Punkt gehen zwei Leitlinien, dessen Nullebene die durch diese Leitlinien gelegte Ebene ist. Hieraus folgen die nach unserer Darlegung auch für das allgemeine quadratische Nullsystem geltenden Ergebnisse:

5. *In einem Richtnullsystem gehen die Ordnungslinien durch den Kernkegelschnitt $\mathfrak{k}^2_\infty$ und liegen die Ordnungsachsen in den Tangentialebenen des Einhüllkegels Ox^2. Die Ordnungslinien, so wie die Ordnungsachsen bilden je einen singulären Komplex zweiten Grades; und diese beiden Komplexe haben die Leitlinien gemeinsam, die eine Kongruenz zweiten Grades bilden.*

Betrachten wir wieder die zwei affinen räumlichen Systeme S, S_v, die ein Richtnullsystem bestimmen, und nehmen wir eine beliebige Ebene e im System S an, dann entspricht derselben eine Ebene e_v im System S_v, ferner entspricht der Schnittgeraden $\mathfrak{f}_v$ dieser beiden Ebenen eine Gerade $\mathfrak{f}$ in der Ebene e, und dem Schnittpunkt F_v dieser Geraden der Punkt F auf der Geraden $\mathfrak{f}$, die also auch die Verbindungsgerade zweier homologen Punkte F, F_v ist. Die Verbindungsgeraden der auf $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_v$ befindlichen homologen Punkte, resp. die Richtungsgeraden der auf der Geraden $\mathfrak{f}$ befindlichen Punkte, liegen in der Ebene e und umhüllen eine Parabel, die von der Geraden $\mathfrak{f}$ im Punkte F berührt wird. Es giebt demnach in einer Ebene e nur eine einzige Gerade $\mathfrak{f}$, deren Punkte Richtungsgerade besitzen, die in dieser Ebene liegen; und diese Gerade verbindet zwei homologe Punkte F, F_v. Eine solche Gerade $\mathfrak{f}$ wird die *Charakteristik* der Ebene e genannt; und dieselbe zeichnet sich dadurch aus, dafs ihr parabolischer Nullcylinder auf der Ebene e senkrecht steht.

Nehmen wir eine beliebige Gerade $\mathfrak{f}$ an, die zwei homologe Punkte F, F_v verbindet, so entspricht derselben eine Gerade $\mathfrak{f}_v$, die durch den Punkt F_v geht. Demnach ist jede Verbindungsgerade $\mathfrak{f}$ zweier homologen Punkte die Charakteristik der durch $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_v$ gelegten Ebene; und die Charakteristiken sind also identisch mit den Verbindungsgeraden homologer Punkte.

Da die Verbindungsgeraden der homologen Punkte einen triedralen Komplex bilden, dessen Hauptelemente die selbstentsprechenden Elemente der Systeme S, S_v sind, so gilt dies auch von den Charakteristiken.

Wenn eine Charakteristik, resp. eine Verbindungsgerade zweier homologer Punkte, mit einer Ordnungslinie zusammenfällt, dann entspricht ihr eine Ordnungsachse, die auf der Ebene der Charakteristik senkecht steht, also auch zu dieser Ordnungslinie senkrecht ist.

Die Verbindungsgeraden homologer Punkte, welche durch einen Punkt gehen, erfüllen als Gerade des triedralen Komplexes, der vom zweiten Grade ist, eine Kegelfläche zweiter Ordnung. Die Ordnungslinien, welche durch einen Punkt gehen, erfüllen als Gerade eines singulären Komplexes zweiten Grades ebenfalls einen Kegel zweiter Ordnung; diese beiden Kegel mit gleicher Spitze haben vier Mantellinien gemeinsam. Die Verbindungsgeraden homologer Punkte, welche in einer Ebene liegen, umhüllen eine Parabel; ferner bilden die Ordnungslinien, die in einer Ebene liegen, zwei Parallelenbüschel, und in jedem derselben giebt es eine Ordnungslinie, die eine Tangente dieser Parabel ist. Hieraus folgt:

6. *In einem Richtnullsystem bilden die Ordnungslinien, zu welchen die entsprechenden Ordnungsachsen senkrecht sind, eine Kongruenz vierter Ordnung und zweiter Klasse.*

Die durch den selbstentsprechenden Punkt O gehenden drei selbstentsprechenden Ebenen und Geraden der affinen räumlichen Systeme S, S_v zeichnen sich in dem Richtnullsystem durch Eigentümlichkeiten aus und sind die Hauptelemente des von den Verbindungsgeraden der homologen Punkte gebildeten triedralen Komplexes. Da aber das Richtnullsystem auch für sich, unabhängig von diesen affinen Systemen, zu betrachten ist und durch die beiden konjektiven reziproken Bündel $O(\mathfrak{h}, \mathfrak{j})$, $O(h', \mathfrak{j}')$ bestimmt wird, so wollen wir im Richtnullsystem jene selbstentsprechenden Ebenen die *Normebenen* und jene selbstentsprechenden Geraden die *Normgeraden* nennen und in folgender Weise definieren. Die drei Normebenen eines Richtnullsystems sind in dem Bündel $O(\mathfrak{h}, \mathfrak{j})$ diejenigen Ebenen, die auf den entsprechenden reziproken Geraden des Bündels $O(h', \mathfrak{j}')$ senkrecht stehen; und die drei Normgeraden eines Richtnullsystems sind in dem Bündel $O(\mathfrak{h}, \mathfrak{j})$ die-

jenigen Geraden, die auf den entsprechenden reziproken Ebenen des Bündels $O(h', \mathfrak{j}')$ senkrecht stehen. Von den Normebenen, sowie von den Normgeraden können je zwei imaginär sein.

Jedem Punkt in einer Normebene entspricht eine Nullebene, die auf derselben senkrecht ist; denn die Richtungsgeraden aller Punkte einer Normebene befinden sich in derselben. Demnach sind alle in einer Normebene befindlichen Geraden Charakteristiken derselben, und zu einer solchen Geraden gehört ein parabolischer Nullcylinder, der auf dieser Normebene senkrecht steht; ferner entspricht jeder in einer Normebene liegenden Ordnungslinie eine auf dieser Normebene senkrechte Ordnungsachse. Da einer Parallelen zu einer selbstentsprechenden Geraden im System S wieder eine Parallele im System S_v entspricht, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der homologen Punkte der auf diesen Parallelen befindlichen ähnlichen Punktreihen in einem Punkt. Demnach ist in einem Richtnullsystem jede Gerade, die zu einer Normgeraden parallel ist, eine Charakteristik, deren Punkte Richtungsgeraden besitzen, die sich in einem Punkt schneiden; ferner steht der zu einer solchen Charakteristik gehörende parabolische Nullcylinder senkrecht auf der durch sie und diesen Punkt gelegten Ebene, und diese Charakteristik berührt den Nullcylinder in einem Punkt seiner Scheitellinie.

Die Verbindungsgeraden der homologen Punktreihen $A, B, C \ldots$ und $A_v, B_v, C_v \ldots$ auf zwei entsprechenden Geraden $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_v$ der affinen räumlichen Systeme S, S_v erfüllen ein parabolisches Hyperboloid Π und sind zu einer Ebene p parallel; ferner umhüllen die durch diese Verbindungsgeraden zu dieser Ebene p senkrecht gelegten Ebenen einen parabolischen Cylinder p^{II}. Da die Nullebenen $a, b, c \ldots$ der Punkte $A, B, C \ldots$ auf diesen Verbindungsgeraden in diesen Punkten senkrecht sind, so ergiebt sich auch hieraus, dafs die Nullebenen $a, b, c \ldots$ einen parabolischen Nullcylinder p^2 umhüllen. Die beiden parabolischen Cylinder p^{II}, p^2 stehen auf der Ebene p senkrecht und haben eine auf derselben senkrechte, gemeinsame Fokalgerade. Wenn nun die Gerade $\mathfrak{p}$ eine Ordnungslinie ist, dann geht der parabolische Nullcylinder p^2 in eine Ebene über, und die Tangentialebenen desselben bilden einen Ebenenbüschel, dessen Achse die Fokalgerade ist. Diese Fokalgerade ist demnach die Ordnungsachse der Ordnungslinie $\mathfrak{p}$, und diese berührt jenen parabolischen Cylinder p^{II} in einem Punkt seiner Scheitellinie. Wenn die Gerade $\mathfrak{p}$ eine Leitlinie des Richtnullsystems ist, dann sind die Verbindungsgeraden der homologen Punkte der Geraden $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_v$ senkrecht auf der Leitlinie und bilden ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid Π; wenn ferner die Gerade $\mathfrak{p}$ eine Charak-

teristik ist, dann schrumpft das hyperbolische Paraboloid in der Ebene dieser Charakteristik zusammen und die Verbindungsgeraden der homologen Punkte umhüllen eine Parabel.

Wenn die beiden konjektiven reziproken Bündel $O(\mathfrak{h},j)$, $O(h',\mathfrak{j}')$ einen polaren Bündel bilden, dann vereinigen sich der Kernkegel und und der Einhüllkegel in dem Ordnungskegel des polaren Bündels; und das Richtnullsystem, welches durch einen polaren Bündel bestimmt ist, wird ein *polares Richtnullsystem* genannt. In dem polaren Richtnullsystem mit einem reellen Ordnungskegel sind die Ordnungslinien, welche in den Tangentialebenen des Ordnungskegels liegen, identisch mit ihren zugehörigen Ordnungsachsen, und demnach ergiebt sich der Satz:

7. *In einem polaren Richtnullsystem sind diejenigen Geraden, welche zu den Mantellinien des Ordnungskegels parallel sind und in den Tangentialebenen desselben liegen, die Leitlinien.*

In einer reellen Normebene eines Richtnullsystems, resp. in einer reellen selbstentsprechenden Ebene zweier affiner räumlicher Systeme S, S_v, bilden die Punkte und die Spuren der zugehörigen, auf dieser Normebene senkrechten Nullebenen ein *ebenes Richtnullsystem*. Dasselbe ergiebt sich demnach auch, wenn in einer Ebene zwei affine ebene Systeme gegeben sind, durch die Punkte des einen und durch die Geraden, welche in diesen Punkten auf den Verbindungsgeraden der homologen Punkte senkrecht sind. Ferner ist das ebene Richtnullsystem auch durch zwei in einer Ebene liegende konjektive projektive Strahlenbüschel $O(\mathfrak{h})$, $O(h')$ bestimmt. Um zu einem Punkt A die Nullgerade zu erhalten, verbinden wir A mit O durch einen Strahl $O\mathfrak{h}$ und ziehen durch A die Nullgerade a parallel zu dem entsprechenden Strahl Oh'. Umgekehrt ergiebt sich zu einer Geraden a der Nullpunkt, wenn zur Geraden a der parallele Strahl Oh' gezogen wird; denn dann schneidet der entsprechende Strahl $O\mathfrak{h}$ die Gerade a in dem Nullpunkt A.

Nach der Ableitung der wichtigsten Eigenschaften des Richtnullsystems, die sich aus den konjektiven reziproken Bündeln und den affinen räumlichen Systemen ergeben haben, wollen wir nun die momentane Bewegung des affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen Systems betrachten.

Nehmen wir an, dafs zu einem bewegten affin-veränderlichen räumlichen System S das affine System S_v die Endpunkte der Geschwindigkeiten der Systempunkte enthält, dann bilden diese Punkte und die Ebenen, welche in ihnen auf den Geschwindigkeiten resp. auf den Bewegungsrichtungen oder den Tangenten der Bahnen senkrecht sind, das Richtnullsystem für die Geschwindigkeiten, dessen Hauptpunkt der selbstentsprechende Punkt O der affinen Systeme S, S_v ist. Da

jede Mantellinie des Kernkegels $O\mathfrak{k}^2$ in der reziproken Tangentialebene des Einhüllkegels Ox^2 liegt, und da allen Punkten einer Mantellinie die inzidente reziproke Tangentialebene als Nullebene entspricht, so folgt, dafs die Punkte einer Mantellinie des Kernkegels Geschwindigkeiten besitzen, die in einer auf der Tangentialebene senkrechten Ebene sich befinden und auf der Mantellinie senkrecht sind; demnach bleibt eine Punktreihe auf einer Mantellinie des Kernkegels während einer momentanen Bewegung des affin-veränderlichen räumlichen Systems starr, und dasselbe gilt von einer Punktreihe auf jeder zu einer Mantellinie parallelen Geraden. Wir wollen solche Gerade eines affin-veränderlichen räumlichen Systems, die während einer unendlich kleinen Bewegung desselben starre Punkt reihen tragen, *starre Gerade* nennen. Hiernach erhalten wir den Satz:

8. *In einem affin-veränderlichen räumlichen System sind die Mantellinien des Kernkegels und alle Parallelen zu ihnen starre Gerade.*

Je nachdem der Kernkegel reell oder imaginär ist, sind auch die starren Geraden reell oder imaginär; und um zu erkennen, unter welchen Bedingungen reelle oder imaginäre starre Gerade in einem affin-veränderlichen räumlichen System auftreten, betrachten wir eine unendlich kleine Bewegung desselben, bei welcher eine Systemphase S in eine unendlich nahe Systemphase S' übergeht. Nehmen wir in der Systemphase S eine Kugel K an, deren Mittelpunkt der selbstentsprechende Punkt O von S und S' ist, so entspricht derselben in der Systemphase S' ein Ellipsoid K' mit demselben Mittelpunkt O. Wenn sich nun die Kugel K und das unendlich nahe Ellipsoid K' in einer Kurve $\mathfrak{k}'$ schneiden, die wir in der Systemphase S' befindlich annehmen, dann entspricht dieser Kurve $\mathfrak{k}'$ eine unendlich nahe Kurve $\mathfrak{k}$ in der Systemphase S und beide Kurven $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}'$ liegen auf der Kugel K. Legen wir hiernach durch die Kurve $\mathfrak{k}$ einen Kegel $O\mathfrak{k}$, dessen Spitze der Kugelmittelpunkt O ist, so verändern die Kugelradien, die auf diesem Kegel liegen, ihre Länge nicht während der unendlich kleinen Bewegung der Kurve $\mathfrak{k}$ nach $\mathfrak{k}'$. Demnach ist der Kegel $O\mathfrak{k}$ identisch mit dem Kernkegel $O\mathfrak{k}^2$, dessen Mantellinien starre Gerade sind; denn es können in einem affin-veränderlichen räumlichen System keine anderen starren Geraden auftreten als die Mantellinien des Kernkegels und die Parallelen zu ihnen.

Besonderheiten treten auf, wenn das Ellipsoid K' die Kugel K erstens in einem Kreise berührt, zweitens in zwei diametralen Punkten berührt und drittens in zwei diametralen Punkten berührt, zugleich aber auch schneidet. Im ersten Falle geht der Kernkegel in eine Ebene über, im zweiten schrumpft derselbe in eine Gerade zusammen und im dritten artet er in zwei Ebenen aus. Hiernach folgt:

9. *In einem affin-veränderlichen räumlichen System giebt es reelle oder imaginäre starre Gerade, je nachdem das Ellipsoid K′ die Kugel K schneidet resp. berührt oder nicht schneidet.*

Da eine unendlich kleine Bewegung einer starren Geraden als eine unendlich kleine Drehung derselben um eine zugehörige momentane Drehachse betrachtet werden kann, so schneiden sich die Nullebenen der Punkte einer starren Geraden in der zugehörigen momentanen Drehachse. Eine Gerade eines affin-veränderlichen räumlichen Systems, deren Punkten Nullebenen entsprechen, die einen Ebenenbüschel erster Ordnung bilden, ist eine starre Gerade, die Achse dieses Ebenenbüschels ist die zugehörige momentane Drehachse und die Geschwindigkeiten der Punkte einer solchen Geraden sind proportional den Abständen der Punkte von dieser Drehachse. Eine Ausnahme tritt aber ein, wenn die Achse des Ebenenbüschels in der Hauptebene o_∞ liegt und derselbe also ein Parallelebenenbüschel ist; denn diesem entspricht eine veränderliche Reihe von Nullpunkten auf einer durch den Hauptpunkt O gehenden Geraden. Bei einer Punktreihe in einer auf dem Kernkegel $O\mathfrak{k}^2$ befindlichen starren Geraden fallen die zugehörigen Nullebenen in der Ebene zusammen, die durch diese Gerade geht und ihr reziprok entspricht. Eine unendlich kleine Bewegung einer solchen starren Geraden kann durch eine unendlich kleine Drehung um jede in dieser Ebene befindliche, durch O gehende Gerade ersetzt werden. Die starren Geraden auf dem Kernkegel zeichnen sich also dadurch aus, daſs zu einer solchen starren Geraden unendlich viele durch den Hauptpunkt O gehende momentane Drehachsen gehören, die in der allen Punkten dieser Geraden zugeordneten, einzigen Nullebene liegen.

Aus diesen Darlegungen ergiebt sich:

10. *Die Ordnungslinien und die zugehörigen Ordnungsachsen in dem Richtnullsystem für die Geschwindigkeiten sind resp. identisch mit den starren Geraden und den zugehörigen Drehachsen in dem affin-veränderlichen räumlichen System.*

Hiernach gelten alle Beziehungen, welche für die Ordnungslinien, die Ordnungsachsen und die Leitlinien des Richtnullsystems abgeleitet wurden, auch für die starren Geraden und deren Drehachsen. Die senkrechten Projektionen der Geschwindigkeiten der Punkte einer starren Geraden auf diese Gerade sind gleich; und es treten drei spezielle Fälle von starren Geraden auf. Erstens die *normal starren Geraden,* bei welchen die senkrechten Projektionen der Geschwindigkeiten ihrer Punkte gleich Null sind und die Geschwindigkeiten also senkrecht auf denselben stehen. Eine normal starre Gerade fällt demnach mit ihrer zugehörigen Drehachse zusammen und ist im Richtnullsystem

für die Geschwindigkeiten eine Leitlinie. Zweitens die *starren Charakteristiken* sind solche starre Gerade, deren Punkte Geschwindigkeiten besitzen, die in einer Ebene liegen. Einer starren Charakteristik entspricht demnach eine zu ihr senkrechte Drehachse und ist im Richtnullsystem für die Geschwindigkeiten eine Ordnungslinie, deren Ordnungsachse zu ihr senkrecht ist. Drittens die *Mantellinien des Kernkegels* sind spezielle starre Charakteristiken oder spezielle normal starre Gerade, bei welchen die Geschwindigkeiten ihrer Punkte senkrecht auf denselben sind und sich in einer Ebene befinden. Wir erhalten demnach zu den Sätzen 5 und 6 die analogen Sätze:

11. *In einem affin-veränderlichen räumlichen System gehen die starren Geraden durch den Kernkegelschnitt* $\mathfrak{k}^2_\infty$ *und liegen die Drehachsen in den Tangentialebenen des Einhüllkegels* Ox^2. *Die starren Geraden, sowie die Drehachsen bilden je einen singulären Komplex zweiten Grades; und diese beiden Komplexe haben die normal starren Geraden gemeinsam, die eine Kongruenz zweiten Grades bilden.*

12. *In einem affin-veränderlichen räumlichen System bilden die starren Charakteristiken, zu welchen die entsprechenden Drehachsen senkrecht sind, eine Kongruenz vierter Ordnung und zweiter Klasse.*

Aus dem 7. Satz folgt, daſs in einem polaren Richtnullsystem für die Geschwindigkeiten die normal starren Geraden, resp. die Leitlinien zu den Mantellinien des Ordnungskegels parallel sind und in den Tangentialebenen desselben liegen. Denken wir uns nun die Schar der ähnlichen und ähnlich liegenden einschaligen Hyperboloide, d. h. der coaxialen ähnlichen Hyperboloide gebildet, für welche der Ordnungskegel der gemeinsame Asymptotenkegel ist, so sind die Geraden auf diesen Hyperboloiden normal starre Gerade während der unendlich kleinen Bewegung. Eine durch zwei sich schneidende normal starre Gerade gelegte Ebene ist eine Tangentialebene an einem dieser Hyperboloide und der Berührungspunkt resp. der Schnittpunkt dieser beiden starren Geraden ist der zugehörige Nullpunkt. Hieraus folgt:

13. *Wenn in einem affin-veränderlichen räumlichen System ein polares Richtnullsystem für die Geschwindigkeiten auftritt; dann sind die Geraden, welche zu den Mantellinien des Ordnungskegels parallel sind und in den Tangentialebenen desselben liegen, normal starre Gerade, und die coaxialen ähnlichen einschaligen Hyperboloide, für welche der Ordnungskegel gemeinsamer Asymptotenkegel ist, werden aus normal starren Geraden gebildet, die auf jedem solchen Hyperboloid in ihren Treffpunkten als drehbar verbunden betrachtet werden können.*

Zwei ähnliche räumliche Systeme besitzen als selbstentsprechende Elemente einen Punkt, eine Gerade und eine Ebene, die in diesem Punkt

auf einander senkrecht stehen. Da ein ähnlich-veränderliches räumliches System S und das affine räumliche System S_v der Endpunkte der Geschwindigkeiten die selbstentsprechenden Elemente mit den unendlich nahen Systemphasen S, S' gemeinsam haben, so besitzt bei einem ähnlich-veränderlichen räumlichen System das Richtnullsystem eine Normebene und eine im Hauptpunkt O auf derselben senkrechte Normgerade. Einer um den selbstentsprechenden Punkt O der unendlich nahen Systemphasen S, S' beschriebenen Kugel in einer dieser Systemphasen entspricht eine konzentrische Kugel in der anderen, und da diese Kugeln sich in dem unendlich fernen imaginären Kugelkreis schneiden, so ist derselbe der Kernkegelschnitt dieses Richtnullsystems. Demzufolge sind die Nullflächen der Ebenenbündel Kugeln und die Nullkegelschnitte der Ebenenbüschel Kreise; und diese Kugeln, sowie diese Kreise gehen durch den Punkt O. Dieses Richtnullsystem wollen wir deshalb ein *sphärisches Richtnullsystem* nennen. In dem speziellen Fall, wenn die Punkte des ähnlich-veränderlichen räumlichen Systems sich auf Geraden bewegen, die durch einen Punkt O gehen, wird das sphärische Richtnullsystem aus den Ebenen des Raumes und den Fuſspunkten der vom Punkte O auf dieselben gefällten Senkrechten gebildet.

Wenn das ähnlich-veränderliche räumliche System in ein starres räumliches System übergeht, dann fällt der selbstentsprechende Punkt O mit dem unendlich fernen Punkt der selbstentsprechenden Geraden, resp. der Normgeraden, zusammen; demnach gehen jene Kugeln, die den Ebenenbündeln als Nullflächen, und jene Kreise, die den Ebenenbüscheln als Nullkegelschnitte entsprechen, resp. in Ebenen und Geraden über. Das sphärische Richtnullsystem für die Geschwindigkeiten bei dem ähnlich-veränderlichen räumlichen System degeneriert also bei der Bewegung eines starren räumlichen Systems in das bekannte lineare Nullsystem. Da eine momentane Bewegung eines starren räumlichen Systems S durch eine unendlich kleine Schraubenbewegung um die selbstentsprechende Gerade zweier unendlich naher Systemlagen S, S' ersetzt werden kann, so folgt, daſs bei demselben das Abtragsystem S_v der Geschwindigkeiten in eine Ebene zusammenschrumpft.

Wenn wir uns die Beschleunigungen n^{ter} Ordnung der Punkte einer Systemgeraden auf diese Gerade senkrecht projiziert denken, dann giebt es analog wie bei den Geschwindigkeiten Gerade, auf denen diese Projektionen je gleiche Gröſse besitzen, und ferner solche Gerade, auf denen diese Projektionen gleich Null sind, also die Beschleunigungen n^{ter} Ordnung senkrecht stehen. Hieraus folgt:

14. *Die Ordnungslinien und die Leitlinien in dem Richtnullsystem für die Beschleunigungen n^{ter} Ordnung sind in einem affin-veränderlichen,*

ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen System resp. identisch mit den Geraden, auf denen die senkrechten Projektionen der Beschleunigungen n^{ter} Ordnung ihrer Punkte je gleich sind, und mit den Geraden, auf denen die Beschleunigungen n^{ter} Ordnung ihrer Punkte senkrecht stehen.

Hiernach ergeben sich für diese Geraden analoge sinngemäfse Beziehungen zu einem affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen System wie die abgeleiteten Beziehungen der starren Geraden in einem affin-veränderlichen räumlichen System.

Denken wir uns zu einer Phase S eines affin-veränderlichen räumlichen Systems, welches auch ähnlich-veränderlich oder starr sein kann, für den gemeinsamen Urpunkt $\mathfrak{O}^{\mu\nu}$ die beiden affinen Abtragsysteme S_μ, S_ν der Beschleunigungen m^{ter} und n^{ter} Ordnung bestimmt, so erfüllen die durch den Urpunkt gehenden Geraden des Systems S_μ, welche die entsprechenden Geraden des Systems S_ν schneiden, einen Kegel zweiter Ordnung, und diese Schnittpunkte, als Punkte des Systems S_ν betrachtet, bilden in demselben eine Raumkurve R_ν dritter Ordnung, der im System S_μ eine auf diesem Kegel liegende Raumkurve R_μ dritter Ordnung entspricht; und demnach gehen die Verbindungsgeraden der homologen Punkte dieser Raumkurven R_μ, R_ν durch den Urpunkt $\mathfrak{O}^{\mu\nu}$. Diese Raumkurven gehen auch durch den selbstentsprechenden Punkt $G_{\mu\nu}$ der Abtragsysteme S_μ, S_ν. Diesem Punkt entspricht in dem System S ein Punkt G, dessen Beschleunigungen m^{ter} Ordnung und n^{ter} Ordnung gleich und gleich gerichtet sind. Wenn wir uns nun zu diesen beiden Raumkurven die entsprechende Raumkurve R_{mn} dritter Ordnung in der Phase S bestimmt denken, so erhalten wir den Satz:

15. *Die Punkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems, für welche die Beschleunigungen m^{ter} und n^{ter} Ordnung in je einer Geraden liegen, erfüllen eine durch die beiden Beschleunigungspole m^{ter} und n^{ter} Ordnung gehende Raumkurve dritter Ordnung, auf welcher sich der Systempunkt befindet, für welchen diese Beschleunigungen gleich und gleich gerichtet sind.*

Da die Geschwindigkeiten die Beschleunigungen nullter Ordnung sind und in den Tangenten der Bahnkurven liegen, so erfüllen die Beschleunigungen n^{ter} Ordnung, die sich in den Tangenten der Bahnkurven befinden, eine durch den Geschwindigkeitspol und den Beschleunigungspol n^{ter} Ordnung gehende Raumkurve dritter Ordnung; und wenn insbesondere diese Beschleunigungen erster Ordnung sind, dann sind diese Punkte Wendepunkte der betreffenden Bahnkurven. Diese Beziehung wurde zuerst von Mehmke[1]) abgeleitet und dabei

1) Civilingenieur 1883, Bd. 29, S. 580.

darauf hingewiesen, dafs in dem 43. Satz des ersten Teiles dieser Abhandlung diese Raumkurve dritter Ordnung, die von den Wendepunkten gebildet wird, irrtümlich als Raumkurve sechster Ordnung angegeben wurde; denn dort ist ein Fehler bei der Abzählung entstanden.

Nehmen wir in einem Bewegungsmoment zu einem affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen System S das Abtragsystem S_v der Beschleunigungen n^{ter} Ordnung an; sind ferner e, e_v zwei homologe Ebenen der affinen Systeme S, S_v und fällen wir von dem Urpunkt $\mathfrak{O}_v$ dieses Abtragsystems auf die Ebene e_v eine Senkrechte, deren Fufspunkt E_v ist, so stellt diese Senkrechte $\mathfrak{O}_v E_v$ die Gröfse und Richtung der Beschleunigung n^{ter} Ordnung des entsprechenden Punktes E der Ebene e dar. Demnach besitzt dieser Punkt E die kleinste Beschleunigung n^{ter} Ordnung von allen Punkten der Ebene e. Nehmen wir umgekehrt in dem System S einen beliebigen Punkt E an, und bestimmen wir den homologen Punkt E_v in dem System S_v; legen wir ferner durch E_v auf $\mathfrak{O}_v E_v$ die senkrechte e_v, so entspricht derselben eine durch E gehende Ebene e, in welcher der Punkt E die kleinste Beschleunigung n^{ter} Ordnung besitzt. Demnach giebt es in jeder Ebene eindeutig einen Punkt mit kleinster Beschleunigung n^{ter} Ordnung, und durch jeden Punkt geht eine eindeutig bestimmte Ebene, in welcher diesem Punkt die kleinste Beschleunigung n^{ter} Ordnung angehört. Parallelen Ebenen e im System S entsprechen parallele Ebenen e_v im System S_v; ferner entsprechen den Fufspunkten E_v, in welchen diese Ebenen von der durch den Punkt $\mathfrak{O}_v$ gehenden senkrechten Geraden $\mathfrak{h}_v$ getroffen werden, die Punkte E der kleinsten Beschleunigung in den parallelen Ebenen e; und diese Punkte E liegen auf der entsprechenden durch den Beschleunigungspol n^{ter} Ordnung gehenden Geraden $\mathfrak{h}$. Hieraus ergiebt sich der Satz:

16. *In einem affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen System bilden die Ebenen und die zugehörigen Punkte kleinster Beschleunigung n^{ter} Ordnung in jedem Bewegungsmoment ein Richtnullsystem, dessen Hauptpunkt der jeweilige Beschleunigungspol n^{ter} Ordnung ist.*

Beschreiben wir um den Urpunkt $\mathfrak{O}_v$ des Abtragsystems S_v eine Kugel K_v, so entspricht derselben in dem System S ein Ellipsoid K, dessen Mittelpunkt der Beschleunigungspol n^{ter} Ordnung ist. Ferner entspricht einer Schar konzentrischer Kugeln um $\mathfrak{O}_v$ eine Schar coaxialer ähnlicher Ellipsoide, für welche der Beschleunigungspol n^{ter} Ordnung der gemeinsame Mittelpunkt, also auch der Ähnlichkeitspunkt ist. Hieraus ergiebt sich:

17. *Der geometrische Ort der Punkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems, die Beschleunigungen*

n^{ter} Ordnung von einer gleichen Gröfse besitzen, ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Beschleunigungspol n^{ter} Ordnung ist; und alle solche Ellipsoide sind coaxial ähnlich.

18. *Die Tangentialebenen an den coaxialen ähnlichen Ellipsoiden, deren Punkte je gleiche Beschleunigung n^{ter} Ordnung besitzen, und die zugehörigen Berührungspunkte bilden dasselbe Richtnullsystem, welches durch die Ebenen und ihre zugehörigen Punkte kleinster Beschleunigung n^{ter} Ordnung bestimmt ist.*

In jeder Ebene, welche ein Ellipsoid berührt, dessen Punkte gleiche Beschleunigungen n^{ter} Ordnung besitzen, hat also der Berührungspunkt die kleinste Beschleunigung n^{ter} Ordnung. Denken wir uns in diesem Richtnullsystem diese Berührungspunkte mit dem gemeinsamen Mittelpunkt der coaxialen ähnlichen Ellipsoide durch Gerade verbunden und durch denselben Ebenen parallel zu den betreffenden Tangentialebenen gelegt, dann bilden diese Geraden und diese Ebenen zusammen einen polaren Bündel; demnach ist dieses Richtnullsystem ein spezielles polares Richtnullsystem, in welchem die gemeinsamen Achsenrichtungen und die gemeinsamen Achsenebenen der coaxialen ähnlichen Ellipsoide resp. die senkrechten Normgeraden und die senkrechten Normebenen sind. Dieses spezielle polare Richtnullsystem, welches auch auftritt, wenn jeder Ebene des Raumes der Mittelpunkt des Kegelschnittes zugeordnet wird, in dem sie eine gegebene zentrische Fläche zweiter Ordnung schneidet, wurde auf Grund dieser allgemeineren Definition von Timerding[1]) behandelt, und Sturm[2]) hat auf dasselbe zuerst hingewiesen.

Nehmen wir zwei Phasen S, S_1 eines affin-veränderlichen räumlichen Systems an, so entspricht einer in der Phase S befindlichen Kugel K, deren Mittelpunkt M ist, ein Ellipsoid K_1 mit dem Mittelpunkt M_1 in der Phase S_1. Den drei Halbachsen M_1A_1, M_1B_1, M_1C_1 dieses Ellipsoids K_1 entsprechen drei zu einander senkrechte Radien MA, MB, MC der Kugel K. Bezeichnen wir mit r den Radius dieser Kugel, und ist $M_1A_1 > M_1B_1 > M_1C_1$, so sind die Änderungen des Radius r in den Achsenrichtungen des Ellipsoids $\alpha = M_1A_1 - r$, $\beta = M_1B_1 - r$, $\gamma = M_1C_1 - r$. Wenn diese drei Änderungen positiv sind, dann ist α die gröfste, β die mittlere und γ die kleinste Verlängerung, wenn dagegen diese drei Änderungen negativ sind, dann ist α die kleinste, β die mittlere und γ die gröfste Verkürzung. Sind zwei dieser Änderungen positiv und ist eine negativ, oder sind zwei

1) Timerding, Über ein quadratisches Nullsystem. Annali di Matematica 1899, Ser. III. T. II. p. 239.

2) Sturm, Liniengeometrie 1892, 1. T. S. 78.

negativ und ist eine positiv, dann schneidet die Kugel K, wenn sie mit ihrem Mittelpunkt M nach M_1 verlegt wird, das Ellipsoid K_1 in einer Raumkurve $\varkappa_1$ vierten Grades, der auf der Kugel K in der Phase S eine Raumkurve $\varkappa$ vierten Grades entspricht. Alle Kugelradien, die von dem Mittelpunkt M nach der Raumkurve $\varkappa$ gehen und also auf einem Kegel zweiter Ordnung liegen, haben demnach in der Phase S_1 ihre ursprüngliche Länge wieder erhalten.

Sind p_1, q_1 in einer Phase S_1 die beiden Scharen paralleler Ebenen, die das Ellipsoid K_1 in den beiden Kreisscharen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$ schneiden und sind p, q in der Phase S die beiden entsprechenden Scharen paralleler Ebenen, so schneiden dieselben die Kugel K in den beiden entsprechenden Kreisscharen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$. Wenn nun einem Kreis $\mathfrak{p}$ in der Ebene p der Phase S ein Kreis $\mathfrak{p}_1$ in der homologen Ebene p_1 der Phase S_1 entspricht, so sind die entsprechenden ebenen Systeme in diesen Ebenen ähnlich. Hiernach erhalten wir den Satz:

19. *Es giebt in je zwei Phasen eines affin-veränderlichen räumlichen Systems je zwei entsprechende Scharen paralleler Ebenen, in denen die entsprechenden ebenen Systeme ähnlich sind.*

Nehmen wir an, dafs die beiden Phasen S, S_1 unendlich nahe sind, dann ergiebt sich:

20. *In jeder Phase eines affin-veränderlichen räumlichen Systems giebt es zwei Scharen paralleler Ebenen, in denen die ebenen Systeme während einer unendlich kleinen Bewegung ähnlich-veränderlich sind.*

Wir wollen die Ebenen in einer Phase eines affin-veränderlichen räumlichen Systems, in denen sich ebene Systeme befinden, die während einer unendlich kleinen Bewegung ähnlich-veränderlich sind, *Ähnlichkeitsebenen* nennen. Die beiden Scharen der paralleien Ähnlichkeitsebenen, die stets reell sind, wandern in dem bewegten affin-veränderlichen System, und sie vereinen sich zu einer Schar, wenn einer Kugel in einer Phase ein Rotationsellipsoid in der unendlich nahen Phase entspricht.

In besonderen Fällen kann eine Schar oder können beide Scharen der Ähnlichkeitsebenen dem affin-veränderlichen räumlichen System dauernd als Systemebenen angehören. Denken wir uns, um einen solchen Fall zu betrachten, drei Punkte A, B, C eines affin veränderlichen räumlichen Systems auf drei Bahnen so bewegt, dafs das Dreieck ABC beständig ein ähnlich-veränderliches bleibt und noch einen vierten Punkt D dieses Systems, der nicht in der durch ABC gehenden Ebene p liegt, auf einer Bahn bewegt; dann ist diese Ebene p in allen Phasen des affin-veränderlichen Systems eine Ähnlichkeitsebene. Und diese Ebene p nebst allen zu ihr parallelen Ebenen bilden eine Schar

der Ähnlichkeitsebenen, die beständig Systemebenen des affin-veränderlichen räumlichen Systems sind; aber die andere Schar der Ähnlichkeitsebenen wandert in diesem System. Wenn insbesondere das bewegte Dreieck ABC beständig starr bleibt, dann erhalten wir zwei Scharen von parallelen Ebenen, in denen die ebenen Systeme starr sind und die wir *Starrheitsebenen* nennen. Die Starrheitsebenen der einen Schar sind in diesem Fall Systemebenen, die der anderen Schar wandern in dem affin-veränderlichen räumlichen System.

Wir wollen nun noch auf einige beachtenswerte spezielle Fälle der Bewegungen affin-veränderlicher räumlicher Systeme hinweisen. Wenn ein Punkt O und drei durch ihn gehende, nicht in einer Ebene liegende Gerade Ox, Oy, Oz eines affin-veränderlichen räumlichen Systems fest sind, dann ist die Bewegung resp. die Veränderung desselben bestimmt durch die Bewegung eines Systempunktes P auf einer gegebenen Bahn. Wir können die drei Geraden Ox, Oy, Oz als Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems annehmen, auf denen die Strecken $OX = x$, $OY = y$, $OZ = z$ die Koordinaten des Punktes P sind, und durch die Bewegung des Systempunktes P sind dann auch die Bewegungen der Systempunkte X, Y, Z auf den festen Koordinatenachsen Ox, Oy, Oz bestimmt. Ferner ist die Bewegung eines solchen affin-veränderlichen räumlichen Systems auch bestimmt, wenn die Koordinaten x, y, z als Funktionen einer veränderlichen Gröſse, z. B. der Zeit, bekannt sind. In diesem affin-veränderlichen räumlichen System sind auſser dem Punkt O auch die unendlich fernen Punkte X_∞, Y_∞, Z_∞ auf den festen Geraden Ox, Oy, Oz fest. Von diesen unendlich fernen Punkten können auch zwei imaginär sein; dann sind auch die beiden betreffenden festen Geraden imaginär und können als Koordinatenachsen nicht verwendet werden. Hiernach ergiebt sich aus einem für kollinear-veränderliche räumliche Systeme abgeleiteten Satz[1]) als spezieller Fall der Satz:

21. *Sind in einem affin-veränderlichen räumlichen System ein im Endlichen liegender Punkt O und drei unendlich ferne Punkte X_∞, Y_∞, Z_∞ fest; dann vollziehen die Systempunkte affine Bewegungen auf entsprechenden Bahnen in affinen räumlichen Systemen, für welche die vier Punkte O, X_∞, Y_∞, Z_∞ selbstentsprechende Punkte sind.*

Bei dieser speziellen Bewegung eines affin-veränderlichen räumlichen Systems, die wir eine *einförmige Bewegung* desselben nennen, ist aber zu beachten, daſs die Bahnen der Systempunkte in den drei festen Ebenen, von denen auch zwei imaginär sein können, sich in

1) L. Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen gesetzmäſsig-veränderlicher Systeme. In dieser Zeitschrift 1875, Bd. 20 S. 397.

affinen ebenen Systemen entsprechen, für welche der Punkt O und je zwei der unendlich fernen Punkte X_∞, Y_∞, Z_∞ fest sind; denn diese affinen ebenen Systeme sind als Ausartungen der betreffenden affinen räumlichen Systeme zu betrachten. Die affin-veränderlichen Systeme in einer festen Ebene vollziehen demnach eine *ebene einförmige Bewegung.*[1]) Bei der einförmigen Bewegung eines affin-veränderlichen räumlichen Systems sind die Bahnen der Systempunkte einer durch den Punkt O gehenden Geraden homothetisch ähnlich; denn dann gehen die betreffenden affinen räumlichen Systeme in homothetisch ähnliche räumliche Systeme über, deren Ähnlichkeitspunkt O ist.

In der Krystallographie wird als Grundsatz angenommen, dafs parallele Gerade in Krystallen durch gleiche Ursachen auch gleiche Veränderungen erleiden, dafs also bei der Veränderung der Krystalle durch Wärme parallele Gerade in denselben parallel bleiben und ihre Richtungen im allgemeinen ändern; demnach ist diese Veränderung eines Krystalls eine affin-veränderliche, und in der Krystallographie wird dieselbe eine homogene Veränderung genannt. Ein durch Wärme sich verändernder Krystall bildet also ein affin-veränderliches räumliches System und in besonderen Fällen auch ein ähnlich-veränderliches räumliches System. Alle Beziehungen, welche bei den affin-veränderlichen resp. ähnlich-veränderlichen räumlichen Systemen auftreten, finden hiernach sinngemäfse Deutung oder eventuelle Anwendung auf die Veränderungen der Krystalle durch Wärme.

In denjenigen optisch zweiachsigen Krystallen, in denen die drei auf einander senkrechten Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes für alle Farben zusammenfallen, bleiben diese Richtungen bei der Veränderung dieser Krystalle durch Wärme stets senkrecht auf einander. Wir können in einem solchen Krystall durch einen Punkt O desselben drei zu diesen Richtungen parallele Gerade Ox, Oy, Oz legen und diesen Punkt sowie diese Geraden als fest annehmen. Solche drei feste, auf einander senkrechte Gerade werden die *thermischen Achsen des Krystalls* genannt und können als Koordinatenachsen betrachtet werden.

Nehmen wir auf den thermischen Achsen Ox, Oy, Oz, resp. die Punkte X, Y, Z des Krystalls an, betrachten wir die Strecken $OX = x$ $OY = y$, $OZ = z$ als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes P des Krystalls, und sind ferner diese Koordinaten als Funktionen der Temperatur experimentell ermittelt, dann ist die Bahn des Punktes P und damit die thermische Veränderung des Krystalls als eine einförmige Bewegung eines affin-veränderlichen räumlichen Systems bestimmt.

---

1) Vergl L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik. 1888, Bd. 1, S. 904.

Bei den optisch einachsigen Krystallen ist die optische Achse zugleich eine thermische Achse, z. B. die Koordinatenachse Oz, und für die Koordinaten x, y auf den beiden anderen Koordinatenachsen Ox, Oy sind die genannten Funktionen gleich. Die thermische Veränderung in der Koordinatenebene Oxy ist demnach die eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems, dessen Punkte sich auf festen Geraden bewegen, die durch den festen Punkt O gehen; und alle diese festen Geraden können auch als thermische Achsen betrachtet werden. Bei den einfachbrechenden Krystallen sind alle drei der genannten Funktionen gleich, und die thermische Veränderung derselben ist die eines ähnlich-veränderlichen räumlichen Systems, dessen Punkte sich auf festen Geraden bewegen, die durch den festen Punkt O gehen und als thermische Achsen angesehen werden können.

Die Bahnen der Punkte eines der genannten, optisch zweiachsigen Krystalle entsprechen sich in affinen räumlichen Systemen, für welche der Punkt O und die unendlich fernen Punkte X_∞, Y_∞, Z_∞ der thermischen Achsen Ox, Oy, Oz selbstentsprechende Punkte sind; und die abwickelbaren Flächen, welche von den Ebenen dieses Krystalls erzeugt werden, entsprechen sich ebenfalls in diesen affinen räumlichen Systemen. Insbesondere entsprechen sich die Bahnen der in den thermischen Achsenebenen befindlichen Punkte in affinen ebenen Systemen, für welche der Punkt O sowie je zwei der Punkte X_∞, Y_∞, Z_∞ selbstentsprechende Punkte sind, und die Kurven, welche die Geraden in diesen Ebenen im allgemeinen umhüllen, entsprechen sich ebenfalls in diesen affinen ebenen Systemen. Die Bahnen der Punkte jeder durch den Punkt O gehenden Geraden sind homothetisch ähnlich.

Nehmen wir an, dafs die Koordinaten eines Punktes P durch Funktionen der Temperatur t bestimmt sind, z. B. durch die linearen Funktionen $x = a + \alpha t$, $y = b + \beta t$, $z = c + \gamma t$, oder durch die allgemeineren Funktionen $x = a + \alpha f(t)$, $y = b + \beta f(t)$, $z = c + \gamma f(t)$, dann bewegt sich der Punkt P auf einer Geraden; demzufolge bewegen sich alle Punkte des Krystalls auf Geraden und beschreiben auf denselben ähnliche Punktreihen, die sich in affinen räumlichen Systemen entsprechen, für welche die Punkte O, X_∞, Y_∞, Z_∞ selbstentsprechende Punkte sind. Ferner erzeugen in diesem Fall alle Ebenen des Krystalls, welche die drei Koordinatenachsen, resp. die thermischen Achsen im Endlichen schneiden, abwickelbare Flächen, die sich in diesen affinen räumlichen Systemen entsprechen, und von den drei Koordinatenebenen in Parabeln geschnitten werden; denn die in diesen Ebenen befindlichen Geraden, welche je zwei Koordinatenachsen im Endlichen treffen, umhüllen Parabeln, die von diesen Koordinatenachsen berührt werden.

Die Ebenen aber, welche zu einer Koordinatenachse parallel sind, umhüllen parabolische Cylinder.

Bei einem optisch einachsigen Krystall, dessen thermische resp. optische Achse in Oz liegt, ist das ebene System in der festen Ebene Oxy ein ähnlich-veränderliches System, dessen Punkte ähnliche Punktreihen auf Geraden beschreiben, die durch den festen Punkt O gehen, und alle zu Oxy parallele resp. auf Oz senkrechte Ebenen sind dauernde Ähnlichkeitsebenen. Alle durch die optische Achse Oz gelegten Ebenen sind fest und demnach liegen die Bahnen der Punkte eines solchen Krystalls in diesen Ebenen. Diese ebenen Bahnen entsprechen sich in affinen räumlichen Systemen, für welche der Punkt O, sowie der unendlich ferne Punkt Z_∞ der optischen Achse Oz und zwei beliebige unendlich ferne Punkte der Ebene Oxy selbstentsprechende Punkte sind. Ferner entsprechen sich die Bahnen in jeder durch OZ_∞ gelegten Ebene, welche die Ebene Oxy in einer Geraden OU_∞ schneidet, in affinen ebenen Systemen, für welche die Punkte O, U_∞, Z_∞ selbstentsprechende Punkte sind. Da jede Gerade in der Ebene Oxy während der Bewegung ihre Richtung nicht ändert, so umhüllen die Ebenen des Krystalls Cylinderflächen, welche der Ebene Oxy parallel sind. Einer um den Punkt O beschriebenen Kugel K entspricht nach einer unendlich kleinen Änderung ein unendlich nahes Rotationsellipsoid K', dessen Mittelpunkt O ist und dessen Rotationsachse in Oz liegt. Wenn nun, wie z. B. bei dem Kalkspath, in dieser Rotationsachse eine Ausdehnung und senkrecht zu derselben eine Zusammenziehung stattfindet, dann schneidet das Rotationsellipsoid K' die Kugel K in zwei Kreisen $\mathfrak{k}'$, denen die Kreise $\mathfrak{k}$ entsprechen, und die Mantellinien des Rotationskegels $O\mathfrak{k}$, sowie die zu denselben parallelen Geraden sind dann momentan starre Gerade in diesem Krystall.

Hiernach ist es nicht zulässig wie F. Neumann[1]) folgerte: „Man könnte aus dem Kalkspath Stäbe schneiden, deren Längen sich mit der Temperatur nicht ändern; hier löst also eine krystallinische Substanz ein Problem, dessen Lösung oft sehr gewünscht wird." Denn dauernde starre Gerade würden nur dann vorhanden sein, wenn durch Beobachtung erkannt würde, dafs auf den thermischen Achsen Ox, Oz, resp. zwei Punkte X, Z in dem Kalkspath bei der thermischen Veränderung konstanten Abstand haben.

In denjenigen optisch zweiachsigen Krystallen, in welchen nur eine Hauptschwingungsrichtung des Lichtes für alle Farben dieselbe ist, bleiben diese Richtung und eine zu ihr senkrechte Ebene während der

---

1) F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Elasticität etc. 1885, S. 118.

thermischen Veränderung beständig senkrecht aufeinander. Wir können in einem solchen Krystall durch einen Punkt O desselben eine Gerade Oz parallel zu dieser Richtung, ferner durch O senkrecht zu ihr eine Ebene e legen, und diese Gerade Oz sowie diese Ebene e als fest annehmen. Die feste Gerade Oz ist dann in diesem Krystall die einzige thermische Achse; denn in der festen Ebene e desselben existieren nachweislich keine thermischen Achsen. Man könnte nun vermuten, die thermische Veränderung eines solchen Krystalls sei auch eine einförmige Bewegung eines affin-veränderlichen räumlichen Systems, in welchem aufser der Geraden Oz als reeller thermischer Achse noch zwei durch den Punkt O gehende imaginäre Gerade in der Ebene e als imaginäre thermische Achsen fest sind. Wenn dies durch experimentelle Beobachtung und rechnerische Bestimmung bestätigt würde, dann könnte man ferner vermuten, dafs die thermische Veränderung bei den optisch zweiachsigen Krystallen, in welchen alle drei Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes für die verschiedenen Farben verschieden sind, ebenfalls eine einförmige Bewegung eines affin-veränderlichen räumlichen Systems sei, in dem eine Gerade sowie eine zu derselben nicht senkrechte Ebene und zwei in ihr liegende imaginäre Gerade fest sind. Wenn die thermische Veränderung dieser beiden hier zuletzt genannten Abteilungen der Krystalle sich auch dem Gesetze der einförmigen Bewegung affin-veränderlicher räumlicher Systeme fügte, und dann die Veränderungen von drei Punkten in Bezug auf eine feste Ebene, in welcher ein Krystallpunkt und eine durch denselben gehende Krystallgerade fest gelegt sind, bestimmt würden, so wäre damit eine vollständige Einsicht in die thermischen Veränderungen gewonnen; denn die Auffassung, dafs es in einem affin-veränderlichen räumlichen System in je zwei unendlich nahen, oder endlich getrennten Phasen drei auf einander senkrechte, entsprechende Gerade giebt, die aber in dem System wandern und als veränderliche thermische Achsen zu betrachten seien, kann die Vorstellung dieser Veränderungen nicht fördern.

Wir wollen noch solche einförmig bewegte affin-veränderliche räumliche Systeme betrachten, in welchen sich dauernde starre Gerade befinden. In einem affin-veränderlichen räumlichen System nehmen wir wieder drei auf einander senkrechte Gerade Ox, Oy, Oz als feste Systemgerade und als Koordinatenachsen an. Wenn nun auf diesen Koordinatenachsen die Systempunkte X, Y, Z sich so bewegen, dafs die Strecken $XZ = a$, $YZ = b$ konstant sind, dann ist die Bahn des Systempunktes P, dessen Koordinaten $OX = x$, $OY = y$, $Oz = z$ sind, und damit auch die einförmige Bewegung dieses affin-veränderlichen

räumlichen Systems bestimmt. Bezeichnen wir die Projektionen des Systempunktes P auf die Koordinatenebenen Oxy, Oxz, Oyz resp. mit P_1, P_2, P_3, so ergiebt sich, daſs der Punkt P_1 in der Ebene Oxy sich auf einer durch die Gleichung $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ bestimmten gleichseitigen Hyperbel bewegt, daſs ferner der Punkt P_2 in der Ebene Oxz sich auf einem um O mit dem Radius a beschriebenen Kreis, und der Punkt P_3 in der Ebene Oyz auf einem um O mit dem Radius b beschriebenen Kreis bewegt. Demnach ist auch die Gerade OP_2 eine starre Gerade in dem affin-veränderlichen ebenen System in der Ebene Oxz und ferner auch die Gerade OP_3 eine starre Gerade in dem affinveränderlichen ebenen System in der Ebene Oyz. Denken wir uns nun in der zu Oz senkrechten Ebene durch den Punkt Z eine Ellipse ε gegeben, deren Halbachsen $ZP_2 = \sqrt{a^2 - z^2}$, $ZP_3 = \sqrt{b^2 - z^2}$ sind, dann gehört der Kegel $O\varepsilon$ zu dem affin-veränderlichen räumlichen System und seine Mantellinien sowie alle Parallelen zu denselben sind dauernde starre Gerade in diesem System.

Nehmen wir nun in dem affin-veränderlichen räumlichen System die Schar coaxialer ähnlicher einschaliger Hyperboloide an, für welche der Kegel $O\varepsilon$ gemeinsamer Asymptotenkegel und somit auch der feste Punkt O gemeinsamer Mittelpunkt ist; dann wird jedes dieser affin-veränderlichen Hyperboloide aus starren Geraden gebildet, die wir uns in ihren Treffpunkten gelenkig verbunden denken können. Die Achsen dieser coaxialen ähnlichen Hyperboloide liegen in den Koordinatenachsen Ox, Oy, Oz; und es sind, wenn k eine Konstante bezeichnet, die Halbachsen des betreffenden Hyperboloids resp. gleich $k\sqrt{a^2 - z^2}$, $k\sqrt{b^2 - z^2}$, kz. Demnach bilden die Phasen eines jeden dieser affin-veränderlichen Hyperboloide eine Schar konfokaler Hyperboloide.

Bei diesem einförmig bewegten affin-veränderlichen räumlichen System fällt der Kernkegel $O\varepsilon$, wie es die momentane Bewegung ergiebt, mit dem Einhüllkegel zusammen, und ist demnach der Ordnungskegel des polaren Richtnullsystems für die Geschwindigkeiten, welches beständig in allen Phasen dieses veränderlichen Systems auftritt. Da jede Gerade auf einem der coaxialen ähnlichen Hyperboloide auch in einer Tangentialebene des Ordnungskegels $O\varepsilon$ liegt, so sind die Geraden aller dieser Hyperboloide normal starre Gerade. Die Bewegungsrichtungen der Punkte einer normal starren Geraden sind senkrecht zu derselben und die zugehörige Drehachse fällt mit ihr zusammen. Jede Tangentialebene an einem der coaxialen ähnlichen Hyperboloide schneidet dasselbe in zwei durch den Berührungspunkt gehenden normal starren Geraden, und folglich bewegt sich der Berührungspunkt stets senkrecht zu der Tangentialebene. Die Punkte dieser coaxialen ähnlichen

Hyperboloide bewegen sich demnach immer auf Normalen derselben. Diese Beziehungen ergeben sich auch unmittelbar aus dem 13. Satz. Denken wir uns an beliebiger Stelle in dem affin-veränderlichen räumlichen System ein einschaliges Hyperboloid gegeben, dessen Asymptotenkegel dem Ordnungskegel $O\varepsilon$ kongruent und parallel zu demselben gestellt ist, dann wird auch dieses affin-veränderliche Hyperboloid, dessen bewegte Achsen zu den Koordinatenachsen parallel bleiben, aus gelenkig verbunden gedachten starren Geraden gebildet, und die momentanen Drehachsen dieser starren Geraden liegen in den Tangentialebenen des jeweiligen Ordnungskegels $O\varepsilon$.

Wenn von jenen konstanten Strecken $a > b$ ist, so wird die veränderliche Strecke OZ im Maximum gleich b; dann schrumpfen mit dem affin-veränderlichen räumlichen System die gelenkigen Hyperboloide in der Koordinatenebene Oxz zusammen und die starren Geraden auf denselben gehen in Tangenten an coaxialen ähnlichen Hyperbeln über. Gelangt der Punkt Z nach O, wird also die Strecke $OZ = 0$, dann schrumpfen mit diesem System auch diese Hyperboloide in der Koordinatenebene Oxy zusammen, und die starren Geraden gehen in Tangenten an coaxialen ähnlichen Ellipsen über. Jedes einschalige Hyperboloid ist hiernach ein affin-veränderliches Gebilde aus starren Geraden, die in ihren Treffpunkten als gelenkig verbunden betrachtet werden können.

Wenn jene beiden konstanten Strecken a, b gleich sind, ist das ebene System in der Koordinatenebene Oxy ein ähnlich-veränderliches, dessen Punkte sich auf Geraden bewegen, die durch den Punkt O gehen, und die Systempunkte, welche nicht in den Koordinatenachsen liegen, bewegen sich in den durch Oz gelegten Ebenen auf Ellipsen, deren Mittelpunkt O ist und die für die Punkte des Ordnungskegels $O\varepsilon$ in Kreise übergehen. In diesem speziellen Fall sind die gelenkigen Hyperboloide in dem affin-veränderlichen räumlichen System Rotationshyperboloide. In schlichter Ausführung kommt das gelenkige Rotationshyperboloid vor als veränderliches Blumentopf-Gitter und als Windefläche bei einer einstellbaren Garnwinde. Das gelenkige Hyperboloid wurde von O. Henrici[1]) erkannt und als Modell ausgeführt, und auf die affine Veränderung desselben hat F. Schur[2]) hingewiesen.

Werden die Punkte des affin-veränderlichen räumlichen Systems auf der Koordinatenachse Oz als fest angenommen, dann sind auch die auf Oz senkrechten Ebenen fest, und die Bahnen der Systempunkte

1) Katalog mathematischer und physikalischer Modelle etc. von W. Dyck. 1892, S. 261.

2) In dieser Zeitschrift 1899, Bd. 44, S. 62.

liegen in diesen Ebenen, in denen die ebenen Systeme gleiche Bewegungen vollziehen. Bewegen sich nun zwei Systempunkte X, Y auf den beiden anderen Koordinatenachsen Ox, Oy derart, daſs die Strecke $XY = m$ konstant ist, dann bewegt sich der Punkt P_1, dessen Koordinaten OX, OY sind, in der Ebene Oxy auf einem um den Punkt O mit dem Radius m beschriebenen Kreis; demnach sind die Bahnen aller Punkte der Geraden OP_1 konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt O; und ferner sind die Bahnen der anderen Punkte dieses affin-veränderlichen ebenen Systems Ellipsen, die für die Punkte auf den Koordinatenachsen in gerade Strecken übergehen. Das ebene System in der Ebene OzP_1 ist ein starres, weil die Strecken auf Oz und OP_1 konstant sind; und das gleiche gilt von dem ebenen System in der Ebene OzP_1', die mit der Koordinatenebene Oxz oder Oyz gleiche Winkel bildet, wie die Ebene OzP_1. Demnach sind die Ebenen OzP_1, OzP_1' und die zu denselben parallelen Ebenen in dem affin-veränderlichen räumlichen System Starrheitsebenen; und jener Kegel $O\varepsilon$ artet in diesem Fall aus in die beiden Ebenen OzP_1, OzP_1'. Dies ergiebt sich auch daraus, daſs einer um den Punkt O beschriebenen Kugel in einer Systemphase ein Ellipsoid in einer anderen, oder in einer unendlich nahen Systemphase entspricht, welches die Kugel in zwei auf Oz liegenden Punkten berührt und in zwei Kreisen schneidet.

Nehmen wir in diesem ähnlich-veränderlichen räumlichen System ein hyperbolisches Paraboloid an, dessen beide Geradenscharen zu den Starrheitsebenen OzP_1, OzP_1' parallel sind und dessen Hauptschnittebenen parallel zu den Koordinatenebenen oder in denselben liegen; dann wird dieses affin-veränderliche hyperbolische Paraboloid aus starren Geraden gebildet, die in ihren Treffpunkten als gelenkig verbunden betrachtet werden können. Jedes hyperbolische Paraboloid ist hiernach ein affin-veränderliches Gebilde aus starren Geraden, die in ihren Treffpunkten gelenkig verbindbar sind.

In diesem affin-veränderlichen räumlichen System verwandelt sich ferner jede Fläche zweiter Ordnung, deren Kreisschnitte zu den Starrheitsebenen OzP_1, OzP_1' parallel sind, in eine solche mit denselben Kreisschnitten. Alle diese affin-veränderlichen Flächen zweiter Ordnung, die einem solchen affin-veränderlichen räumlichen System angehören, wurden von A. Brill[1]) in Karton-Modellen ausgeführt.

---

1) Verlag von M. Schilling in Halle a. S., früher im Verlag von L. Brill in Darmstadt.

Zur Ausgleichung von Polygonen und von Dreiecksketten und über die internationale Näherungsformel für den mittleren Winkelfehler.

Von L. Krüger in Potsdam.

Einem Antrage des Herrn A. Ferrero folgend, der durch ein von den Herren F. R. Helmert und W. Foerster erstattetes Gutachten unterstützt wurde, hat die Vereinigung der internationalen Erdmessung zu Nizza 1887 den Beschlufs gefafst, dafs den Berichten über den Stand der Triangulationen der Erdmessung für jedes Dreiecksnetz der nach der Näherungsformel $\sqrt{\frac{\Sigma w^2}{3n}}$ berechnete mittlere Fehler eines Winkels, bezw. $\sqrt{\frac{\Sigma w^2}{6n}}$ für die Richtung, zugefügt wird. w bedeutet den Widerspruch zwischen Rechnung und Beobachtung für die Winkelsumme eines Dreiecks und n ist die Anzahl aller Dreiecke. Indem man, ohne auf die Bedingungsgleichungen, die von den Seitenverhältnissen herrühren, Rücksicht zu nehmen, aus sämtlichen Winkelgleichungen für den Dreieckswiderspruch einen mittleren Wert herstellt, schliefst man also auf den mittleren Wert der Abweichung eines Winkels bezw. einer Richtung. Streng richtig ist bekanntlich die Ferrerosche Formel nur für eine Kette einfach aneinander hängender Dreiecke, in denen jeder Winkel mit gleichem Gewichte gemessen ist.

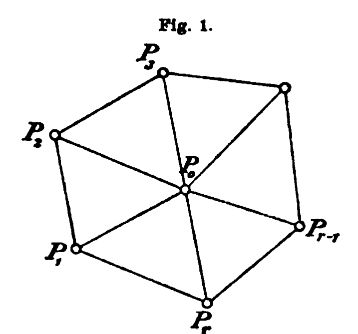
Ich werde nun im Folgenden zunächst die Ausgleichung eines Zentralsystems geben, bei dem die Dreieckswinkel durch *Winkel*beobachtungen von gleicher Genauigkeit erhalten sind; im Anschlufs daran wird für eine, aus aneinander gereihten Zentralsystemen bestehende Doppelkette für den mittleren Winkelfehler eine Näherungsformel entwickelt, die ohne vielen Rechnungsaufwand eine etwas gröfsere Annäherung als die Ferrerosche Formel giebt. Nachdem darauf die Formeln zur Ausgleichung einer einfach zusammenhängenden Dreieckskette, in der nach *Richtungen* beobachtet ist, zusammengestellt sind, wird unter der Annahme gleicher Richtungsgewichte die Bedingung hergeleitet, wann die internationale Näherungsformel den mittleren Richtungsfehler der Ausgleichung genau darstellt. Unter Voraussetzung gleichwertiger Richtungsbeobachtungen wird sodann wieder die Ausgleichung eines Zentralsystems ausgeführt. Während hierbei aufser den Winkelgleichungen auch die Seitengleichung in Betracht gezogen wird, ist bei der nun folgenden Ausgleichung zweier in zwei Dreiecken zusammenhängenden Zentralsysteme und ferner bei der Ausgleichung

eines Polygones, in dem alle Richtungen zwischen je zwei Punkten beobachtet sind, auf die Seitengleichungen keine Rücksicht genommen. In letzterem Falle, *wenn also in einem Polygon aufser den Seiten auch sämtliche Diagonalen mit gleichen Gewichten beobachtet sind, giebt die Ferrerosche Formel genau denselben Wert für den mittleren Richtungsfehler wie die Ausgleichung der Winkelgleichungen.* Zum Schlufs wird noch für eine aus Richtungsbeobachtungen hervorgegangene Doppelkette, die aus aneinandergefügten Vierecken besteht, aus den Winkelgleichungen allein der mittlere Fehler einer Richtung entwickelt.

1.

Ein Zentralsystem setze sich aus r Dreiecken $P_0P_1P_2$, $P_0P_2P_3 \ldots$, $P_0P_rP_1$ zusammen. Fig. 1. Es wird vorausgesetzt, dafs in jedem Dreieck die 3 Winkel mit gleichem Gewichte, $=1$, gemessen sind Die beobachteten Winkelwerte im $i$ten Dreiecke $P_iP_{i+1}P_0$ seien A_i, B_i, C_i. Die zugehörigen Winkelverbesserungen, die die Ausgleichung des Zentralsystems erfordert, werden durch α_i, β_i, γ_i bezeichnet. Ferner sei

Fig. 1.



$$w_i = 180^0 - (A_i + B_i + C_i)$$
$$+ \text{ Exzefs des Dreiecks } P_iP_{i+1}P_0,$$

$$h = 360^0 - \sum_1^r C_i$$

und

$$\operatorname{cotg} A_i = a_i, \quad \operatorname{cotg} B_i = b_i,$$

$$\frac{\varrho''}{\text{Mod}} \log \frac{\sin A_1 \sin A_2 \ldots \sin A_r}{\sin B_1 \sin B_2 \ldots \sin B_r} = l \cdot \quad \varrho'' = \frac{1}{\operatorname{arc} 1''} = 206\,264{,}8$$
$$\text{Mod} = 0{,}434\,2945.$$

Die Bedingungsgleichungen des Zentralsystems setzen sich zusammen aus r Dreieckswinkelgleichungen, dem Horizontabschlufs auf P_0 und der Seitengleichung um P_0:

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = w_i,$$

(1) $$\sum_1^r \gamma_i = h, \qquad (i=1\ldots r)$$

$$\sum_1^r \{-a_i\alpha_i + b_i\beta_i\} = l.$$

Sind $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r+2}$ die Korrelaten derselben, so liefert die Ausgleichung für die Verbesserungen die nachstehenden Werte:

$$\text{(2)} \qquad \alpha_i = \varkappa_i - a_i \varkappa_{r+2}, \quad \beta_i = \varkappa_i + b_i \varkappa_{r+2}, \quad \gamma_i = \varkappa_i + \varkappa_{r+1}. \qquad (i=1\ldots r)$$

Setzt man

$$-a_i + b_i = d_i,$$

so hat man zur Bestimmung der $\varkappa$ die Normalgleichungen:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} 3\varkappa_i + \varkappa_{r+1} + d_i \varkappa_{r+2} &= w_i \\ \sum_1^r \varkappa_i + r\varkappa_{r+1} \quad . \quad &= h \\ \sum_1^r d_i \varkappa_i \quad . \quad + \sum_1^r (a_i^2 + b_i^2) \cdot \varkappa_{r+2} &= l. \end{aligned} \qquad (i=1\ldots r)$$

Wird

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} h - \tfrac{1}{3}\Sigma w_i &= u, & a_i + b_i &= s_i, \\ l - \tfrac{1}{3}\Sigma d_i w_i &= v, & d_i - \tfrac{1}{r}\Sigma d_i &= D_i \end{aligned}$$

gesetzt, wo wie auch weiterhin die Summen von 1 bis r gehen, so ergeben sich aus (3) die reduzierten Normalgleichungen:

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} 3\varkappa_i + \varkappa_{r+1} + d_i \cdot \varkappa_{r+2} &= w_i \\ + \tfrac{2}{3} r \varkappa_{r+1} - \tfrac{1}{3}\sum d_i \cdot \varkappa_{r+2} &= u \\ + \tfrac{1}{2}\sum (s_i^2 + \tfrac{1}{3}D_i^2) \cdot \varkappa_{r+2} &= v + \frac{\Sigma d_i}{2r} u. \end{aligned} \qquad (i=1\ldots r)$$

Löst man die Gleichungen (3) oder (5) auf, so erhält man

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} r\sum (s_i^2 + \tfrac{1}{3}D_i^2) \cdot \varkappa_{r+2} &= 2rv + \sum d_i \cdot u \\ r\sum (s_i^2 + \tfrac{1}{3}D_i^2) \cdot \varkappa_{r+1} &= \sum d_i \cdot v + \tfrac{1}{2}\sum (3s_i^2 + d_i^2) \cdot u \\ \varkappa_i &= \tfrac{1}{3} w_i - \tfrac{1}{3}\varkappa_{r+1} - \frac{d_i}{3}\varkappa_{r+2}. \end{aligned}$$

Aus (5) folgt für das Quadrat des mittleren Winkelfehlers, M^2,

$$\text{(7)} \qquad (r+2)M^2 = \tfrac{1}{3}\Sigma w_i^2 + \frac{3}{2r}u^2 + \frac{2\left(v + \frac{\Sigma d_i}{2r}u\right)^2}{\Sigma(s_i^2 + \tfrac{1}{3}D_i^2)}.$$

Ich werde nun die Ausgleichung noch in anderer Form vollziehen, die besonders in dem Falle übersichtlicher ist, wenn das Zentralsystem aus Richtungsbeobachtungen hervorgegangen ist. Indem man nämlich die Seitengleichung auf eine andere Form bringt, kann man es einrichten, daſs die Verbesserungen aus 2 getrennten Ausgleichungen erhalten werden, von denen die erste sich nur auf die Winkelgleichungen

(einschliefslich des Horizontabschlusses) und die zweite sich nur auf die umgeformte Seitengleichung bezieht. In derselben Weise hat Gaufs die Seitengleichung in einem Viereck aufgestellt.[1])

Addiert man die Winkelgleichungen (einschliefslich des Horizontabschlusses), nachdem man sie zuvor mit den vorläufig unbestimmten Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{r+1}$ multipliziert hat, zur Seitengleichung, so geht diese über in:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\sum_1^r \{(-a_i+\lambda_i)\alpha_i + (b_i+\lambda_i)\beta_i + (\lambda_i+\lambda_{r+1})\gamma_i\} \\ &\qquad = l + \sum_1^r \lambda_i w_i + \lambda_{r+1} h = L. \end{aligned}$$

Sind jetzt $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1}$ die Korrelaten der Winkelgleichungen und ist k_{r+2} die Korrelate der Gleichung (8), so erhält man für die Verbesserungen die nachstehenden Ausdrücke:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \alpha_i &= k_i + (-a_i+\lambda_i)k_{r+2}, \\ \beta_i &= k_i + (b_i+\lambda_i)k_{r+2}, \\ \gamma_i &= k_i + k_{r+1} + (\lambda_i+\lambda_{r+1})k_{r+2}. \end{aligned}$$

Bildet man die Normalgleichungen, die den Winkelgleichungen entsprechen, so erhält man:

$$\begin{aligned} 3k_i + k_{r+1} + (3\lambda_i + \lambda_{r+1} + d_i)k_{r+2} &= w_i \\ \sum_1^r k_i + rk_{r+1} + \left(\sum_1^r \lambda_i + r\lambda_{r+1}\right) k_{r+2} &= h, \end{aligned} \qquad (i=1\ldots r)$$

wobei wieder

$$-a_i + b_i = d_i$$

ist. Werden die λ nun so bestimmt, dafs

$$(10)\qquad \begin{aligned} 3\lambda_i + \lambda_{r+1} + d_i &= 0 \\ \sum_1^r \lambda_i + r\lambda_{r+1} \qquad &= 0 \end{aligned} \qquad (i=1\ldots r)$$

wird, so hängen die vorstehenden Normalgleichungen gar nicht mit der Normalgleichung, die aus der Gleichung (8) hervorgeht, zusammen.

Die Gleichungen (10) sind gleichzeitig die Bedingungen dafür, dafs die Summe der Quadrate der Koeffizienten der Gleichung (8) zum Minimum wird.

1) Die Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie etc. von Ch L Gerling 1843, S. 400 bis zum Schlufs.

Aus (10) folgt:

$$(10^*)\qquad \lambda_{r+1} = \frac{1}{2r}\sum_1^r d_i,\quad \lambda_i = -\tfrac{1}{3}d_i - \frac{1}{6r}\sum_1^r d_i.$$

Für diese Werte der λ wird also

$$(11)\qquad \alpha_i = \alpha_i' + \alpha_i'',\quad \beta_i = \beta_i' + \beta_i'',\quad \gamma_i = \gamma_i' + \gamma_i'',$$

wo $\alpha_i' = \beta_i' = k_i$ und $\gamma_i' = k_i + k_{r+1}$ *allein* aus der Auflösung der $(r+1)$ Normalgleichungen:

$$(12)\qquad \begin{aligned} 3k_i + \quad k_{r+1} &= w_i \\ \sum_1^r k_i + rk_{r+1} &= h \end{aligned}\qquad (i=1\ldots r)$$

hervorgehen, während

$$(11^*)\quad \alpha_i'' = (-a_i + \lambda_i)k_{r+2},\ \beta_i'' = (b_i + \lambda_i)k_{r+2},\ \gamma_i'' = (\lambda_i + \lambda_{r+1})k_{r+2}$$

durch Auflösung der der Gleichung (8) entsprechenden Normalgleichung erhalten werden. Für diese ergiebt sich infolge (10) zunächst, wenn man für α_i, β_i, γ_i die Werte aus (9) in (8) einsetzt,

$$\sum_1^r \{(-a_i + \lambda_i)^2 + (b_i + \lambda_i)^2 + (\lambda_i + \lambda_{r+1})^2\}\cdot k_{r+2} = L,$$

und da nach (10)

$$3\sum_1^r \lambda_i^2 + r\lambda_{r+1}^2 + 2\lambda_{r+1}\sum_1^r \lambda_i + \sum_1^r \lambda_i d_i = 0$$

ist:

$$\sum_1^r \{a_i^2 + b_i^2 + \lambda_i d_i\}\cdot k_{r+2} = L.$$

Führt man noch für λ_i den Wert aus (10*) ein, und setzt wieder wie vorher

$$a_i + b_i = s_i,\quad d_i - \frac{1}{r}\sum_1^r d_i = D_i,\quad h - \tfrac{1}{3}\sum_1^r w_i = u,\quad l - \tfrac{1}{3}\sum_1^r d_i w_i = v,$$

so findet man endlich:

$$(12^*)\qquad \tfrac{1}{2}\sum_1^r \{s_i^2 + \tfrac{1}{3}D_i^2\}\cdot k_{r+2} = v + \frac{u}{2r}\sum_1^r d_i = L.$$

$\frac{1}{2}\sum_1^r (s_i^2 + \frac{1}{3}D_i^2)$ ist das Minimum des ursprünglichen Koeffizienten von k_{r+2}.

Ferner sei bemerkt, daſs, wenn man die Seitengleichung erst auf-

stellt, nachdem die Winkelwidersprüche bereits ausgeglichen sind, die Konstante der Seitengleichung alsdann gleich L ist.

Die Auflösung der Normalgleichungen (12) und (12*) giebt:

$$(13)\qquad \begin{cases} k_i = \frac{1}{3} w_i - \frac{u}{2r} \\ k_{r+1} = \frac{3u}{2r} \\ k_{r+2} = \frac{2L}{\sum\limits_1^r \{ s_i^2 + \frac{1}{3} D_i^2 \}} . \end{cases} \qquad (i = 1 \ldots r)$$

Mit diesen Werten erhält man aus (9) die von der Ausgleichung geforderten Winkelverbesserungen.

Wenn man jetzt das mittlere Fehlerquadrat nach der Formel

$$(r + 2) M^2 = \sum_1^r w_i k_i + h k_{r+1} + L k_{r+2}$$

bildet, so kommt man wieder zur Gl. (7).

Nimmt man, wie bei der internationalen Näherungsformel, auf die Seitengleichung keine Rücksicht, so ist das mittlere Fehlerquadrat einer Winkelbeobachtung

$$(14)\qquad M'^2 = \frac{1}{r+1} \left\{ \frac{1}{3} \sum_1^r w_i^2 + \frac{3}{2r} u^2 \right\},$$

$$u = h - \frac{1}{3} \sum_1^r w_i ,$$

während die internationale Näherungsformel

$$M_1^2 = \frac{1}{3r} \sum_1^r w_i^2$$

giebt.

Soll die Formel (14) denselben Wert wie die Formel (7) für das mittlere Fehlerquadrat ergeben, so mufs der aus (14) erhaltene Wert

$$M'^2 = \frac{2L^2}{\sum (s_i^2 + \frac{1}{3} D_i^2)}$$

sein; und soll M'^2 mit dem nach der internationalen Näherungsformel erhaltenen mittleren Fehlerquadrate übereinstimmen, so mufs

$$\sum w_i^2 = \frac{1}{2} \left(3h - \sum w_i \right)^2$$

sein.

2.

Es mögen nun 2 Zentralsysteme, von denen das eine aus r_1 Dreiecken, das andere aus r_2 Dreiecken besteht, in 2 gemeinschaftlichen Dreiecken zusammenhängen. In jedem Dreiecke der Figur seien die 3 Winkel beobachtet. Die Ausgleichung der Winkelverbesserungen, die wie vorher sämtlich gleiches Gewicht haben sollen, wird unter der Voraussetzung erfolgen, daſs nur die Winkelgleichungen für die r_1+r_2-2 Dreiecke und für die beiden Horizontabschlüsse, nicht aber die beiden Seitengleichungen berücksichtigt werden.

Die Widersprüche der gemeinschaftlichen Dreiecke seien w_1, w_2, so daſs die Dreieckswidersprüche des ersten Polygons $w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{r_1}$ und die des zweiten $w_2, w_1, w_{r_1+1}, \cdots, w_{r_1+r_2-2}$ sind. Die Beobachtungswerte der Winkel am ersten Zentrum seien $C_1, C_2, \cdots, C_{r_1}$ und die am zweiten A_2, B_1, $C_{r_1+1}, \cdots, C_{r_1+r_2-2}$; h_1 und h_2 sind die zugehörigen Horizontabschlüsse. Ferner seien im ersten System A_1, B_1; A_2, B_2; $\cdots$; A_{r_1}, B_{r_1} und im zweiten B_2, C_2; C_1, A_1; A_{r_1+1}, B_{r_1+1}; $\cdots$; $A_{r_1+r_2-2}, B_{r_1+r_2-2}$ die beobachteten Winkel an den Polygonseiten. Die Verbesserungen der Winkel A, B, C werden wieder durch α, β, γ mit dem zugehörigen Index bezeichnet. Dementsprechend hat man die nachstehenden (r_1+r_2) Winkelgleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n + \gamma_n &= w_n \quad {\scriptstyle (n=1\cdots(r_1+r_2-2))} \\ \gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_{r_1} &= h_1 \\ \alpha_2+\beta_1+\gamma_{r_1+1}+\cdots+\gamma_{r_1+r_2-2} &= h_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Sind $k_1, \cdots, k_{r_1+r_2}$ die Korrelaten dieser Bedingungsgleichungen, so ist

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = k_1 \qquad\qquad\qquad \beta_1 = k_1 + k_{r_1+r_2} \\ &\alpha_2 = k_2 + k_{r_1+r_2} \qquad \beta_2 = k_2 \\ &\alpha_3 = \beta_3 = k_3 \\ &\;\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ &\alpha_{r_1+r_2-2} = \beta_{r_1+r_2-2} = k_{r_1+r_2-2} \\ &\gamma_i = k_i + k_{r_1+r_2-1} \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots r_1)} \\ &\gamma_j = k_j + k_{r_1+r_2}. \qquad {\scriptstyle (j=(r_1+1)\cdots(r_1+r_2-2))} \end{aligned} \tag{2}$$

Damit gelangt man zu folgenden Normalgleichungen:

$$\begin{array}{llllll} 3k_1 & \cdot & +\,k_{r_1+r_2-1} & +\,k_{r_1+r_2} & = w_1 & \\ 3k_2 & \cdot & +\,k_{r_1+r_2-1} & +\,k_{r_1+r_2} & = w_2 & \\ 3k_i & \cdot & +\,k_{r_1+r_2-1} & \cdot & = w_i & {\scriptstyle (i=1\cdots r_1)} \\ 3k_j & \cdot & \cdot & +\,k_{r_1+r_2} & = w_j & {\scriptstyle (j=(r_1+1)\cdots(r_1+r_2-2))} \\ k_1+k_2+\cdots+k_{r_1} & \cdot & +\,r_1 k_{r_1+r_2-1} & \cdot & = h_1 & \\ k_1+k_2 \quad \cdot & +\,k_{r_1+1}+\cdots+k_{r_1+r_2-2} & \cdot & +\,r_2 k_{r_1+r_2} & = h_2. & \end{array} \tag{3}$$

Setzt man

$$(4)\qquad \begin{aligned} h_1 - \tfrac{1}{3}(w_1 + w_2 + w_3 \quad + \cdots + w_{r_1}) &= u_1 \\ h_2 - \tfrac{1}{3}(w_1 + w_2 + w_{r_1+1} + \cdots + w_{r_1+r_2-2}) &= u_2, \end{aligned}$$

so erhält man aus (3):

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3} r_1 k_{r_1+r_2-1} - \tfrac{2}{3} k_{r_1+r_2} &= u_1 \\ -\tfrac{2}{3} k_{r_1+r_2-1} + \tfrac{2}{3} r_2 k_{r_1+r_2} &= u_2 \end{aligned}$$

oder

$$(5)\qquad \begin{aligned} k_{r_1+r_2-1} &= \tfrac{3}{2} \frac{r_2 u_1 + u_2}{r_1 r_2 - 1} \\ k_{r_1+r_2} &= \tfrac{3}{2} \frac{r_1 u_2 + u_1}{r_1 r_2 - 1}. \end{aligned}$$

Da nun hier das mittlere Fehlerquadrat eines Winkels, ohne Rücksicht auf Seitengleichungen:

$$M^2 = \frac{1}{r_1 + r_2} \left\{ \sum_1^{r_1+r_2-2} w_n k_n + h_1 k_{r_1+r_2-1} + h_2 k_{r_1+r_2} \right\}$$

ist, so hat man zunächst nach (3) und (4)

$$M^2 = \frac{1}{r_1 + r_2} \left\{ \tfrac{1}{3} \sum w^2 + u_1 k_{r_1+r_2-1} + u_2 k_{r_1+r_2} \right\},$$

und also nach (5)

$$(6)\qquad M^2 = \frac{1}{r_1 + r_2} \left\{ \tfrac{1}{3} \sum w^2 + \frac{3}{2(r_1 r_2 - 1)} [r_2 u_1^2 + r_1 u_2^2 + 2 u_1 u_2] \right\}.$$

Angenähert läſst sich dafür schreiben:

$$(6^*)\qquad M^{*2} = \frac{1}{r_1 + r_2} \left\{ \tfrac{1}{3} \sum w^2 + \tfrac{3}{2} \frac{u_1^2}{r_1} + \tfrac{3}{2} \frac{u_2^2}{r_2} \right\}.$$

Hiernach und nach (14), 1 wird man mithin $\frac{3}{2}\frac{u^2}{r}$ als Beitrag eines Polygonschlusses zu der Summe der Fehlerquadrate ansehen können.

Hat man daher eine, R Dreiecke enthaltende Doppelkette, die aus q Zentralsystemen, die je in 2 Dreiecken zusammenhängen, besteht, so daſs

$$R = r_1 + r_2 + \cdots + r_q - 2(q - 1)$$

ist, so ist angenähert das Quadrat des mitteren Winkelfehlers (ohne Rücksicht auf Seitengleichungen):

$$(7)\qquad M^2 = \frac{1}{R + q} \left\{ \tfrac{1}{3} \sum_1^R w_i^2 + \tfrac{3}{2} \left[\frac{u_1^2}{r_1} + \frac{u_2^2}{r_2} + \cdots + \frac{u_q^2}{r_q} \right] \right\},$$

wo

$$u_i = h_i - \tfrac{1}{3} W_i \qquad (i = 1 \cdots q)$$

ist. W_i ist die Summe der r_i Dreieckswidersprüche des $i$ten Zentralsystems, h_i dessen Horizontabschlufs.

Bevor nun zur Ausgleichung eines Zentralsystems unter Zugrundelegung von Richtungsbeobachtungen geschritten wird, sollen erst im Folgenden die Formeln für eine einfach zusammenhängende und nach Richtungen beobachtete Dreieckskette zusammengestellt werden.

3.

Eine Dreieckskette sei einfach zusammenhängend, sodafs keine Seitengleichungen bestehen. Wenn sich nun ferner die Stationsausgleichungen als volle Sätze unabhängiger Richtungsbeobachtungen, sei es mit gleichem oder sei es mit ungleichem Gewichte, darstellen lassen, so fallen die zur Kette gehörigen Normalgleichungen unter die folgende allgemeine Form (vgl. Astr. Nachr. Bd. 138, S. 153 u. f.).

$$(1)\quad \begin{array}{rcl} a_{1\cdot 1}k_1 - a_{1\cdot 2}k_2 & = & w_1 \\ -a_{1\cdot 2}k_1 + a_{2\cdot 2}k_2 - a_{2\cdot 3}k_3 & = & w_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ -a_{r-2\cdot r-1}k_{r-2} + a_{r-1\cdot r-1}k_{r-1} - a_{r-1\cdot r}k_r & = & w_{r-1} \\ -a_{r-1\cdot r}k_{r-1} + a_{r\cdot r}k_r & = & w_r . \end{array}$$

Die a sind Konstanten, k_i ist die Korrelate der $i$ten Winkelgleichung; w_i bedeutet den Widerspruch zwischen dem berechneten, sphärischen oder sphäroidischen, Exzefs und der um 180° verminderten Summe der 3 Winkel des $i$ten Dreiecks.

Bestimmt man ein Wertsystem: $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{r+1}$ durch die Beziehungen:

$$(2)\quad -a_{i-1\cdot i}\,\mu_{i-1} + a_{i\cdot i}\,\mu_i - a_{i\cdot i+1}\,\mu_{i+1} = 0, \quad (i = 1 \cdots r)$$

wobei $a_{r\cdot r+1}$ willkürlich ist, ebenso wie auch μ_1, ferner μ_0 gleich Null sein soll; und setzt man weiter

$$(3)\quad \sum_{\lambda=1}^{i} \mu_\lambda w_\lambda = W_i,$$

so ergeben sich aus (1) die reduzierten Normalgleichungen:

$$(4)\quad \begin{array}{rcl} a_{1\cdot 2}\frac{\mu_2}{\mu_1}k_1 - a_{1\cdot 2}k_2 & = & \frac{W_1}{\mu_1} \\ a_{2\cdot 3}\frac{\mu_3}{\mu_2}k_2 - a_{2\cdot 3}k_3 & = & \frac{W_2}{\mu_2} \\ \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ a_{r-1\cdot r}\frac{\mu_r}{\mu_{r-1}}k_{r-1} - a_{r-1\cdot r}k_r & = & \frac{W_{r-1}}{\mu_{r-1}} \\ a_{r\cdot r+1}\frac{\mu_{r+1}}{\mu_r}k_r & = & \frac{W_r}{\mu_r} . \end{array}$$

Das mittlere Fehlerquadrat der Gewichtseinheit wird daher:

$$m^2 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{W_i^2}{a_{i\cdot i+1}\mu_i\mu_{i+1}}. \tag{5}$$

Will man in dieser Formel nach $w_1^2, w_2^2, \cdots$ ordnen, so ist es zunächst vorteilhaft, noch ein anderes Wertsystem $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{r+1}$ vermittelst der Beziehungen

$$-a_{r-i+1\cdot r-i+2}\,\nu_{i-1} + a_{r-i+1\cdot r-i+1}\,\nu_i - a_{r-i\cdot r-i+1}\,\nu_{i+1} = 0 \qquad (i=1\cdots r) \tag{6}$$

einzuführen. Dabei soll $\nu_0 = 0$, ν_1 und ebenso $a_{0\cdot 1}$ willkürlich sein. Alsdann ist

$$\begin{aligned} a_{r\cdot r+1}\mu_{r+1}\nu_1 = a_{0\cdot 1}\nu_{r+1}\mu_1 &= a_{i\cdot i+1}(\mu_{i+1}\nu_{r-i+1} - \mu_i\nu_{r-i}) \\ &= a_{r-i\cdot r-i+1}(\nu_{i+1}\mu_{r-i+1} - \nu_i\mu_{r-i}). \\ &\qquad (i=1\cdots r) \end{aligned} \tag{7}$$

Hieraus folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{i\cdot i+1}\mu_i\mu_{i+1}} &= \frac{1}{a_{r\cdot r+1}\mu_{r+1}\nu_1}\left\{\frac{\nu_{r-i+1}}{\mu_i} - \frac{\nu_{r-i}}{\mu_{i+1}}\right\} \\ \frac{1}{a_{r-i\cdot r-i+1}\nu_i\nu_{i+1}} &= \frac{1}{a_{0\cdot 1}\nu_{r+1}\mu_1}\left\{\frac{\mu_{r-i+1}}{\nu_i} - \frac{\mu_{r-i}}{\nu_{i+1}}\right\}, \end{aligned}$$

deren wiederholte Anwendung ergiebt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{r\cdot r+1}\mu_{r+1}\nu_1}\cdot\frac{\nu_{r-i+1}}{\mu_i} &= \sum_{\lambda=i}^{r}\frac{1}{a_{\lambda\cdot\lambda+1}\mu_\lambda\mu_{\lambda+1}} \\ \frac{1}{a_{0\cdot 1}\nu_{r+1}\mu_1}\cdot\frac{\mu_{r-i+1}}{\nu_i} &= \sum_{\lambda=i}^{r}\frac{1}{a_{r-\lambda\cdot r-\lambda+1}\nu_\lambda\nu_{\lambda+1}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Mittelst der ersten der Gleichungen (8) erhält man aus (5):

$$rm^2 = \frac{1}{a_{r\cdot r+1}\mu_{r+1}\nu_1}\left\{\begin{aligned} \mu_1\nu_r w_1^2 + 2\mu_1\nu_{r-1}w_1w_2 + 2\mu_1\nu_{r-2}w_1w_3 + \cdots &+ 2\mu_1\nu_1 w_1 w_r \\ + \mu_2\nu_{r-1}w_2^2 + 2\mu_2\nu_{r-2}w_2w_3 + \cdots &+ 2\mu_2\nu_1 w_2 w_r \\ + \mu_3\nu_{r-2}w_3^2 + \cdots &+ 2\mu_3\nu_1 w_3 w_r \\ \cdots\cdots\cdots & \\ &+ \mu_r\nu_1 w_r^2 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

oder

$$rm^2 = \frac{1}{a_{r\cdot r+1}\mu_{r+1}\nu_1}\left\{\begin{aligned} & w_1[\mu_1\nu_r\,w_1 + \mu_1\nu_{r-1}w_2 + \mu_1\nu_{r-2}w_3 + \cdots + \mu_1\nu_1 w_r] \\ + & w_2[\mu_1\nu_{r-1}w_1 + \mu_2\nu_{r-1}w_2 + \mu_2\nu_{r-2}w_3 + \cdots + \mu_2\nu_1 w_r] \\ + & w_3[\mu_1\nu_{r-2}w_1 + \mu_2\nu_{r-2}w_2 + \mu_3\nu_{r-2}w_3 + \cdots + \mu_3\nu_1 w_r] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + & w_r[\mu_1\nu_1\,w_1 + \mu_2\nu_1\,w_2 + \mu_3\nu_1\,w_3 + \cdots + \mu_r\nu_1 w_r] \end{aligned}\right\} \tag{9*}$$

Da nun aber auch

$$rm^2 = \sum_1^r w_i k_i$$

ist, wo $k_1 \cdots k_r$ lineare Funktionen der w sind, deren Glieder symmetrisch zu der ersten Diagonalreihe sein müssen, so schliefst man aus (9*), dafs

$$(10)\quad \begin{aligned} k_i &= \frac{1}{a_{r\cdot r+1}\mu_{r+1}\nu_1}\left\{\nu_{r-i+1}\sum_{\lambda=1}^{i}\mu_\lambda w_\lambda + \mu_i \sum_{\lambda=i+1}^{r}\nu_{r-\lambda+1}w_\lambda\right\} \\ &= \frac{1}{a_{r\cdot r+1}\mu_{r+1}\nu_1}\left\{\nu_{r-i+1}\sum_{\lambda=1}^{i-1}\mu_\lambda w_\lambda + \mu_i \sum_{\lambda=i}^{r}\nu_{r-\lambda+1}w_\lambda\right\} \end{aligned}$$

ist. Wie man sich überzeugt, geben diese k die Auflösung des Gleichungssystems (1) bezw. (4), wenn man die Gleichungen (2), (6) und (7) berücksichtigt. Die Gleichung (9) oder (9*) läfst sich noch in die folgenden Formen bringen:

$$(11)\quad \begin{aligned} rm^2 &= \frac{1}{a_{r\cdot r+1}\mu_{r+1}\nu_1}\sum_{i=1}^{r} W_i(\nu_{r-i+1}w_i + \nu_{r-i}w_{i+1}) \\ &= \frac{1}{a_{r\cdot r+1}\mu_{r+1}\nu_1}\sum_{i=1}^{r}(W_{i-1} + W_i)\nu_{r-i+1}w_i, \end{aligned}$$

wobei $W_0 = 0$ ist. Sie haben, wie auch (9) und (9*) vor (5) den Vorteil, nur einen und denselben Nènner zu besitzen.

Stellt man das Normalgleichungssystem (1) in umgekehrter Reihenfolge auf, indem man mit der letzten Gleichung beginnt, und bildet man darauf mit Hilfe von (6) die reduzierten Normalgleichungen, so gelangt man zu folgendem Ausdrucke für das mittlere Fehlerquadrat:

$$(12)\qquad m^2 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{(\nu_1 w_r + \nu_2 w_{r-1} + \cdots + \nu_i w_{r-i+1})^2}{a_{r-i\cdot r-i+1}\nu_i\nu_{i+1}},$$

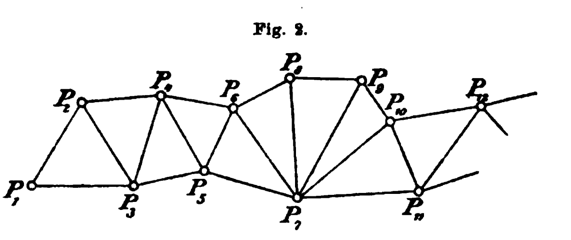
den man vermittelst der zweiten der Gleichungen (8) wieder in die Gleichung (9) umwandeln kann.

Es werde nun im Besonderen angenommen, dafs die Beobachtungen für die Kette derart erfolgt sind, dafs sämtliche Richtungsverbesserungen $v_{h\cdot i}$ gleiches Gewicht, nämlich 1, haben.

Bei der einfach zusammenhängenden Dreieckskette sind 3 Formen zu unterscheiden.

I. Die Dreiecke der Kette sind so aneinander gereiht, dafs in den Winkelgleichungen, welche zu zwei aufeinander folgenden Dreiecken gehören, die Verbesserungen $v_{h\cdot i}$ und $v_{i\cdot h}$, die sich auf die beiden Drei-

ecken gemeinschaftliche Seite beziehen, entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dies findet statt, wenn man die Seiten der Dreiecke, siehe Figur 2, in demselben Sinne durchläuft und dabei die gemeinschaftlichen Seiten je zweier zusammenhängender



Dreiecke entgegengesetzte Bewegungsrichtung zeigen. Alsdann ist in den Normalgleichungen (1)

$$a_{i \cdot i} = 6, \quad a_{i \cdot i+1} = +2 \tag{13}$$

zu setzen. Die Gleichungen (2) und (6) geben damit

$$\begin{gathered} \mu_i = \nu_i = N_i \\ -N_{i-1} + 3N_i - N_{i+1} = 0, \quad N_0 = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

Für $N_1 = 1$ wird $N_2 = 3$, $N_3 = 8$, $N_4 = 21$, $N_5 = 55$, $N_6 = 144$ u. s. w. Die N sind von Dr. Paul Simon eingeführt worden bei Gelegenheit von Gewichtsbestimmungen in einfachen Ketten.[1])

Die Formeln für die Korrelaten k_i und für das mittlere Fehlerquadrat einer Richtungsbeobachtung ergeben sich sofort aus den Gl. (10), (3), (5), (9) und (11), wenn man statt μ_i, ν_{r-i+1}, ν_{r-i} jetzt N_i, N_{r-i+1}, N_{r-i} schreibt. Ordnet man dann die Gl. (9) nach der Ordnung der Koeffizienten, so ergiebt sich hier:

$$rm^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{N_i N_{r-i+1}}{2N_{r+1}} w_i^2 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{N_i N_{r-i}}{N_{r+1}} w_i w_{i+1} + \sum_{i=1}^{r-2} \frac{N_i N_{r-i-1}}{N_{r+1}} w_i w_{i+2} + \cdots + \frac{N_1 N_1}{N_{r+1}} w_1 w_r. \tag{15}$$

Setzt man

$$rm_F^2 = \tfrac{1}{6} \sum_{1}^{r} w_i^2,$$

und wendet man außerdem wieder die Bezeichnung an

$$W_i = \sum_{\lambda=1}^{i} N_\lambda w_\lambda,$$

---

1) Gewichtsbestimmungen für Seitenverhältnisse in schematischen Dreiecksnetzen von Dr. Paul Simon. Veröffentlichung des Königl. Preuſs. Geodätischen Instituts. Berlin. Druck und Verlag von P. Stankiewicz' Buchdruckerei 1889.

so hat man auch

$$(16)\quad 2N_{r+1}r(m^2-m_r^2)=\sum_1^r\{(N_iN_{r-i+1}-\tfrac{1}{3}N_{r+1})w_i^2+2N_iW_{r-i}w_{r-i+1}\},$$

wobei $W_0=0$ ist.

Soll also $m_r^2=m^2$ werden, so mufs

$$(17)\qquad \sum_1^r\{(3N_iN_{r-i+1}-N_{r+1})w_i^2+6N_iW_{r-i}w_{r-i+1}\}=0$$

sein. Löst man diese Gleichung nach w_r auf, so findet man, wenn man berücksichtigt, dafs

$$W_{r-1}^2=\sum_1^{r-1}(N_i^2w_i^2+2N_iW_{i-1}w_i),$$

ferner

$$N_2N_{r-i+1}-N_{r-1}N_i=-N_{r+1}N_{i-2}$$

ist:

$$(18)\qquad w_r=-\frac{3W_{r-1}}{N_{r-1}}$$

$$\pm\frac{1}{N_{r-1}}\sqrt{\left\{N_{r+1}\left[N_{r-1}w_{r-1}^2-\sum_{i=1}^{r-2}(3N_iN_{r-i-1}-N_{r-1})w_i^2-6\sum_{i=1}^{r-2}N_iW_{r-i-2}w_{r-i-1}\right]\right\}}.$$

Z. B. wird $m^2=m_r^2$ bei $r=2$, wenn $w_2=(-3\pm\sqrt{8})w_1$, bei $r=3$, wenn $w_3=(-3\pm\sqrt{7})w_2-w_1$ ist.

Der Koeffizient von w_i^2 ist positiv, denn es ist

$$3N_iN_{r-i-1}-N_{r-1}=N_{i-1}N_{r-i-1}+N_iN_{r-i-2}.$$

Soll die Wurzel in dem Ausdruck für w_r reell sein, so mufs

$$(19)\quad N_{r-1}w_{r-1}^2\geqq\sum_{i=1}^{r-2}\{(3N_iN_{r-i-1}-N_{r-1})w_i^2+6N_iW_{r-i-2}w_{r-i-1}\}$$

sein.

Ist mithin diese Ungleichheit für gegebene Werte von $w_1,\ldots,w_{r-2}$ erfüllt, so kann man für jeden *beliebigen* reellen Wert von w_{r-1} nach (18) 2 reelle Werte von w_r bestimmen, so dafs die Ferrerosche Formel genau den mittleren Richtungsfehler bei einer einfach zusammenhängenden, aus gleichwertigen Richtungsbeobachtungen hervorgegangenen Dreieckskette angiebt. Ist die Ungleichheit (19) nicht erfüllt, so ist dies von vornherein unmöglich.

Die Ungleichheit (19) hat z. B. statt, wenn $|w_{r-1}|\geqq\left|\sum_1^{r-2}w_i\right|$ ist, wie man leicht vermittelst der independenten Darstellung der N (S. 171) erkennt; sie ist also auch erfüllt für $\sum_1^{r-1}w_i=0$.

Es sei

$$r = 6,$$

dann ist

$$\begin{aligned}6m^2 = \tfrac{1}{754}\{ & 144\,(w_1^2 + w_6^2) + 165\,(w_2^2 + w_5^2) + 168\,(w_3^2 + w_4^2)\\ & + 110\,(w_1 w_2 + w_5 w_6) + 126\,(w_2 w_3 + w_4 w_5) + 128\, w_3 w_4\\ & + \ \ 42\,(w_1 w_3 + w_4 w_6) + \ \ 48\,(w_2 w_4 + w_3 w_5)\\ & + \ \ 16\,(w_1 w_4 + w_3 w_6) + \ \ 18\, w_2 w_5\\ & + \ \ \ \ 6\,(w_1 w_5 + w_2 w_6)\\ & + \ \ \ \ 2\, w_1 w_6\},\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}6m^2 = \tfrac{1}{6}\sum_1^6 w_i^2 + \tfrac{1}{2262}(55\,(w_1^2 + w_6^2) + 118\,(w_2^2 + w_5^2) + 127\,(w_3^2 + w_4^2))\\ + \tfrac{1}{377}\,(W_5 w_6 + 3\, W_4 w_5 + 8\, W_3 w_4 + 21\, W_2 w_3 + 55\, W_1 w_2);\end{aligned}$$

$$W_1 = w_1, \quad W_2 = 3\, w_2 + W_1, \quad W_3 = 8\, w_3 + W_2, \quad W_4 = 21\, w_4 + W_3,$$
$$W_5 = 55\, w_5 + W_4.$$

Soll

$$6m^2 = \tfrac{1}{6}\sum_1^6 w_i^2 = 6m_F^2$$

werden, so mufs

$$w_6 = -3\left(w_5 + \frac{W_4}{55}\right)$$

$$\pm \tfrac{1}{55}\sqrt{\{377\,[55\, w_5^2 - (8\,[w_1^2 + w_4^2] + 17\,[w_2^2 + w_3^2]) - 6\,(W_3 w_4 + 3\, W_2 w_3 + 8\, W_1 w_2)]\}}$$

sein.

Ist nun erstens im besonderen

$$w_1 = -\, w_2 = w_3 = -\, w_4 = w,$$

dann ist

$$w_6 = -\, 3\,(w_5 - \tfrac{8}{11} w) \pm \tfrac{1}{55}\sqrt{\{377\,(55\, w_5^2 + 70\, w^2)\}}.$$

In diesem Falle ist die Bedingung (19) erfüllt; welchen Wert auch w_5 hat, es läfst sich stets w_6 so bestimmen, dafs $m^2 = m_F^2$ wird.

Ist

$$w_5 = w,$$

so wird

$$w_6 = -\tfrac{24}{11} w \pm \frac{w}{11}\sqrt{1885};$$

$$\text{für } w_6' = +\, 1{,}7651\, w \text{ wird } m^2 = m_F^2 = 0{,}2254\, w^2$$
$$\text{und für } w_6'' = -\, 6{,}1288\, w \text{ wird } m^2 = m_F^2 = 1{,}1823\, w^2.$$

Zweitens sei

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w$$

alsdann ist, wenn $m^2 = m_F^2$ werden soll,

$$w_6 = -3\left(w_5 + \tfrac{3}{5}w\right) \pm \tfrac{1}{55}\sqrt{\{377(55\,w_5^2 - 242\,w^2)\}}.$$

Um ein reelles w_6 zu erhalten, mufs also

$$55\,w_5^2 \geqq 242\,w^2 \quad \text{oder} \quad |\,w_5\,| \geqq 2{,}098\,w$$

sein. Nimmt man

$$w_5 = +3\,w$$

an, so wird

$$w_6 = \left(-\tfrac{54}{5} \pm \tfrac{1}{55}\sqrt{377 \cdot 253}\right)w;$$

$$\text{für} \quad w_6' = -\ \ 5{,}1848\,w \quad \text{ist} \quad m^2 = m_F^2 = 1{,}1078\,w^2,$$
$$\text{für} \quad w_6'' = -16{,}4152\,w \quad \text{ist} \quad m^2 = m_F^2 = 7{,}8461\,w^2.$$

Setzt man aber

$$w_5 = -3\,w,$$

so hat man

$$w_6 = \left(+\tfrac{36}{5} \pm \tfrac{1}{55}\sqrt{377 \cdot 253}\right)w;$$

$$\text{und es ist für} \quad w_6' = +12{,}8152\,w \quad m^2 = m_F^2 = 4{,}9230\,w^2,$$
$$\text{für} \quad w_6'' = +\ \ 1{,}5848\,w \quad m^2 = m_F^2 = 0{,}4309\,w^2.$$

Macht man bei $r = 6$ die Voraussetzung, dafs

$$\sum_1^6 w_i = 0$$

ist, so läfst sich der Ausdruck für das mittlere Fehlerquadrat in die folgende Form bringen:

$$m^2 = \tfrac{1}{36}\sum_1^6 w_i^2 - \tfrac{1}{13572}\left[5\,(w_1^2 + w_6^2) + 2\,(w_2^2 + w_5^2) - 7\,(w_3^2 + w_4^2)\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2262}\{25\,(w_1 w_2 + w_5 w_6) + 23\,(w_2 w_3 + w_4 w_5) + 24\,w_3 w_4$$
$$- 22\,(w_1 w_4 + w_3 w_6) - 27\,(w_1 w_5 + w_2 w_6) - 31\,w_2 w_5$$
$$-\ \ 9\,(w_1 w_3 + w_4 w_6) - 16\,(w_2 w_4 + w_3 w_5) - 19\,w_1 w_6\}.$$

Es soll nun aus (15) eine Näherungsformel abgeleitet werden. Setzt man für den Augenblick

$$\tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = 2{,}6180 = f, \quad \frac{1}{f^2} = 0{,}1459 = f_1,$$

so ist nach Simon, Gewichtsbest. S. 5

$$N_r\sqrt{5} = f^r(1 - f_1^r);$$

mithin wird

$$\frac{N_i N_\lambda}{N_{r+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{1}{f^{r+1-i-\lambda}} \cdot \frac{1 - f_1^i - f_1^\lambda + f_1^{i+\lambda}}{1 - f_1^{r+1}}.$$

Nun ist aber

$$f_1^2 = 0{,}0212,\quad f_1^3 = 0{,}0031,\quad f_1^4 = 0{,}0005, \ldots;$$

die Werte des vorstehenden Ausdrucks werden daher für i oder $\lambda \geq 2$ nicht sehr von einander abweichen. Nur für i oder $\lambda = 1$ erhält man Werte, die etwa um $\frac{1}{8}$ kleiner sind als die übrigen. Man wird deshalb angenähert die Koeffizienten von w_i^2, $w_i w_{i+1}$, u. s. w. in der Gl. (15) durch mittlere Werte ersetzen können. Vernachlässigt man dabei $f_1^2 = \frac{1}{f^4}$, so wird

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{N_i N_{r-i+1}}{2N_{r+1}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(1 - \frac{2f_1}{r}\right),$$

$$\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r-1}\frac{N_i N_{r-i}}{N_{r+1}} = \frac{1}{f\sqrt{5}}\left(1 - \frac{2f_1}{r-1}\right),$$

$$\frac{1}{r-2}\sum_{i=1}^{r-2}\frac{N_i N_{r-i-1}}{N_{r+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}f_1,$$

$$\frac{1}{r-3}\sum_{i=1}^{r-3}\frac{N_i N_{r-i-2}}{N_{r+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{f_1}{f}.$$

Folglich ergiebt sich aus (15) die Näherungsformel:

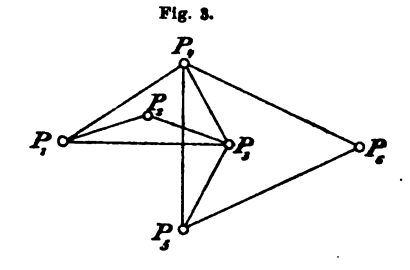
$$(15^*)\quad \begin{aligned} rm^2 = \left(0{,}224 - \frac{1}{r}0{,}065\right)\sum_1^r w_i^2 + \left(0{,}171 - \frac{1}{r-1}0{,}050\right)\sum_1^{r-1} w_i w_{i+1} \\ + 0{,}065\sum_1^{r-2} w_i w_{i+2} + 0{,}025\sum_1^{r-3} w_i w_{i+3} + \cdots. \end{aligned}$$

Haben sämtliche w dasselbe Vorzeichen, so giebt die Ferrerosche Formel $rm_F^2 = \frac{1}{6}\sum w_i^2$ das mittlere Fehlerquadrat zu klein, ebenso aber auch noch, wenn die Summe der Glieder, die in 2 verschiedene w multipliziert sind, Null ist. Wenn 2 aufeinander folgende w entgegengesetztes Vorzeichen haben, so wird die 2. Summe in (15) bezw. (15*) negativ, die 3. positiv, die 4. negativ u. s. w. In dem besondern Falle, dafs die w sämtlich $+1$, abwechselnd $+1, -1$, abwechselnd $+1, -1, -1, +1$ sind, hat Herr Prof. A. Börsch eine Vergleichung der Werte von $m^2 = \frac{1}{2r}\sum_{i=1}^{r}\frac{W_i^2}{N_i N_{i+1}}$ mit der Ferreroschen Formel ausgeführt.[1])

1) Das märkisch-thüringische Dreiecksnetz. Anhang: Zur Berechnung des mittleren Richtungsfehlers in einer Kette aneinander hängender Dreiecke. Veröffentlichung des Königl. Preufs. Geodätischen Instituts. Berlin, Verlag von Julius Springer. 1889.

II. Die Dreieckskette kann eine solche Form haben, dafs die Richtungsverbesserungen $v_{k.i}$ und $v_{i.k}$, die zu einer Seite gehören, mit der zwei aufeinander folgende Dreiecke zusammenhängen, sämtlich gleiches Vorzeichen haben. Durchläuft man die Dreiecksseiten einer solchen Kette in demselben Sinne, so hat man in den gemeinschaftlichen Seiten die gleiche Bewegungsrichtung.

Fig. 3.



In diesem Falle ist in den Normalgleichungen (1)

$$a_{i.i} = 6, \quad a_{i.i+1} = -2 \tag{20}$$

zu setzen. Nach den Gleichungen (2) und (6) wird daher, wenn $\mu_1 = \nu_1 = N_1 = +1$, $\mu_i = \nu_i = N_i$ gesetzt wird

$$\mu_i = \nu_i = (-1)^{i+1} N_i. \tag{21}$$

Für die Fig. 3 ist z. B. nach Gl. (10)

$$\begin{aligned}
110\,k_1 &= +21\,w_1 - 8\,w_2 + 3\,w_3 - w_4,\\
110\,k_2 &= -8\,w_1 + 24\,w_2 - 9\,w_3 + 3\,w_4,\\
110\,k_3 &= +3\,w_1 - 9\,w_2 + 24\,w_3 - 8\,w_4,\\
110\,k_4 &= -w_1 + 3\,w_2 - 8\,w_3 + 21\,w_4
\end{aligned}$$

und

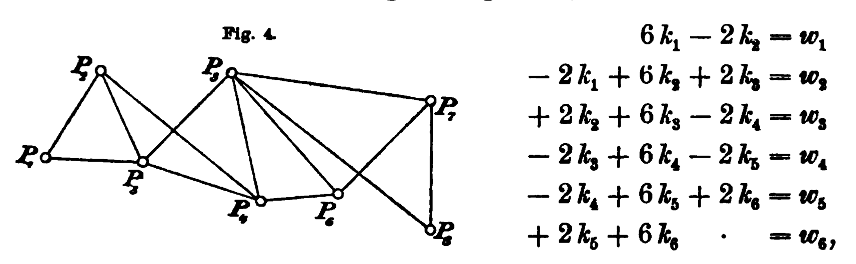
$$\begin{aligned}
4\,m^2 &= \tfrac{1}{110}\{21\,(w_1^2 + w_4^2) + 24\,(w_2^2 + w_3^2) - 16(w_1 w_2 + w_3 w_4) - 18\,w_2 w_3\\
&\qquad + 6\,(w_1 w_3 + w_2 w_4) - 2\,w_1 w_4\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{w_1^2}{1\cdot 3} + \frac{(w_1 - 3\,w_2)^2}{3\cdot 8} + \frac{(w_1 - 3w_2 + 8\,w_3)^2}{8\cdot 21} + \frac{(w_1 - 3\,w_2 + 8\,w_3 - 21\,w_4)^2}{21\cdot 55}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{w_4^2}{1\cdot 3} + \frac{(w_4 - 3\,w_3)^2}{3\cdot 8} + \frac{(w_4 - 3\,w_3 + 8w_2)^2}{8\cdot 21} + \frac{(w_4 - 3w_3 + 8\,w_2 - 21\,w_1)^2}{21\cdot 55}\right\}.
\end{aligned}$$

Haben je zwei auf einander folgende w entgegengesetztes Zeichen, so werden alle Glieder in dem zuerst gegebenen Ausdruck für $4\,m^2$ positiv: die Ferrerosche Formel würde alsdann den mittleren Fehler zu klein ergeben.

III. Endlich können die Dreiecke der Kette so angeordnet sein, dafs die auf die gemeinsamen Seiten je zweier Dreiecke bezüglichen Verbesserungen teils entgegengesetztes, teils gleiches Vorzeichen haben, oder wenn man die Dreiecksseiten in einem bestimmten Sinne durchläuft, in den gemeinsamen Seiten teils entgegengesetzte, teils gleiche

Bewegungsrichtung stattfindet. Das ist z. B. bei der Fig. 4 der Fall. Stellt man für sie die Normalgleichungen auf, so lauten diese:

Fig. 4.



$$\begin{aligned} 6k_1 - 2k_2 &= w_1 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= w_2 \\ +2k_2 + 6k_3 - 2k_4 &= w_3 \\ -2k_3 + 6k_4 - 2k_5 &= w_4 \\ -2k_4 + 6k_5 + 2k_6 &= w_5 \\ +2k_5 + 6k_6 \quad \cdot \quad &= w_6, \end{aligned}$$

worin $k_1 \cdots k_6$ die Korrelaten der Winkelgleichungen der Dreiecke sind. Aus den Gleichungen (2) und (6) folgt zunächst, wenn $\mu_1 = \nu_1 = N_1$ gesetzt wird und $a_{6 \cdot 7} = 2$, $a_{0 \cdot 1} = 2$ angenommen wird:

$$\mu_1 = +N_1,\ \mu_2 = +N_2,\ \mu_3 = -N_3,\ \mu_4 = -N_4,\ \mu_5 = -N_5,\ \mu_6 = +N_6,\ \mu_7 = +N_7$$
$$\nu_1 = +N_1,\ \nu_2 = -N_2,\ \nu_3 = -N_3,\ \nu_4 = -N_4,\ \nu_5 = +N_5,\ \nu_6 = +N_6,\ \nu_7 = +N_7.$$

Mithin ergiebt sich nach (10) als Auflösung der Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} 754k_1 &= +144w_1 + 55w_2 - 21w_3 - 8w_4 - 3w_5 + 1w_6, \\ 754k_2 &= +55w_1 + 165w_2 - 63w_3 - 24w_4 - 9w_5 + 3w_6, \\ 754k_3 &= -21w_1 - 63w_2 + 168w_3 + 64w_4 + 24w_5 - 8w_6, \\ 754k_4 &= -8w_1 - 24w_2 + 64w_3 + 168w_4 + 63w_5 - 21w_6, \\ 754k_5 &= -3w_1 - 9w_2 + 24w_3 + 63w_4 + 165w_5 - 55w_6, \\ 754k_6 &= +1w_1 + 3w_2 - 8w_3 - 21w_4 - 55w_5 + 144w_6; \end{aligned}$$

und daher für das mittlere Fehlerquadrat einer Richtung:

$$\begin{aligned} 6m^2 = \tfrac{1}{754}\{ & 144(w_1^2 + w_6^2) + 165(w_2^2 + w_5^2) + 168(w_3^2 + w_4^2) \\ & + 110(w_1w_2 - w_5w_6) - 126(w_2w_3 - w_4w_5) + 128w_3w_4 \\ & - 42(w_1w_3 + w_4w_6) - 48(w_2w_4 - w_3w_5) \\ & - 16(w_1w_4 + w_3w_6) - 18w_2w_5 \\ & - 6(w_1w_5 - w_2w_6) + 2w_1w_6\}. \end{aligned}$$

Die Vorzeichen in den Normalgleichungen, sowie in den Ausdrücken für die k lassen sich auch leicht aus der Figur erkennen. Lägen sämtliche 6 Dreiecke wie in Fig. 2, so wären in den Ausdrücken für die k die Koeffizienten der w sämtlich positiv, und lägen sie wie in Fig. 3, so würden die Vorzeichen abwechselnd positiv und negativ sein, jedoch so, daſs die Glieder in der ersten Diagonale positiv sind. Absolut genommen sind die Koeffizienten der w in allen

3 Fällen dieselben. Den vorstehenden Ausdruck für $6\,m^2$ erhält man aus dem auf S. 170 angegebenen und für die erste Form der Kette geltenden Werthe von $6\,m^2$, indem man dort w_3, w_4, w_5 mit negativen Zeichen einführt. Die internationale Näherungsformel nimmt auf die 3 verschiedenen Formen der Kette keine Rücksicht.

Wie verschieden der mittlere Richtungsfehler je nach der Form der Dreieckskette ausfallen kann, soll an einem Beispiele gezeigt werden. Es bezeichne für

$$r = 6$$

$m_{\rm I}^2$ das mittlere Fehlerquadrat einer Richtung bei einer Kette der Form I, Fig. 2, $m_{\rm II}^2$ denselben Wert bei einer Kette, die unter die Form II fällt, und $m_{\rm III}^2$ jenen Wert für die Fig. 4.

Ist dann

$$+w_1 = -w_2 = +w_3 = -w_4 = +w_5 = -w_6 = w,$$

so wird

$$m_{\rm I}^2 = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{247}{377}w^2 \qquad m_{\rm II}^2 = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{899}{377}w^2 \qquad m_{\rm III}^2 = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{395}{377}w^2$$
$$= \tfrac{1}{6}\cdot 0{,}6552\,w^2 \qquad = \tfrac{1}{6}\cdot 2{,}3846\,w^2 \qquad = \tfrac{1}{6}\cdot 1{,}0478\,w^2$$
$$= 0{,}1092\,w^2 \qquad = 0{,}3974\,w^2 \qquad = 0{,}1746\,w^2$$
$$m_{\rm I} = \pm 0'',330\,w \qquad m_{\rm II} = \pm 0'',630\,w \qquad m_{\rm III} = \pm 0'',418\,w.$$

Ist

$$+w_1 = +w_2 = +w_3 = -w_4 = -w_5 = -w_6 = w,$$

so wird

$$m_{\rm I}^2 = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{611}{377}w^2 \qquad m_{\rm II}^2 = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{319}{377}w^2 \qquad m_{\rm III}^2 = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{395}{377}w^2$$
$$= \tfrac{1}{6}\cdot 1{,}6207\,w^2 \qquad = \tfrac{1}{6}\cdot 0{,}8462\,w^2$$
$$= 0{,}2701\,w^2 \qquad = 0{,}1410\,w^2$$
$$m_{\rm I} = \pm 0'',520\,w \qquad m_{\rm II} = \pm 0'',376\,w \qquad m_{\rm III} = \pm 0'',418\,w,$$

Ist

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = w,$$

so wird

$$m_{\rm I}^2 = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{899}{377}w^2 \qquad m_{\rm II}^2 = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{247}{377}w^2 \qquad m_{\rm III}^2 = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{475}{377}w^2$$
$$= \tfrac{1}{6}\cdot 1{,}2599\,w^2$$
$$= 0{,}2100\,w^2$$
$$m_{\rm I} = \pm 0'',630\,w \qquad m_{\rm II} = \pm 0'',330\,w \qquad m_{\rm III} = \pm 0'',458\,w.$$

Und ist noch

$$+w_1 = +w_2 = -w_3 = -w_4 = -w_5 = +w_6 = w,$$

so wird

$$m_{\rm I}^2 = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{475}{377}w^2 \qquad m_{\rm II}^2 = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{395}{377}w^2 \qquad m_{\rm III}^2 = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{899}{377}w^2$$
$$m_{\rm I} = \pm 0'',458\,w \qquad m_{\rm II} = \pm 0'',418\,w \qquad m_{\rm III} = \pm 0'',630\,w.$$

Für alle diese Fälle giebt die Ferrerosche Formel denselben Wert

$$m_F^2 = \tfrac{1}{36}w^2 = 0{,}1667\,w^2; \quad m_F = \pm 0'',408\,w.$$

4.

Es soll nun zur Ausgleichung eines Zentralsystems $P_1 P_2 \cdots P_r$ mit dem Zentralpunkt P_0 übergegangen werden, wenn Voraussetzung ist, daſs die Beobachtungen so angeordnet sind, daſs die Resultate der Stationsausgleichungen sämtlich vollen Richtungssätzen mit gleichen Gewichten äquivalent sind.

Wie bereits unter 1 bei Winkelbeobachtungen gezeigt ist, wird auch hier der Seitengleichung eine solche Form gegeben werden, daſs sich die Ausgleichung in 2 getrennten Teilen ausführen läſst, von denen der erste die Widersprüche der Winkelgleichungen, der zweite aber den Widerspruch der Seitengleichung beseitigt. Zunächst wird nun nachstehend die Ausgleichung der r Winkelgleichungen des Zentralsystems erfolgen. Die dazu erforderliche Verbesserung irgend einer Richtung $P_i P_k$ werde durch $v'_{i \cdot k}$ bezeichnet. Die Winkelgleichungen lauten alsdann:

$$(1)\quad \begin{aligned} -v'_{0\cdot1} + v'_{0\cdot2} - v'_{1\cdot2} + v'_{1\cdot0} - v'_{2\cdot0} + v'_{2\cdot1} &= w_1 \\ -v'_{0\cdot2} + v'_{0\cdot3} - v'_{2\cdot3} + v'_{2\cdot0} - v'_{3\cdot0} + v'_{3\cdot2} &= w_2 \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad & \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad & \cdot \\ -v'_{0\cdot r} + v'_{0\cdot1} - v'_{r\cdot1} + v'_{r\cdot0} - v'_{1\cdot0} + v'_{1\cdot r} &= w_r . \end{aligned}$$

Drückt man die Verbesserungen durch die Korrelaten der Bedingungsgleichungen aus, so wird

$$(2)\quad \begin{array}{llllll} v'_{0\cdot1} = -v'_{1\cdot0} & = -k_1 & +k_r & v'_{1\cdot2} & = -v'_{2\cdot1} & = -k_1 \\ v'_{0\cdot2} = -v'_{2\cdot0} & = -k_2 & +k_1 & v'_{2\cdot3} & = -v'_{3\cdot2} & = -k_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ v'_{0\cdot r-1} = -v'_{r-1\cdot0} & = -k_{r-1} & +k_{r-2} & v'_{r-1\cdot r} & = -v'_{r\cdot r-1} & = -k_{r-1} \\ v'_{0\cdot r} = -v'_{r\cdot0} & = -k_r & +k_{r-1} & v'_{r\cdot1} & = -v'_{1\cdot r} & = -k_r , \end{array}$$

mithin ist

$$v'_{0\cdot1} = -v'_{1\cdot0} = v'_{1\cdot2} + v'_{1\cdot r} = -v'_{2\cdot1} - v'_{r\cdot1} \text{ u. s. w.}$$

Zur Bestimmung der k dienen die Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{aligned} 6k_1 - 2k_2 \qquad\qquad\qquad - 2k_r &= w_1 \\ -2k_1 + 6k_2 - 2k_3 \qquad\qquad &= w_2 \\ -2k_2 + 6k_3 - 2k_4 \qquad &= w_3 \\ \cdot \qquad\qquad &\ \ \cdot \\ \cdot \qquad\qquad &\ \ \cdot \\ -2k_{r-2} + 6k_{r-1} - 2k_r &= w_{r-1} \\ -2k_1 \qquad\qquad - 2k_{r-1} + 6k_r &= w_r . \end{aligned}$$

Multipliziert man die ersten $r-1$ Gleichungen der Reihe nach mit den Faktoren $t_1 \cdots t_{r-1}$, die so bestimmt werden, daſs

$$(4)\qquad \begin{aligned} 6t_1 - 2t_2 \qquad\qquad\qquad &= 2 \\ -2t_1 + 6t_2 - 2t_3 \qquad\quad &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad\vdots \\ -2t_{r-3} + 6t_{r-2} - 2t_{r-1} &= 0 \\ -2t_{r-2} + 6t_{r-1} &= 2 \end{aligned}$$

ist, und addiert man sie dann zur letzten, so erhält man

$$(6 - 2t_{r-1} - 2t_1)\,k_r = t_1 w_1 + t_2 w_2 + \cdots + w_r .$$

Die Auflösung des Gleichungssystems (4) ergiebt aber nach (10) unter 3, wenn man $r-1$ für r und $\mu_i = \nu_i = N_i$, $w_1 = w_{r-1} = 2$, $w_2 = w_3 = \cdots = w_{r-2} = 0$, ferner $a_{r-1\,.\,r} = 2$ setzt:

$$t_i = \frac{1}{2N_r}(2N_{r-i} + 2N_i) = \frac{1}{N_r}(N_{r-i} + N_i), \qquad (i=1\ldots(r-1))$$

wo die N an die Bedingung (14), 3: $-N_{i+1} + 3N_i - N_{i-1} = 0$, $N_0 = 0$, $N_1 = 1$ geknüpft sind. Der Koeffizient von k_r geht damit über in $\frac{1}{N_r}(2N_{r+1} - 2N_{r-1} - 4)$.

Stellt man die Gleichungen (3) um, z. B. die erste Gleichung an den Schluſs, so ändert sich die Form des Gleichungssystems nicht; man wird also in derselben Weise wie vorher k_r jetzt k_1 erhalten: Setzt man für den Augenblick

$$(5)\qquad N_{r+1} - N_{r-1} - 2 = n,$$

so ist die Auflösung des Gleichungssystems (3):

$$(6)\qquad \begin{aligned} 2nk_1 &= N_r w_1 + (N_{r-1} + N_1)w_2 + (N_{r-2} + N_2)w_3 + \cdots \\ &\quad + (N_2 + N_{r-2})w_{r-1} + (N_1 + N_{r-1})w_r \\ 2nk_2 &= (N_1 + N_{r-1})w_1 + N_r w_2 + (N_{r-1} + N_1)w_3 + \cdots \\ &\quad + (N_3 + N_{r-3})w_{r-1} + (N_2 + N_{r-2})w_r \\ 2nk_3 &= (N_2 + N_{r-2})w_1 + (N_1 + N_{r-1})w_2 + N_r w_3 + \cdots \\ &\quad + (N_4 + N_{r-4})w_{r-1} + (N_3 + N_{r-3})w_r \\ &\vdots \\ 2nk_{r-1} &= (N_{r-2} + N_2)w_1 + (N_{r-3} + N_3)w_2 + (N_{r-4} + N_4)w_3 + \cdots \\ &\quad + N_r w_{r-1} + (N_{r-1} + N_1)w_r \\ 2nk_r &= (N_{r-1} + N_1)w_1 + (N_{r-2} + N_2)w_2 + (N_{r-3} + N_3)w_3 + \cdots \\ &\quad + (N_1 + N_{r-1})w_{r-1} + N_r w_r . \end{aligned}$$

Die k ergeben sich aus einander durch cyclische Vertauschung von $w_1 \ldots w_r$.

Zur Kontrolle hat man:

$$2(k_1 + k_2 + \cdots + k_r) = \sum_1^r w_i.$$

Für das mittlere Fehlerquadrat m'^2 einer Richtung, aus den Winkelgleichungen allein, wird hiernach erhalten, wenn man außerdem wieder

$$r m_F^2 = \tfrac{1}{6} \sum_1^r w_i^2$$

setzt:

$$(7) \quad \begin{aligned} (N_{r+1} - N_{r-1} - 2) r (m'^2 - m_F^2) &= \tfrac{1}{8}(N_{r-1} + 1) \sum_1^r w_i^2 \\ &+ (N_{r-1} + N_1) \sum_1^{r-1} w_i w_{i+1} + (N_{r-2} + N_2) \sum_1^{r-2} w_i w_{i+2} \\ &+ \cdots + (N_2 + N_{r-2})(w_1 w_{r-1} + w_2 w_r) + (N_1 + N_{r-1}) w_1 w_r. \end{aligned}$$

In gleicher Weise kann man auch verfahren, wenn die Richtungsgewichte verschieden sind.

Sind also sämtliche w positiv, so ist $m'^2 > m_F^2$.

Für $r = 6$ hat man zum Beispiel:

$$\begin{aligned} 80k_1 &= 18w_1 + 7w_2 + 3w_3 + 2w_4 + 3w_5 + 7w_6 \\ 80k_2 &= 7w_1 + 18w_2 + 7w_3 + 3w_4 + 2w_5 + 3w_6 \\ 80k_3 &= 3w_1 + 7w_2 + 18w_3 + 7w_4 + 3w_5 + 2w_6 \\ 80k_4 &= 2w_1 + 3w_2 + 7w_3 + 18w_4 + 7w_5 + 3w_6 \\ 80k_5 &= 3w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 7w_4 + 18w_5 + 7w_6 \\ 80k_6 &= 7w_1 + 3w_2 + 2w_3 + 3w_4 + 7w_5 + 18w_6 \end{aligned}$$

und

$$(7^*) \quad \begin{aligned} 6m'^2 = \tfrac{1}{40}\{ & 9(w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_6^2) + 7(w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_4 \\ & + w_4 w_5 + w_5 w_6 + w_6 w_1) + 3(w_1 w_3 + w_2 w_4 + w_3 w_5 \\ & + w_4 w_6 + w_5 w_1 + w_6 w_2) + 2(w_1 w_4 + w_2 w_5 + w_3 w_6)\}. \end{aligned}$$

Wäre im besonderen

$$+ w_1 = - w_2 = + w_3 = - w_4 = + w_5 = - w_6 = w,$$

so würde

$$6m'^2 = \tfrac{3}{5} w^2;$$

und wäre

$$+ w_1 = + w_2 = + w_3 = - w_4 = - w_5 = - w_6 = w,$$

so würde

$$6m'^2 = \tfrac{7}{5}w^2;$$

und wäre

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = w,$$

so würde

$$6m'^2 = 3w^2.$$

Für alle diese Fälle giebt die Ferrerosche Formel

$$6m_F^2 = \tfrac{1}{6}\sum_1^6 w_i^2 = w^2.$$

Ist, wie bei den ersten beiden Annahmen, $\sum_1^6 w_i = 0$, so läfst sich $6m'^2$ auf die folgende Form bringen:

$$6m'^2 = \tfrac{1}{6}\sum_1^6 w_i^2 + \tfrac{1}{120}\{7[w_1w_2 + w_2w_3 + w_3w_4 + w_4w_5 + w_5w_6 + w_6w_1]$$
$$- 5[w_1w_3 + w_2w_4 + w_3w_5 + w_4w_6 + w_5w_1 + w_6w_2]$$
$$- 8[w_1w_4 + w_2w_5 + w_3w_6]\}.$$

Die Formel (7*) sei noch auf das Sechseck um Wurzelberg in der hannoversch-sächsischen Dreieckskette der Königlich Preufs. Landesaufnahme[1]) angewandt. Die Widersprüche für die Dreiecke des Polygons *Wurzelberg*—Petersberg—Hagelberg—Golmberg—Grofsberg—Collm—Leipzig—Petersberg sind der Reihe nach + 1″,033, − 0″,140, + 1″,115, + 1″,262, + 0″,065, − 0″,909. Mithin wird, gleiche Richtungsgewichte vorausgesetzt:

$$m'^2 = \tfrac{1}{480}\{18 \cdot 4{,}7531 + 14 \cdot 0{,}1903 + 6 \cdot 0{,}0948 + 4 \cdot 0{,}2810\} = 0{,}1873$$
$$m' = \pm\, 0'',433.$$

Nach der Näherungsformel ist $m_F^2 = \frac{1}{36} \cdot 4{,}7531 = 0{,}1320$; $m_F = \pm\, 0'',363$.

Zu einem anderen Ausdruck für das Quadrat des mittleren Richtungsfehlers (ohne Rücksicht auf die Seitengleichung) gelangt man, wenn man aus den Normalgleichungen (3) die reduzierten Normalgleichungen bildet. Bekanntlich hat die $i$te reduzierte Normalgleichung die Form:

$$c_ik_i + c_{i+1}k_{i+1} + \cdots = e_1w_1 + e_2w_2 + \cdots + e_{i-1}w_{i-1} + 1w_i.$$

Infolge der Gl. (14), 3, sowie des Ausdrucks für k_r, Gl. (6), findet man daher, wenn man wieder

$$(8)\qquad N_1w_1 + N_2w_2 + \cdots + N_iw_i = W_i \qquad \text{und ferner}$$
$$N_{r-1}w_1 + N_{r-2}w_2 + \cdots N_1w_{r-1} = W'_{r-1}$$

1) Die Königl. Preufs. Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Sechster Teil. Berlin 1894. Im Selbstverlag. S. 68/69.

setzt, die folgenden reduzierten Normalgleichungen:

$$\text{(9)}\qquad \begin{aligned} \frac{2N_{i+1}}{N_i}k_i - 2k_{i+1} - \frac{2N_1}{N_i}k_r &= \frac{W_i}{N_i} \qquad (i=1\ldots(r-1)) \\ \frac{2(N_{r+1}-N_{r-1}-2)}{N_r}k_r &= \frac{W_r+W'_{r-1}}{N_r}. \end{aligned}$$

Mithin ergiebt sich das mittlere Fehlerquadrat einer Richtung (aus den Winkelgleichungen allein) auch aus der Gleichung:

$$\text{(10)}\qquad rm'^2 = \sum_1^{r-1}\frac{W_i^2}{2N_iN_{i+1}} + \frac{(W_r+W'_{r-1})^2}{2N_r(N_{r+1}-N_{r-1}-2)}.$$

Der Unterschied gegen das mittlere Fehlerquadrat einer Richtung, m^2, bei einer aus r Dreiecken bestehenden, einfach zusammenhängenden Dreieckskette, wie sie Fig. 2 zeigt, ist also nach (5), 3:

$$\text{(11)}\qquad r(m^2-m'^2) = \frac{1}{2N_r}\left\{\frac{W_r^2}{N_{r+1}} - \frac{(W_r+W'_{r-1})^2}{N_{r+1}-N_{r-1}-2}\right\}.$$

Beispielsweise wird hiernach für $r=6$ und für

$$+w_1 = -w_2 = +w_3 = -w_4 = +w_5 = -w_6 = w:$$
$$6(m^2-m'^2) = \tfrac{104}{5\cdot 377}w^2 = 0{,}055w^2, \quad \text{d. i. etwa} \quad \tfrac{1}{11}\cdot 6m'^2;$$

für

$$+w_1 = +w_2 = +w_3 = -w_4 = -w_5 = -w_6 = w:$$
$$6(m^2-m'^2) = \tfrac{416}{5\cdot 377}w^2 = 0{,}221w^2, \quad \text{d. i. etwa} \quad \tfrac{1}{7}\cdot 6m'^2;$$

für

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = w:$$
$$6(m^2-m'^2) = -\tfrac{232}{377}w^2 = -0{,}615w^2, \quad \text{d. i. etwa} \quad -\tfrac{1}{5}\cdot 6m'^2.$$

5.

Die Ausgleichung der Beobachtungen für das Zentralsystem $P_0P_1P_2\ldots P_r$ wird sich jetzt außer auf die Winkelgleichungen auch auf die Seitengleichung erstrecken. Die Voraussetzungen hierbei sind die gleichen wie vorher. Die Verbesserung des Beobachtungswertes für die Richtung P_iP_k sei $v_{i\cdot k}$.

Wenn wieder wie unter 1

$$\frac{\varrho''}{\text{Mod.}}\log\frac{\sin A_1 \sin A_2 \ldots \sin A_r}{\sin B_1 \sin B_2 \ldots \sin B_r} = l$$

und

$$\operatorname{cotg} A_i = a_i, \quad \operatorname{cotg} B_i = b_i$$

gesetzt wird, so lautet die Seitengleichung in Richtungsverbesserungen:

$$\text{(1)}\qquad \sum_1^r\{-a_i(-v_{i\cdot i+1}+v_{i\cdot 0}) + b_i(-v_{i+1\cdot 0}+v_{i+1\cdot i})\} = l.$$

Die Winkelgleichungen sind:

$$(2)\qquad -v_{i\cdot i+1} + v_{i\cdot 0} - v_{i+1\cdot 0} + v_{i+1\cdot i} - v_{0\cdot i} + v_{0\cdot i+1} - w_i = 0. \quad (i = 1 \ldots r)$$

Für den Index $r + 1$ ist sowohl in der Seitengleichung als auch in den Winkelgleichungen der Index 1 zu setzen.

Wenn man in der üblichen Weise die Normalgleichungen bildet, so könnte man aus ihnen, unter Anwendung von (6), 4, die Korrelaten der Winkelgleichungen eliminieren, und es bliebe alsdann nur die Korrelate der Seitengleichung aus der letzten reduzierten Normalgleichung zu entwickeln. Jedoch dürfte das nachstehende Verfahren übersichtlicher sein; vergl. S. 159 u. f.

Addiert man zu (1) die mit den Faktoren $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ multiplizierten Winkelgleichungen (2), so wird

$$l + \sum_1^r \lambda_i w_i = L =$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} & v_{0\cdot 1}(\lambda_r - \lambda_1) && + v_{0\cdot 2}(\lambda_1 - \lambda_2) && + \cdots + v_{0\cdot r}(\lambda_{r-1} - \lambda_r) \\ & + v_{1\cdot 0}(-b_r - a_1 - \lambda_r + \lambda_1) && + v_{2\cdot 0}(-b_1 - a_2 - \lambda_1 + \lambda_2) && + \cdots + v_{r\cdot 0}(-b_{r-1} - a_r - \lambda_{r-1} + \lambda_r) \\ & + v_{1\cdot 2}(a_1 - \lambda_1) && + v_{2\cdot 3}(a_2 - \lambda_2) && + \cdots + v_{r\cdot 1}(a_r - \lambda_r) \\ & + v_{2\cdot 1}(b_1 + \lambda_1) && + v_{3\cdot 2}(b_2 + \lambda_2) && + \cdots + v_{1\cdot r}(b_r + \lambda_r). \end{aligned}$$

Die Korrelaten der Bedingungsgleichungen (2) seien $k_1 \ldots k_r$, und die Korrelate der Gleichung (3) sei k; alsdann hat man

$$(4)\qquad \begin{aligned} v_{0\cdot i} &= + k_{i-1} - k_i + (\lambda_{i-1} - \lambda_i)k \\ v_{i\cdot 0} &= - k_{i-1} + k_i + (-\lambda_{i-1} + \lambda_i - b_{i-1} - a_i)k \\ v_{i\cdot i+1} &= - k_i + (-\lambda_i + a_i)k \\ v_{i+1\cdot i} &= + k_i + (\lambda_i + b_i)k, \end{aligned} \quad (i = 1 \ldots r)$$

wobei k_0, λ_0 durch k_r, λ_r und $v_{r\cdot r+1}$, $v_{r+1\cdot r}$ durch $v_{r\cdot 1}$, $v_{1\cdot r}$ zu ersetzen sind.

Wird nun

$$(5)\qquad \begin{aligned} -b_r - 2a_1 + 2b_1 + a_2 &= -\sigma_1 \\ -b_1 - 2a_2 + 2b_2 + a_3 &= -\sigma_2 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ -b_{r-2} - 2a_{r-1} + 2b_{r-1} + a_r &= -\sigma_{r-1} \\ -b_{r-1} - 2a_r + 2b_r + a_1 &= -\sigma_r, \end{aligned}$$

$$\sum_1^r (-a_i + b_i) = -\sum_1^r \sigma_i,$$

und ferner

$$(6)\quad \begin{array}{l} 6\lambda_1 - 2\lambda_2 \qquad\qquad\qquad\qquad - 2\lambda_r = \sigma_1 \\ -2\lambda_1 + 6\lambda_2 - 2\lambda_3 \qquad\qquad\qquad = \sigma_2 \\ \qquad -2\lambda_2 + 6\lambda_3 - 2\lambda_4 \qquad\qquad = \sigma_3 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad -2\lambda_{r-2} + 6\lambda_{r-1} - 2\lambda_r = \sigma_{r-1} \\ -2\lambda_1 \qquad\qquad - 2\lambda_{r-1} + 6\lambda_r = \sigma_r \end{array}$$

gesetzt, so hängen die aus den Winkelgleichungen folgenden Normalgleichungen nicht mehr mit der Normalgleichung, die aus der Seitengleichung (3) hervorgeht, zusammen. Es wird also

$$(7)\qquad v_{i\cdot k} = v'_{i\cdot k} + v''_{i\cdot k},$$

wo $v'_{i\cdot k}$ aus den Gleichungen (2) und (6), 4 erhalten wird, während

$$(4^*)\quad \begin{array}{ll} v''_{0\cdot i} \;\;\; = (\lambda_{i-1} - \lambda_i)k & (i=1\ldots r) \\ v''_{i\cdot 0} \;\;\; = (-\lambda_{i-1} + \lambda_i - b_{i-1} - a_i)k & \lambda_0 = \lambda_r \\ v''_{i\cdot i+1} = (-\lambda_i + a_i)k & v''_{r+1\cdot r} = v''_{1\cdot r} \\ v''_{i+1\cdot i} = (\lambda_i + b_i)k, & v''_{r\cdot r+1} = v''_{r\cdot 1} \end{array}$$

ist.

Die Gl. (6) sind die Bedingungen dafür, daſs die Summe der Quadrate der Koeffizienten der Verbesserungen in der Gl. (3) ein Minimum wird. Nach (6) unter 4 ist

$$(8)\quad \begin{array}{c} 2(N_{r+1} - N_{r-1} - 2)\lambda_i = \\ \sum_{\lambda=1}^{r-i+1} (N_{r-\lambda+1} + N_{\lambda-1})\sigma_{i+\lambda-1} + \sum_{\lambda=1}^{i-1} (N_{i-\lambda} + N_{r+\lambda-i})\sigma_\lambda \end{array} \qquad (i=1\ldots r)$$

oder, wenn man σ_λ unter $\sigma_{r+\lambda}$ verstehen will,

$$(8^*)\qquad 2(N_{r+1} - N_{r-1} - 2)\lambda_i = \sum_{\lambda=1}^{r} (N_{r-\lambda+1} + N_{\lambda-1})\sigma_{i+\lambda-1}.$$

Infolge der Gleichungen (6) erhält man aus der umgeformten Seitengleichung (3) die Normalgleichung

$$(9)\qquad Gk = l + \sum_1^r \lambda_i w_i = L.$$

Stellt man die Seitengleichung erst auf, nachdem die Winkelgleichungen bereits ausgeglichen sind, so muſs ihr konstantes Glied gleich L sein. Für G hat man zunächst, indem man in der Gl. (3) v durch die Werte von v'' nach (4*) ersetzt,

$$G = 6\sum_1^r \lambda_i^2 - 4\sum_1^r \lambda_i\lambda_{i+1} - 2\sum_1^r \lambda_i\sigma_i + \sum_1^r \{a_i^2 + b_i^2 + (b_i + a_{i+1})^2\}$$

wobei wie auch weiterhin $\lambda_{r+1} = \lambda_1$ und $a_{r+1} = a_1$ ist.

Nach (6) ist aber

$$6\sum_1^r \lambda_i^2 - 4\sum_1^r \lambda_i\lambda_{i+1} = \sum_1^r \lambda_i\sigma_i,$$

folglich ist

(10) $$G = 2\sum_1^r \{a_i^2 + b_i^2 + b_i a_{i+1}\} - \sum_1^r \sigma_i\lambda_i.$$

Setzt man für λ_i den Wert aus (8) ein, so wird dieser Ausdruck das Minimum des ursprünglichen, d. i. das Minimum der Summe der Quadrate der Koeffizienten der v in der Gl. (3) in bezug auf die λ.

Für den ersten Teil von G kann man auch schreiben

(11) $$\begin{aligned} 2\sum_1^r \{a_i^2 + b_i^2 + b_i a_{i+1}\} &= \tfrac{1}{2}\sum_1^r \{3(a_{i+1} + b_i)^2 + (a_{i+1} - b_i)^2\} \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_1^r \frac{3\sin^2(A_{i+1} + B_i) + \sin^2(A_{i+1} - B_i)}{\sin^2 A_{i+1}\sin^2 B_i}. \end{aligned}$$

Der zweite Teil läſst sich, entsprechend der Überführung von (7) in (10), 4, wie folgt umformen.

Setzt man

$$\begin{aligned} N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2 + \cdots + N_i\sigma_i &= S_i \\ N_{r-1}\sigma_1 + N_{r-2}\sigma_2 + \cdots + N_1\sigma_{r-1} &= S'_{r-1}, \end{aligned}$$

so ist

(12) $$\sum_1^r \sigma_i\lambda_i = \sum_1^{r-1} \frac{S_i^2}{2N_iN_{i+1}} + \frac{(S_r + S'_{r-1})^2}{2N_r(N_{r+1} - N_{r-1} - 2)}$$

Ist nun k aus (9) berechnet, so ergeben sich nach (4*) die Teilverbesserungen $v''_{i \cdot k}$, die mit den aus (6) und (2), 4 berechneten Werten von $v'_{i \cdot k}$ zusammen, nach (7) $v_{i \cdot k}$ liefern.

Bezeichnet man das aus sämtlichen Bedingungsgleichungen erhaltene mittlere Fehlerquadrat einer Richtung vom Gewicht 1 durch m^2, so ist

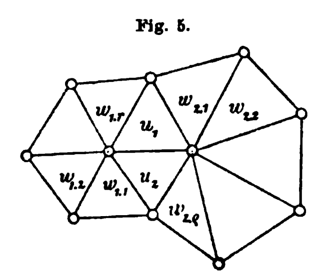
$$(r + 1)m^2 = rm'^2 + \frac{L^2}{G},$$

wo rm'^2 aus (7) oder (10), 4 zu entnehmen ist.

6.

Ich nehme nun wieder an, daſs die nach Richtungen beobachtete Figur aus 2 Zentralsystemen besteht, die in 2 gemeinschaftlichen Dreiecken zusammenhängen. Fig. 5. Die Widersprüche der Winkelgleichungen für die gemeinschaftlichen Dreiecke seien u_1 und u_2. Durchläuft man die Dreiecke in jedem Zentralsystem rechtläufig, so sollen ihre Winkelgleichungen die folgenden Widersprüche zeigen:

Fig. 5.



im ersten Zentralsystem:

$$u_1,\ u_2,\ w_{1\cdot 1},\ w_{1\cdot 2},\ \cdots,\ w_{1\cdot r};$$

im zweiten Zentralsystem: $u_2,\ u_1,\ w_{2\cdot 1},\ w_{2\cdot 2},\ \cdots,\ w_{2\cdot\varrho}$.

Bei der Ausgleichung wird auf die beiden Seitengleichungen keine Rücksicht genommen werden. Das Gewicht einer Richtungsbeobachtung sei 1.

Die Korrelaten der Winkelgleichungen, die zu den Widersprüchen in der angegebenen Reihenfolge gehören, seien

$$\xi,\ \eta,\ k_{1\cdot 1},\ k_{1\cdot 2},\ \cdots,\ k_{1\cdot r},$$
$$\eta,\ \xi,\ k_{2\cdot 1},\ k_{2\cdot 2},\ \cdots,\ k_{2\cdot\varrho}.$$

Die Normalgleichungen lassen sich nun wie folgt aufstellen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 6\xi - 2\eta &= u_1 + 2k_{1\cdot r} + 2k_{2\cdot 1},\\ -2\xi + 6\eta &= u_2 + 2k_{1\cdot 2} + 2k_{2\cdot\varrho}. \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{array}{llll|llll} . & 6k_{1\cdot 1} & -2k_{1\cdot 2} & = w_{1\cdot 1} + 2\eta & . & 6k_{2\cdot 1} & -2k_{2\cdot 2} & = w_{2\cdot 1} + 2\xi \\ -2k_{1\cdot 1} & +6k_{1\cdot 2} & -2k_{1\cdot 3} & = w_{1\cdot 2} & -2k_{2\cdot 1} & +6k_{2\cdot 2} & -2k_{2\cdot 3} & = w_{2\cdot 2} \\ -2k_{1\cdot 2} & +6k_{1\cdot 3} & -2k_{1\cdot 4} & = w_{1\cdot 3} & -2k_{2\cdot 2} & +6k_{2\cdot 3} & -2k_{2\cdot 4} & = w_{2\cdot 3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2k_{1\cdot r-2} & +6k_{1\cdot r-1} & -2k_{1\cdot r} & = w_{1\cdot r-1} & -2k_{2\cdot\varrho-2} & +6k_{2\cdot\varrho-1} & -2k_{2\cdot\varrho} & = w_{2\cdot\varrho-1} \\ -2k_{1\cdot r-1} & +6k_{1\cdot r} & . & = w_{1\cdot r} + 2\xi & -2k_{2\cdot\varrho-1} & +6k_{2\cdot\varrho} & . & = w_{2\cdot\varrho} + 2\eta. \end{array}$$

Setzt man

$$(3)\qquad \begin{array}{l} N_1 N_r\, w_{1\cdot 1} + N_1 N_{r-1} w_{1\cdot 2} + N_1 N_{r-2} w_{1\cdot 3} + \cdots + N_1 N_1 w_{1\cdot r} = 2N_{r+1} N_1 \varkappa_{1\cdot 1} \\ N_1 N_{r-1} w_{1\cdot 1} + N_2 N_{r-1} w_{1\cdot 2} + N_2 N_{r-2} w_{1\cdot 3} + \cdots + N_2 N_1 w_{1\cdot r} = 2N_{r+1} N_1 \varkappa_{1\cdot 2} \\ N_1 N_{r-2} w_{1\cdot 1} + N_2 N_{r-2} w_{1\cdot 2} + N_3 N_{r-2} w_{1\cdot 3} + \cdots + N_3 N_1 w_{1\cdot r} = 2N_{r+1} N_1 \varkappa_{1\cdot 3} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ N_1 N_1\, w_{1\cdot 1} + N_2 N_1\, w_{1\cdot 2} + N_3 N_1\, w_{1\cdot 3} + \cdots + N_r N_1 w_{1\cdot r} = 2N_{r+1} N_1 \varkappa_{1\cdot r} \end{array}$$

und ebenso

$$
(4)\quad \begin{array}{l}
N_1 N_\varrho \quad w_{2\cdot 1} + N_1 N_{\varrho-1} w_{2\cdot 2} + N_1 N_{\varrho-2} w_{2\cdot 3} + \cdots + N_1 N_1 w_{2\cdot \varrho} = 2N_{\varrho+1} N_1 \varkappa_{2\cdot 1} \\
N_1 N_{\varrho-1} w_{2\cdot 1} + N_2 N_{\varrho-1} w_{2\cdot 2} + N_2 N_{\varrho-2} w_{2\cdot 3} + \cdots + N_2 N_1 w_{2\cdot \varrho} = 2N_{\varrho+1} N_1 \varkappa_{2\cdot 2} \\
\vdots \\
N_1 N_1 \quad w_{2\cdot 1} + N_2 N_1 \quad w_{2\cdot 2} + N_3 N_1 \quad w_{2\cdot 3} + \cdots + N_\varrho N_1 w_{2\cdot \varrho} = 2N_{\varrho+1} N_1 \varkappa_{2\cdot \varrho},
\end{array}
$$

so sind nach (10), 3 die Auflösungen der beiden Gleichungssysteme (2), da hier $\mu_i = \nu_i = N_i$ ist:

$$
(5)\quad \begin{array}{l}
N_{r+1}(k_{1\cdot 1} - \varkappa_{1\cdot 1}) = N_1 \xi + N_r \eta \\
N_{r+1}(k_{2\cdot 1} - \varkappa_{2\cdot 1}) = N_2 \xi + N_{r-1} \eta \\
\vdots \\
N_{r+1}(k_{r\cdot 1} - \varkappa_{r\cdot 1}) = N_r \xi + N_1 \eta \qquad \text{und} \\
N_{\varrho+1}(k_{2\cdot 1} - \varkappa_{2\cdot 1}) = N_\varrho \xi + N_1 \eta \\
N_{\varrho+1}(k_{2\cdot 2} - \varkappa_{2\cdot 2}) = N_{\varrho-1} \xi + N_2 \eta \\
\vdots \\
N_{\varrho+1}(k_{2\cdot \varrho} - \varkappa_{2\cdot \varrho}) = N_1 \xi + N_\varrho \eta.
\end{array}
$$

Infolge dessen ergiebt sich aus (1), wenn man

$$
(6)\quad \begin{array}{l}
u_1 + 2\varkappa_{1\cdot r} + 2\varkappa_{2\cdot 1} = U_1 \\
u_2 + 2\varkappa_{1\cdot 2} + 2\varkappa_{2\cdot \varrho} = U_2, \qquad \text{ferner} \\
2\left(3 - \dfrac{N_r}{N_{r+1}} - \dfrac{N_\varrho}{N_{\varrho+1}}\right) = P \\
2\left(1 + \dfrac{N_1}{N_{r+1}} + \dfrac{N_1}{N_{\varrho+1}}\right) = Q
\end{array}
$$

setzt:

$$
\begin{array}{l}
P\xi - Q\eta = U_1 \\
-Q\xi + P\eta = U_2, \qquad \text{oder}
\end{array}
$$

$$
(7)\quad \begin{array}{l}
(P^2 - Q^2)\xi = PU_1 + QU_2 \\
(P^2 - Q^2)\eta = QU_1 + PU_2.
\end{array}
$$

Führt man diese Werte von ξ, η in (5) ein, so findet man die Werte der übrigen Korrelaten.

Bildet man jetzt aus den Winkelgleichungen das mittlere Fehlerquadrat der Gewichtseinheit, m^2, so ist nach (5), (3), (4) und (6)

$$
(8)\quad \begin{aligned}
(2 + r + \varrho)m^2 &= \xi u_1 + \eta u_2 + \sum_1^r k_{1\cdot i} w_{1\cdot i} + \sum_1^\varrho k_{2\cdot i} w_{2\cdot i} \\
&= \xi U_1 + \eta U_2 + \sum_1^r \varkappa_{1\cdot i} w_{1\cdot i} + \sum_1^\varrho \varkappa_{2\cdot i} w_{2\cdot i}.
\end{aligned}
$$

Nun ist aber

$$(9)\qquad \sum_1^r \varkappa_{1\cdot i} w_{1\cdot i} = r m'^2 \quad \text{und} \quad \sum_1^\varrho \varkappa_{2\cdot i} w_{2\cdot i} = \varrho m''^2,$$

wenn m'^2 und m''^2 die mittleren Fehlerquadrate der Gewichtseinheit für die beiden einfachen aus r und ϱ Dreiecken bestehenden Ketten bezeichnen, die sich an die gemeinschaftlichen Dreiecke der beiden Zentralsysteme anschliefsen. Ihre Werte kann man mit (3) und (4) oder nach einem der unter 3 gegebenen Ausdrücke (5), (9), (11), (12), (15) für das mittlere Fehlerquadrat berechnen.

Setzt man noch

$$(10)\qquad \begin{aligned} m^{02} &= \tfrac{1}{2}(\xi U_1 + \eta U_2) \\ &= \tfrac{1}{2}P(\xi^2 + \eta^2) - Q\xi\eta \\ &= \frac{\tfrac{1}{2}P(U_1^2 + U_2^2) + Q U_1 U_2}{P^2 - Q^2}, \end{aligned}$$

so ist also

$$(8^*)\qquad (2 + r + \varrho)m^2 = 2m^{02} + rm'^2 + \varrho m''^2.$$

Angenähert ist

$$P = 2\sqrt{5} \quad Q = 2$$

$$\xi = \tfrac{1}{8}(\sqrt{5}\, U_1 + U_2), \quad \eta = \tfrac{1}{8}(U_1 + \sqrt{5}\, U_2)$$

$$U_1 = u_1 + \frac{1}{f}(w_{1\cdot r} + w_{2\cdot 1}) + \frac{1}{f^2}(w_{1\cdot r-1} + w_{2\cdot 2}) + \cdots$$

$$U_2 = u_2 + \frac{1}{f}(w_{1\cdot 1} + w_{2\cdot \varrho}) + \frac{1}{f^2}(w_{1\cdot 2} + w_{2\cdot \varrho-1}) + \cdots$$

$$\frac{1}{f} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

In derselben Weise kann man auch verfahren, wenn die Richtungsgewichte verschieden sind. Auch wenn das Netz aus einer Anzahl aneinander hängender Zentralsysteme besteht, läfst sich das angegebene Verfahren anwenden.

7.

In einem Falle, abgesehen von einem einzelnen Dreiecke, giebt bei gleichwertigen Richtungsbeobachtungen die Ferrerosche Formel den genauen Wert an; dann nämlich, wenn in einem Polygone sämtliche Verbindungslinien zwischen je 2 Punkten beobachtet sind, und wenn bei der Ausgleichung auf die Seitengleichungen keine Rücksicht genommen wird.

Wenn das Polygon ein $(r+1)$-Eck, $P_0 P_1 P_2 \cdots P_r$, ist, so ist

die Anzahl der unabhängigen Winkelgleichungen $\frac{r(r-1)}{2}$. Führt man die Bezeichnung ein

$$(1)\qquad -v_{i\cdot k}+v_{k\cdot i}=\varepsilon_{i\cdot k},$$

worin $v_{i\cdot k}$ wieder die Verbesserung der Richtung P_iP_k bedeutet, so kann man diese Anzahl wie folgt zusammensetzen

$$(2)\qquad \begin{array}{llll} \text{aus } (r-1) \text{ Gleichungen:} & \varepsilon_{0\cdot 1}+\varepsilon_{1\cdot i}-\varepsilon_{0\cdot i}=w^{(0)}_{1\cdot i} & (i=2\ldots r) \\ \;\;\text{„}\;\; (r-2) \quad \text{„} \quad : & \varepsilon_{0\cdot 2}+\varepsilon_{2\cdot i}-\varepsilon_{0\cdot i}=w^{(0)}_{2\cdot i} & (i=3\ldots r) \\ \quad\vdots & \quad\vdots & \\ \;\;\text{„}\quad\; 1 \text{ Gleichung:} & \varepsilon_{0\cdot r-1}+\varepsilon_{r-1\cdot r}-\varepsilon_{0\cdot r}=w^{(0)}_{r-1\cdot r}. & \end{array}$$

$w^{(0)}_{i\cdot k}$ bedeutet den Widerspruch zwischen der berechneten und der beobachteten Winkelsumme im Dreieck $P_0P_iP_k$; allgemein soll für das Dreieck $P_\lambda P_\mu P_\nu$

$$(3)\qquad w^{(\lambda)}_{\mu\cdot\nu}=w^{(\mu)}_{\nu\cdot\lambda}=w^{(\nu)}_{\lambda\cdot\mu}$$

sein.

Es seien $k_{1\cdot 2}\cdots k_{1\cdot r};\ k_{2\cdot 3}\cdots k_{2\cdot r};\ \cdots;\ k_{r-1\cdot r}$ die Korrelaten der Gleichungen (2). Das Minimum von Σv^2 mit den Gleichungen (2) als Nebenbedingungen findet alsdann statt für:

$$\begin{array}{llllllll} -v_{0\cdot 1} & =v_{1\cdot 0} & =\frac{1}{2}\varepsilon_{0\cdot 1} & = \quad . & +k_{1\cdot 2} & +k_{1\cdot 3} & +k_{1\cdot 4} & +\cdots+k_{1\cdot r-1}+k_{1\cdot r} \\ -v_{0\cdot 2} & =v_{2\cdot 0} & =\frac{1}{2}\varepsilon_{0\cdot 2} & =-k_{1\cdot 2} & \quad . & +k_{2\cdot 3} & +k_{2\cdot 4} & +\cdots+k_{2\cdot r-1}+k_{2\cdot r} \\ -v_{0\cdot 3} & =v_{3\cdot 0} & =\frac{1}{2}\varepsilon_{0\cdot 3} & =-k_{1\cdot 3} & -k_{2\cdot 3} & \quad . & +k_{3\cdot 4} & +\cdots+k_{3\cdot r-1}+k_{3\cdot r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -v_{0\cdot r-1} & =v_{r-1\cdot 0} & =\frac{1}{2}\varepsilon_{0\cdot r-1} & =-k_{1\cdot r-1} & -k_{2\cdot r-1} & -k_{3\cdot r-1} & -k_{4\cdot r-1} & -\cdots \quad . \quad +k_{r\cdot r-1} \\ -v_{0\cdot r} & =v_{r\cdot 0} & =\frac{1}{2}\varepsilon_{0\cdot r} & =-k_{1\cdot r} & -k_{2\cdot r} & -k_{3\cdot r} & -k_{4\cdot r} & -\cdots-k_{r-1\cdot r} \quad . \end{array}$$

$$(4^*)\qquad \begin{array}{lllll} -v_{1\cdot i} & =v_{i\cdot 1} & =\frac{1}{2}\varepsilon_{1\cdot i} & =k_{1\cdot i} & (i=2\ldots r) \\ -v_{2\cdot i} & =v_{i\cdot 2} & =\frac{1}{2}\varepsilon_{2\cdot i} & =k_{2\cdot i} & (i=3\ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -v_{r-1\cdot r} & =v_{r\cdot r-1} & =\frac{1}{2}\varepsilon_{r-1\cdot r} & =k_{r-1\cdot r}. & \end{array}$$

Es ist daher

$$(5)\qquad \begin{array}{lllllll} \varepsilon_{0\cdot 1} & = \quad . & +\varepsilon_{1\cdot 2} & +\varepsilon_{1\cdot 3} & +\cdots+\varepsilon_{1\cdot r-1} & +\varepsilon_{1\cdot r} \\ \varepsilon_{0\cdot 2} & =-\varepsilon_{1\cdot 2} & \quad . & +\varepsilon_{2\cdot 3} & +\cdots+\varepsilon_{2\cdot r-1} & +\varepsilon_{2\cdot r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{0\cdot r-1} & =-\varepsilon_{1\cdot r-1} & -\varepsilon_{2\cdot r-1} & -\varepsilon_{3\cdot r-1} & -\cdots \quad . & +\varepsilon_{r-1\cdot r} \\ \varepsilon_{0\cdot r} & =-\varepsilon_{1\cdot r} & -\varepsilon_{2\cdot r} & -\varepsilon_{3\cdot r} & -\cdots-\varepsilon_{r-1\cdot r} & \quad . \quad , \end{array}$$

und

$$(6)\qquad \sum_1^r \varepsilon_{0\cdot\lambda}=0.$$

$$\sum v_{0\cdot\lambda}=\sum v_{\lambda\cdot 0}=0.$$

Aus den Bedingungsgleichungen bilde man jetzt andere, indem man jedesmal die $(r-1)$ Gleichungen addiert, die $\varepsilon_{0\cdot 1}$, $\varepsilon_{0\cdot 2}$, .. $\varepsilon_{0\cdot r}$, positiv genommen, enthalten. Setzt man hierbei fest, dafs

$$(7) \qquad \begin{array}{ll} \varepsilon_{i\cdot\lambda} = -\varepsilon_{\lambda\cdot i} & w_{i\cdot\lambda} = -w_{\lambda\cdot i} \\ \varepsilon_{i\cdot i} = 0 & w_{i\cdot i} = 0 \end{array}$$

sein soll, so ergiebt sich das folgende Gleichungsystem:

$$(8) \qquad r\varepsilon_{0\cdot i} - \sum_{1}^{r} \varepsilon_{0\cdot\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{r} \varepsilon_{i\cdot\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{r} w_{i\cdot\lambda}^{(0)}, \qquad (i=1\ldots r)$$

Nach (5) und (7) ist aber $\sum_{\lambda=1}^{r} \varepsilon_{i\cdot\lambda} = \varepsilon_{0\cdot i}$; daher folgt aus (8), wenn man aufserdem (6) berücksichtigt:

$$(9) \qquad (r+1)\varepsilon_{0\cdot i} = \sum_{\lambda=1}^{r} w_{i\cdot\lambda}^{(0)} \qquad (i=1\ldots r)$$

Ausführlich geschrieben ist also:

$$(9^*) \quad \begin{array}{llllllll} \varepsilon_{0\cdot 1} & = -2v_{0\cdot 1} & = 2v_{1\cdot 0} & = \frac{1}{r+1}\{ \;\; . & w_{1\cdot 2}^{(0)} & + w_{1\cdot 3}^{(0)} & + \cdots + w_{1\cdot r-1}^{(0)} & + w_{1\cdot r}^{(0)} \} \\ \varepsilon_{0\cdot 2} & = -2v_{0\cdot 2} & = 2v_{2\cdot 0} & = \frac{1}{r+1}\{ -w_{1\cdot 2}^{(0)} & . & + w_{2\cdot 3}^{(0)} & + \cdots + w_{2\cdot r-1}^{(0)} & + w_{2\cdot r}^{(0)} \} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{0\cdot r-1} & = -2v_{0\cdot r-1} & = 2v_{r-1\cdot 0} & = \frac{1}{r+1}\{ -w_{1\cdot r-1}^{(0)} & -w_{2\cdot r-1}^{(0)} & -w_{3\cdot r-1}^{(0)} & - \cdots \;\; . & + w_{r-1\cdot r}^{(0)} \} \\ \varepsilon_{0\cdot r} & = -2v_{0\cdot r} & = 2v_{r\cdot 0} & = \frac{1}{r+1}\{ -w_{1\cdot r}^{(0)} & -w_{2\cdot r}^{(0)} & -w_{3\cdot r}^{(0)} & - \cdots - w_{r-1\cdot r}^{(0)} & . \;\; \} \end{array}$$

In derselben Weise gelangt man zu Ausdrücken für

$$\varepsilon_{1\cdot 2}, \cdots, \; \varepsilon_{1\cdot r}, \; \varepsilon_{1\cdot 0},$$

wenn man die Bedingungsgleichungen für diejenigen Dreiecke aufstellt, die einen Eckpunkt im Punkte P_1, anstatt wie vorher im Punkte P_0 haben. Diese Bedingungsgleichungen folgen aber aus den Gleichungen (2) durch cyklische Vertauschung der Indices und Accente $0, 1, 2 \cdots r$. Man wird daher auch die $\varepsilon_{1\cdot i+1}$ aus den $\varepsilon_{0\cdot i}$ der Gl. (9*) durch cyklische Vertauschung erhalten, und weiter $\varepsilon_{2\cdot i+2}$ u. s. f. durch fortgesetzte Vertauschung:

$$(10) \quad \begin{array}{lllllll} \varepsilon_{1\cdot 2} = -2v_{1\cdot 2} = 2v_{2\cdot 1} = \frac{1}{r+1}\{ \;\; . & w_{2\cdot 3}^{(1)} & + w_{2\cdot 4}^{(1)} & + \cdots + w_{2\cdot r}^{(1)} & + w_{2\cdot 0}^{(1)} \} \\ \varepsilon_{1\cdot 3} = -2v_{1\cdot 3} = 2v_{3\cdot 1} = \frac{1}{r+1}\{ -w_{2\cdot 3}^{(1)} & . & + w_{3\cdot 4}^{(1)} & + \cdots + w_{3\cdot r}^{(1)} & + w_{3\cdot 0}^{(1)} \} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{1\cdot r} = -2v_{1\cdot r} = 2v_{r\cdot 1} = \frac{1}{r+1}\{ -w_{2\cdot r}^{(1)} & -w_{3\cdot r}^{(1)} & -w_{4\cdot r}^{(1)} & - \cdots \;\; . & + w_{r\cdot 0}^{(1)} \} \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
& \varepsilon_{2\cdot3}=-2v_{2\cdot3}=2v_{3\cdot2}=\frac{1}{r+1}\left\{\quad\cdot\quad w^{(2)}_{3\cdot4}+w^{(2)}_{3\cdot5}+\cdots+w^{(2)}_{3\cdot r}+w^{(2)}_{3\cdot0}+w^{(2)}_{3\cdot1}\right\} \\
11) & \varepsilon_{2\cdot4}=-2v_{2\cdot4}=2v_{4\cdot2}=\frac{1}{r+1}\left\{-w^{(2)}_{3\cdot4}\quad\cdot\quad+w^{(2)}_{4\cdot5}+\cdots+w^{(2)}_{4\cdot r}+w^{(2)}_{4\cdot0}+w^{(2)}_{4\cdot1}\right\} \\
& \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
& \varepsilon_{2\cdot r}=-2v_{2\cdot r}=2v_{r\cdot2}=\frac{1}{r+1}\left\{-w^{(2)}_{3\cdot r}-w^{(2)}_{4\cdot r}-w^{(2)}_{5\cdot r}-\cdots\quad\cdot\quad+w^{(2)}_{r\cdot0}+w^{(2)}_{r\cdot1}\right\}
\end{array}
$$

u. s. f.

$$
12)\quad \varepsilon_{r-1\cdot r}=-2v_{r-1\cdot r}=2v_{r\cdot r-1}=\frac{1}{r+1}\left\{\quad\cdot\quad w^{(r-1)}_{r\cdot0}+w^{(r-1)}_{r\cdot1}+\cdots+w^{(r-1)}_{r\cdot r-2}\right\}
$$

Nach (4*) ist aber

$$
\varepsilon_{i\cdot n}=2k_{i\cdot n}, \qquad \binom{i=1\ldots(r-1)}{n=2\ldots r}
$$

wobei immer $n > i$ ist; berücksichtigt man aufserdem Gl. (3), so erhält man als Auflösung der in gewöhnlicher Weise aus den Gl. (2) gebildeten Normalgleichungen:

$$
\begin{array}{lllllllll}
& 2(r+1)k_{1\cdot2} = & \cdot & w^{(1)}_{2\cdot3} & +w^{(1)}_{2\cdot4} & +\cdots+w^{(1)}_{2\cdot r-1} & +w^{(1)}_{2\cdot r} & +w^{(0)}_{1\cdot2} \\
& 2(r+1)k_{1\cdot3} = & -w^{(1)}_{2\cdot3} & \cdot & +w^{(1)}_{3\cdot4} & +\cdots+w^{(1)}_{3\cdot r-1} & +w^{(1)}_{3\cdot r} & +w^{(0)}_{1\cdot3} \\
& \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots & \vdots & \vdots \\
& 2(r+1)k_{1\cdot r-1} = & -w^{(1)}_{2\cdot r-1} & -w^{(1)}_{3\cdot r-1} & -w^{(1)}_{4\cdot r-1} & -\cdots\quad\cdot & +w^{(1)}_{r-1\cdot r} & +w^{(0)}_{1\cdot r-1} \\
& 2(r+1)k_{1\cdot r} = & -w^{(1)}_{2\cdot r} & -w^{(1)}_{3\cdot r} & -w^{(1)}_{4\cdot r} & -\cdots-w^{(1)}_{r-1\cdot r} & \cdot & +w^{(0)}_{1\cdot r} \\
13) & 2(r+1)k_{2\cdot3} = & \cdot & w^{(2)}_{3\cdot4} & +w^{(2)}_{3\cdot5} & +\cdots+w^{(2)}_{3\cdot r} & +w^{(0)}_{2\cdot3} & +w^{(1)}_{2\cdot3} \\
& 2(r+1)k_{2\cdot4} = & -w^{(2)}_{3\cdot4} & \cdot & +w^{(2)}_{4\cdot5} & +\cdots+w^{(2)}_{4\cdot r} & +w^{(0)}_{2\cdot4} & +w^{(1)}_{2\cdot4} \\
& \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots & \vdots & \vdots \\
& 2(r+1)k_{2\cdot r} = & -w^{(2)}_{3\cdot r} & -w^{(2)}_{4\cdot r} & -w^{(2)}_{5\cdot r} & -\cdots\quad\cdot & +w^{(0)}_{2\cdot r} & +w^{(1)}_{2\cdot r}
\end{array}
$$

u. s. f.

$$
2(r+1)k_{r-1\cdot r}= \quad\cdot\quad w^{(0)}_{r-1\cdot r}+w^{(1)}_{r-1\cdot r}+\cdots+w^{(r-4)}_{r-1\cdot r}+w^{(r-3)}_{r-1\cdot r}+w^{(r-2)}_{r-1\cdot r}
$$

Die k lassen sich hiernach darstellen durch die Formel:

$$
(13^*) \qquad 2(r+1)k_{i\cdot n}=\sum_{\mu=i+1}^{r} w^{(i)}_{n\cdot\mu}+\sum_{\nu=0}^{i-1} w^{(\nu)}_{i\cdot n},
$$

wenn für $n > \mu$

$$
w^{(i)}_{n\cdot\mu} = -\, w^{(i)}_{\mu\cdot n}
$$

und ferner

$$
w^{(i)}_{n\cdot n} = 0
$$

gesetzt wird.

Die w sind nicht unabhängig von einander; da es im $(r+1)$-Eck

überhaupt $\frac{(r+1)r(r-1)}{1\cdot 2\cdot 3}$ Dreiecke giebt, so giebt es mithin zwischen den w

$$\frac{(r+1)r(r-1)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{r(r-1)}{1\cdot 2} = \frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Bedingungsgleichungen, die man wie folgt darstellen kann:

(14) $$w^{(0)}_{\lambda\cdot\mu} + w^{(0)}_{\mu\cdot\nu} - w^{(0)}_{\lambda\cdot\nu} = w^{(\lambda)}_{\mu\cdot\nu} \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 1\cdots r-2\\ \mu = 2\cdots r-1\\ \nu = 3\cdots r\end{pmatrix}$$

wobei stets $\lambda < \mu < \nu$ ist.

Da

$$w^{(x)}_{\lambda\cdot\mu} + w^{(x)}_{\mu\cdot\nu} - w^{(x)}_{\lambda\cdot\nu} = w^{(\lambda)}_{\mu\cdot\nu} \qquad (x = 0\cdots\lambda-1)$$

ist, so hat man auch unter den angegebenen Bedingungen:

$$w^{(0)}_{\lambda\cdot\mu} + w^{(0)}_{\mu\cdot\nu} - w^{(0)}_{\lambda\cdot\nu} = w^{(x)}_{\lambda\cdot\mu} + w^{(x)}_{\mu\cdot\nu} - w^{(x)}_{\lambda\cdot\nu}.$$

Es sei hier noch bemerkt, dafs die Auflösung der aus (2) hergestellten Normalgleichungen die $k_{i\cdot x}$ nicht sofort in der Form (13) giebt; in den Ausdrücken, die man für $k_{i\cdot x}$ erhält, sind die $w^{(\lambda)}_{\mu\cdot\nu}$ der Gleichungen (13) durch die Beziehungen (14) ersetzt.

Bildet man nun das mittlere Fehlerquadrat der Gewichtseinheit vermittelst der Formel

$$\frac{r(r-1)}{1\cdot 2} m^2 = \sum w^{(0)}_{i\cdot x} k_{i\cdot x},$$

so erhält man aus (13), wenn man die Gleichungen (14) berücksichtigt:

(15) $$\begin{aligned}\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}\cdot 2(r+1)m^2 = &\left(w^{(0)}_{1\cdot 2}\right)^2 + \left(w^{(0)}_{1\cdot 3}\right)^2 + \cdots + \left(w^{(0)}_{1\cdot r}\right)^2 \\ &+ \sum_{\lambda=0}^{1}\left(\left(w^{(\lambda)}_{2\cdot 3}\right)^2 + \left(w^{(\lambda)}_{2\cdot 4}\right)^2 + \cdots + \left(w^{(\lambda)}_{2\cdot r}\right)^2\right) \\ &+ \sum_{\lambda=0}^{2}\left(\left(w^{(\lambda)}_{3\cdot 4}\right)^2 + \left(w^{(\lambda)}_{3\cdot 5}\right)^2 + \cdots + \left(w^{(\lambda)}_{3\cdot r}\right)^2\right) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \sum_{\lambda=0}^{r-3}\left(\left(w^{(\lambda)}_{r-2\cdot r-1}\right)^2 + \left(w^{(\lambda)}_{r-2\cdot r}\right)^2\right) \\ &+ \sum_{\lambda=0}^{r-2}\left(w^{(\lambda)}_{r-1\cdot r}\right)^2;\end{aligned}$$

oder

(15*) $$(r+1)r(r-1)m^2 = \sum_{\nu=2}^{r}\sum_{\mu=1}^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{r-2}\left(w^{(\lambda)}_{\mu\cdot\nu}\right)^2,$$

wobei die Summation so zu vollziehen ist, dafs immer

$$\nu > \mu > \lambda$$

ist.

Die Summe der Fehlerquadrate setzt sich also aus den Quadraten der Widersprüche der sämtlichen $\frac{(r+1)r(r-1)}{1\cdot 2\cdot 3}$ Dreiecke des $(r+1)$-Ecks zusammen.

Beispielsweise ist für das *Viereck* nach (9*), (4*), (13) und (15):

$$r = 3$$

$$-v_{0\cdot 1} = v_{1\cdot 0} = \tfrac{1}{8}\left(+w^{(0)}_{1\cdot 2} + w^{(0)}_{1\cdot 3}\right)$$

$$-v_{0\cdot 2} = v_{2\cdot 0} = \tfrac{1}{8}\left(-w^{(0)}_{1\cdot 2} + w^{(0)}_{2\cdot 3}\right)$$

$$-v_{0\cdot 3} = v_{3\cdot 0} = \tfrac{1}{8}\left(-w^{(0)}_{1\cdot 3} - w^{(0)}_{2\cdot 3}\right)$$

$$k_{1\cdot 2} = -v_{1\cdot 2} = v_{2\cdot 1} = \tfrac{1}{8}\left(+w^{(1)}_{2\cdot 3} + w^{(0)}_{1\cdot 2}\right)$$

$$k_{1\cdot 3} = -v_{1\cdot 3} = v_{3\cdot 1} = \tfrac{1}{8}\left(-w^{(1)}_{2\cdot 3} + w^{(0)}_{1\cdot 3}\right)$$

$$k_{2\cdot 3} = -v_{2\cdot 3} = v_{3\cdot 2} = \tfrac{1}{8}\left(+w^{(0)}_{2\cdot 3} + w^{(1)}_{2\cdot 3}\right)$$

$$m^2 = \tfrac{1}{24}\left\{\left(w^{(0)}_{1\cdot 2}\right)^2 + \left(w^{(0)}_{1\cdot 3}\right)^2 + \left(w^{(0)}_{2\cdot 3}\right)^2 + \left(w^{(1)}_{2\cdot 3}\right)^2\right\}.$$

Diesen Wert bekommt man auch, wenn man nach 3 die mittleren Fehlerquadrate für die 6 Kombinationen je zweier Dreiecke des Vierecks bildet und dann aus ihnen das Mittel nimmt.

Für das *Fünfeck* ist

$$r = 4$$

$$-v_{0\cdot 1} = v_{1\cdot 0} = \tfrac{1}{10}\left(+w^{(0)}_{1\cdot 2} + w^{(0)}_{1\cdot 3} + w^{(0)}_{1\cdot 4}\right)$$

$$-v_{0\cdot 2} = v_{2\cdot 0} = \tfrac{1}{10}\left(-w^{(0)}_{1\cdot 2} + w^{(0)}_{2\cdot 3} + w^{(0)}_{2\cdot 4}\right)$$

$$-v_{0\cdot 3} = v_{3\cdot 0} = \tfrac{1}{10}\left(-w^{(0)}_{1\cdot 3} - w^{(0)}_{2\cdot 3} + w^{(0)}_{3\cdot 4}\right)$$

$$-v_{0\cdot 4} = v_{4\cdot 0} = \tfrac{1}{10}\left(-w^{(0)}_{1\cdot 4} - w^{(0)}_{2\cdot 4} - w^{(0)}_{3\cdot 4}\right)$$

$$k_{1\cdot 2} = -v_{1\cdot 2} = v_{2\cdot 1} = \tfrac{1}{10}\left(+w^{(1)}_{2\cdot 3} + w^{(1)}_{2\cdot 4} + w^{(0)}_{1\cdot 2}\right)$$

$$k_{1\cdot 3} = -v_{1\cdot 3} = v_{3\cdot 1} = \tfrac{1}{10}\left(-w^{(1)}_{2\cdot 3} + w^{(1)}_{3\cdot 4} + w^{(0)}_{1\cdot 3}\right)$$

$$k_{1\cdot 4} = -v_{1\cdot 4} = v_{4\cdot 1} = \tfrac{1}{10}\left(-w^{(1)}_{2\cdot 4} - w^{(1)}_{3\cdot 4} + w^{(0)}_{1\cdot 4}\right)$$

$$k_{2\cdot 3} = -v_{2\cdot 3} = v_{3\cdot 2} = \tfrac{1}{10}\left(+w^{(2)}_{3\cdot 4} + w^{(0)}_{2\cdot 3} + w^{(1)}_{2\cdot 3}\right)$$

$$k_{2\cdot 4} = -v_{2\cdot 4} = v_{4\cdot 2} = \tfrac{1}{10}\left(-w^{(2)}_{3\cdot 4} + w^{(0)}_{2\cdot 4} + w^{(1)}_{2\cdot 4}\right)$$

$$k_{3\cdot 4} = -v_{3\cdot 4} = v_{4\cdot 3} = \tfrac{1}{10}\left(+w^{(0)}_{3\cdot 4} + w^{(1)}_{3\cdot 4} + w^{(2)}_{3\cdot 4}\right)$$

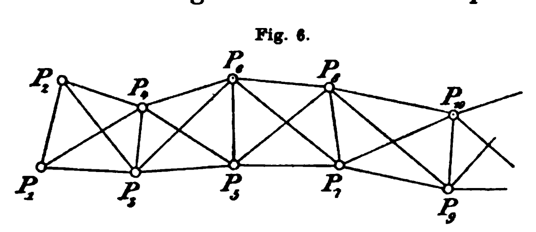
$$m^2 = \tfrac{1}{60}\left\{\left(w^{(0)}_{1\cdot 2}\right)^2 + \left(w^{(0)}_{1\cdot 3}\right)^2 + \left(w^{(0)}_{1\cdot 4}\right)^2 + \left(w^{(0)}_{2\cdot 3}\right)^2 + \left(w^{(0)}_{2\cdot 4}\right)^2 + \left(w^{(0)}_{3\cdot 4}\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(w^{(1)}_{2\cdot 3}\right)^2 + \left(w^{(1)}_{2\cdot 4}\right)^2 + \left(w^{(1)}_{3\cdot 4}\right)^2 + \left(w^{(2)}_{3\cdot 4}\right)^2\right\}.$$

Aus dem Ergebnis der vorstehenden Entwicklung läfst sich schliefsen: Je gröfser in einem Dreiecksnetz die Anzahl der Diagonalen ist, um so eher kann man erwarten, dafs die Ferrerosche Formel, wenn alle Dreieckswidersprüche zu ihrer Ableitung benutzt werden, den mittleren Fehler einer Richtung liefert, wie er unter Voraussetzung gleicher Richtungsgewichte und aus den Winkelgleichungen allein sich ergiebt.

8.

Die Ausgleichung der Dreieckswidersprüche und hier anschliefsend die Bestimmung des mittleren Fehlerquadrats einer Richtung soll nun noch für ein Dreiecksnetz ausgeführt werden, das sich aus einer Folge von Vierecken zusammensetzt, die in einer Richtung aneinandergefügt sind, Fig. 6.

Fig. 6.



In jedem Viereck seien aufser den Seiten auch die Diagonalen gegenseitig beobachtet. Die Anordnung der Messungen sei wieder derart, dafs sämtliche Richtungen gleiches Gewicht haben. Wie vorher soll jedoch bei der Ausgleichung auf die Seitengleichungen keine Rücksicht genommen werden. Das Netz bestehe aus r Vierecken; die Anzahl der unabhängigen Winkelgleichungen ist also $3r$. Die Widersprüche zwischen Rechnung und Beobachtung seien im $i$ten Viereck für die Dreiecke $P_{2i-1}\, P_{2i}\, P_{2i+1}$, $P_{2i-1}\, P_{2i}\, P_{2i+2}$, $P_{2i-1}\, P_{2i+2}\, P_{2i+1}$, $P_{2i} P_{2i+2} P_{2i+1}$ der Reihe nach $w_{i.1}$, $w_{i.2}$, $w_{i.3}$, $w_{i.4}$, wobei $w_{i.1} + w_{i.4} = w_{i.2} + w_{i.3}$ ist.

Man könnte glauben, dafs man am leichtesten zu einem Ausdrucke für das Quadrat des mittleren Richtungsfehlers gelangte, wenn man für jedes Viereck die Winkelgleichungen in möglichst symmetrischer Form ansetzte, also für das erste Viereck z. B.:

$$\varepsilon_{1.2} + \varepsilon_{2.4} - \varepsilon_{3.4} - \varepsilon_{1.3} = + w_{1.1} + w_{1.4} = + w_{1.2} + w_{1.3} = \omega_{1.1}$$
$$\varepsilon_{1.3} - \varepsilon_{2.3} + \varepsilon_{2.4} - \varepsilon_{1.4} = - w_{1.1} + w_{1.2} = - w_{1.3} + w_{1.4} = \omega_{1.2}$$
$$\varepsilon_{1.4} - \varepsilon_{3.4} - \varepsilon_{2.3} - \varepsilon_{1.2} = - w_{1.2} + w_{1.4} = - w_{1.1} + w_{1.3} = \omega_{1.3}$$

u. s. f. für die übrigen Vierecke.

Wie früher ist $\varepsilon_{i.k} = - v_{i.k} + v_{k.i}$ und $v_{i.k}$ die Verbesserung der Richtungsbeobachtung $P_i P_k$.

Indem man alsdann in üblicher Weise die Normalgleichungen und weiter die reduzierten Normalgleichungen bildet, findet man für das

mittlere Fehlerquadrat einer Richtung (ohne Rücksicht auf die Seitengleichungen):

$$\begin{gathered}
3rm^2 = \\
+\tfrac{1}{8}\omega_{1\cdot1}^2+\tfrac{1}{8}\omega_{1\cdot2}^2+\tfrac{1}{8}\omega_{1\cdot3}^2 \\
+\tfrac{1}{112}(\omega_{1\cdot1}+\omega_{1\cdot3}+4\omega_{2\cdot1})^2+\tfrac{1}{8}\omega_{2\cdot2}^2+\tfrac{1}{336}(-2\omega_{1\cdot1}-2\omega_{1\cdot3}-\omega_{2\cdot1}+7\omega_{2\cdot3})^2 \\
+\tfrac{1}{112}(\omega_{2\cdot1}+\omega_{2\cdot3}+4\omega_{3\cdot1})^2+\tfrac{1}{8}\omega_{3\cdot2}^2+\tfrac{1}{336}(-2\omega_{2\cdot1}-2\omega_{2\cdot3}-\omega_{3\cdot1}+7\omega_{3\cdot3})^2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
+\tfrac{1}{112}(\omega_{r-1\cdot1}+\omega_{r-1\cdot3}+4\omega_{r\cdot1})^2+\tfrac{1}{8}\omega_{r\cdot2}^2+\tfrac{1}{336}(-2\omega_{r-1\cdot1}-2\omega_{r-1\cdot3}-\omega_{r\cdot1}+7\omega_{r\cdot3})^2
\end{gathered}$$

Hierin ist noch zu setzen:

$$\omega_{i\cdot1}=w_{i\cdot1}+w_{i\cdot4},\quad \omega_{i\cdot2}=-w_{i\cdot1}+w_{i\cdot2},\quad \omega_{i\cdot3}=-w_{i\cdot2}+w_{i\cdot4}$$

Die Entwicklung scheint jedoch einfacher zu werden, wenn man die Bedingungsgleichungen wie folgt ansetzt:

$$(1)\qquad \begin{aligned}
\varepsilon_{2i-1\cdot2i}+\varepsilon_{2i\cdot2i+1}-\varepsilon_{2i-1\cdot2i+1}&=w_{i\cdot1}\\
\varepsilon_{2i-1\cdot2i}+\varepsilon_{2i\cdot2i+2}-\varepsilon_{2i-1\cdot2i+2}&=w_{i\cdot2}\\
\varepsilon_{2i-1\cdot2i+2}-\varepsilon_{2i+1\cdot2i+2}-\varepsilon_{2i-1\cdot2i+1}&=w_{i\cdot3}\,.
\end{aligned}\qquad (i=1\cdots r)$$

Sind $k_{i\cdot1}$, $k_{i\cdot2}$, $k_{i\cdot3}$ die zugehörigen Korrelaten, so lauten die Normalgleichungen:

$$(2)\qquad \begin{array}{llllll}
\cdot & \cdot & +6k_{1\cdot1}+2k_{1\cdot2} & +2k_{1\cdot3} & & =w_{1\cdot1}\\
\cdot & +2k_{1\cdot1} & +6k_{1\cdot2}-2k_{1\cdot3} & \cdot & & =w_{1\cdot2}\\
+2k_{1\cdot1} & -2k_{1\cdot2} & +6k_{1\cdot3}-2k_{2\cdot1} & -2k_{2\cdot2} & & =w_{1\cdot3}\\
 & -2k_{\mu-1\cdot3} & +6k_{\mu\cdot1}+2k_{\mu\cdot2} & +2k_{\mu\cdot3} & & =w_{\mu\cdot1}\\
-2k_{\mu-1\cdot3} & +2k_{\mu\cdot1} & +6k_{\mu\cdot2}-2k_{\mu\cdot3} & \cdot & & =w_{\mu\cdot2}\\
+2k_{\mu\cdot1} & -2k_{\mu\cdot2} & +6k_{\mu\cdot3}-2k_{\mu+1\cdot1} & -2k_{\mu+1\cdot2} & & =w_{\mu\cdot3}\\
 & -2k_{r-1\cdot3} & +6k_{r\cdot1}+2k_{r\cdot2} & +2k_{r\cdot3} & & =w_{r\cdot1}\\
-2k_{r-1\cdot3} & +2k_{r\cdot1} & +6k_{r\cdot2}-2k_{r\cdot3} & \cdot & & =w_{r\cdot2}\\
+2k_{r\cdot1} & -2k_{r\cdot2} & +6k_{r\cdot3}\quad\cdot & \cdot & & =w_{r\cdot3}
\end{array}$$

$$(\mu=2\cdots(r-1))$$

Den Bau dieser Gleichungen erkennt man leicht aus der Figur. Aus (2) folgt:

$$(3)\qquad \begin{aligned}
12k_{\nu\cdot3}&=-2w_{\nu\cdot1}+2w_{\nu\cdot2}+4w_{\nu\cdot3}+w_{\nu+1\cdot1}+w_{\nu+1\cdot2}\\
&=2(w_{\nu\cdot3}+w_{\nu\cdot4})+w_{\nu+1\cdot1}+w_{\nu+1\cdot2}
\end{aligned}$$

$$(\nu=1\cdots(r-1))$$

und

$$(3^*)\qquad 16k_{r\cdot3}=-2w_{r\cdot1}+2w_{r\cdot2}+4w_{r\cdot3}=2(w_{r\cdot3}+w_{r\cdot4})\,.$$

Damit erhält man auch leicht die übrigen k; allgemein ist

$$\left.\begin{aligned} -4k_{i-1\cdot 3} + 8(k_{i\cdot 1} + k_{i\cdot 2}) \qquad &= w_{i\cdot 1} + w_{i\cdot 2} \\ +4(k_{i\cdot 1} - k_{i\cdot 2}) + 4k_{i\cdot 3} &= w_{i\cdot 1} - w_{i\cdot 2}, \end{aligned}\right\} \quad (i=1\cdots r)$$

wobei $k_{0\cdot 3} = 0$ ist. Also wird

$$(4)\qquad \begin{aligned} 16k_{i\cdot 1} &= 3w_{i\cdot 1} - w_{i\cdot 2} + 4k_{i-1\cdot 3} - 8k_{i\cdot 3} \\ 16k_{i\cdot 2} &= -w_{i\cdot 1} + 3w_{i\cdot 2} + 4k_{i-1\cdot 3} + 8k_{i\cdot 3}. \end{aligned} \quad (i=1\cdots r)$$

Mithin ist, wenn man berücksichtigt, dafs $w_{i\cdot 1} + w_{i\cdot 4} = w_{i\cdot 2} + w_{i\cdot 3}$ ist,

$$(4^*)\qquad \begin{aligned} 48k_{1\cdot 1} &= 7(w_{1\cdot 1} - w_{1\cdot 4}) - (w_{1\cdot 1} + w_{1\cdot 3}) - 2(w_{2\cdot 1} + w_{2\cdot 2}) \\ 48k_{1\cdot 2} &= 7(w_{1\cdot 2} + w_{1\cdot 4}) - (w_{1\cdot 2} - w_{1\cdot 3}) + 2(w_{2\cdot 1} + w_{2\cdot 2}) \\ 48k_{\mu\cdot 1} &= 2(w_{\mu-1\cdot 3} + w_{\mu-1\cdot 4}) + 7(w_{\mu\cdot 1} - w_{\mu\cdot 4}) + (w_{\mu\cdot 2} - w_{\mu\cdot 3}) - 2(w_{\mu+1\cdot 1} + w_{\mu+1\cdot 2} \\ 48k_{\mu\cdot 2} &= 2(w_{\mu-1\cdot 3} + w_{\mu-1\cdot 4}) + 7(w_{\mu\cdot 2} + w_{\mu\cdot 4}) + (w_{\mu\cdot 1} + w_{\mu\cdot 3}) + 2(w_{\mu+1\cdot 1} + w_{\mu+1\cdot 2} \\ & \qquad (\mu = 2\cdots r-1) \\ 48k_{r\cdot 1} &= 2(w_{r-1\cdot 3} + w_{r-1\cdot 4}) + 7(w_{r\cdot 1} - w_{r\cdot 4}) + (w_{r\cdot 2} + w_{r\cdot 4}) \\ 48k_{r\cdot 2} &= 2(w_{r-1\cdot 3} + w_{r-1\cdot 4}) + 7(w_{r\cdot 2} + w_{r\cdot 4}) + (w_{r\cdot 1} - w_{r\cdot 4}). \end{aligned}$$

Wenn die k bekannt sind, lassen sich leicht die Verbesserungen (die durch die Ausgleichung der Winkelgleichungen erhalten werden) berechnen, z. B. ist

$$\begin{aligned} v_{2i-1\cdot 2i} &= +k_{i-1\cdot 3} - k_{i\cdot 1} - k_{i\cdot 2}, & v_{2i\cdot 2i-1} &= -v_{2i-1\cdot 2}, \\ v_{2i-1\cdot 2i+1} &= +k_{i\cdot 1} \qquad + k_{i\cdot 3}, & v_{2i+1\cdot 2i-1} &= -v_{2i-1\cdot 2i+1}. \end{aligned}$$

u. s. w.

Für das mittlere Fehlerquadrat der Gewichtseinheit findet man jetzt zunächst aus der Formel

$$3rm^2 = \sum_1^r \{w_{i\cdot 1}k_{i\cdot 1} + w_{i\cdot 2}k_{i\cdot 2} + w_{i\cdot 3}k_{i\cdot 3}\},$$

wenn man in sie die Werte aus (4) einführt:

$$3rm^2 = \tfrac{1}{16}\sum_1^r (3w_{i\cdot 1}^2 + 3w_{i\cdot 2}^2 - 2w_{i\cdot 1}w_{i\cdot 2}) + 3\sum_1^{r-1} k_{\nu\cdot 3}^2 + 4k_{r\cdot 3}^2.$$

Ersetzt man weiter $k_{\nu\cdot 3}$ und $k_{r\cdot 3}$ durch die Werte aus (3) und (3*), so ergiebt sich:

$$(5)\qquad \begin{aligned} rm^2 = \tfrac{1}{24}\sum_1^r (w_{i\cdot 1} - w_{i\cdot 2})^2 + \tfrac{1}{48}\sum_1^r (w_{i\cdot 1} + w_{i\cdot 2})^2 + \tfrac{1}{48}(w_{r\cdot 3} + w_{r\cdot 4})^2 \\ + \tfrac{1}{144}\sum_1^{r-1} (2w_{i\cdot 3} + 2w_{i\cdot 4} + w_{i+1\cdot 1} + w_{i+1\cdot 2})^2 \end{aligned}$$

oder

$$
(6) \quad \begin{aligned}
rm^2 = & \tfrac{1}{36}\sum_1^r \{(w_{i\cdot 1} + w_{i\cdot 2})^2 + (w_{i\cdot 3} + w_{i\cdot 4})^2 + \tfrac{3}{2}(w_{i\cdot 1} - w_{i\cdot 2})^2\} \\
& + \tfrac{1}{36}\sum_1^{r-1}(w_{i\cdot 3} + w_{i\cdot 4})(w_{i+1\cdot 1} + w_{i+1\cdot 2}) \\
& - \tfrac{1}{144}\{(w_{1\cdot 1} + w_{1\cdot 2})^2 + (w_{r\cdot 3} + w_{r\cdot 4})^2\}.
\end{aligned}
$$

Da aber

$$\tfrac{3}{2}(w_{i\cdot 1} - w_{i\cdot 2})^2 = \tfrac{3}{4}(w_{i\cdot 1} - w_{i\cdot 2})^2 + \tfrac{3}{4}(w_{i\cdot 3} - w_{i\cdot 4})^2$$

ist, so hat man weiter

$$
(7) \quad \begin{aligned}
rm^2 = & \tfrac{1}{144}\{7\sum_1^r (w_{i\cdot 1}^2 + w_{i\cdot 2}^2 + w_{i\cdot 3}^2 + w_{i\cdot 4}^2) \\
& + 2\sum_1^r (w_{i\cdot 1}w_{i\cdot 2} + w_{i\cdot 3}w_{i\cdot 4}) + 4\sum_1^{r-1}(w_{i\cdot 3} + w_{i\cdot 4})(w_{i+1\cdot 1} + w_{i+1\cdot 2}) \\
& - (w_{1\cdot 1} + w_{1\cdot 2})^2 - (w_{r\cdot 3} + w_{r\cdot 4})^2\}.
\end{aligned}
$$

Für $r = 1$ geben die Formeln (5) und (6)

$$(8) \quad m^2 = \tfrac{1}{48}\{(w_{1\cdot 1} + w_{1\cdot 2})^2 + (w_{1\cdot 3} + w_{1\cdot 4})^2 + 2(w_{1\cdot 1} - w_{1\cdot 2})^2\}$$

oder da $w_{1\cdot 1} - w_{1\cdot 2} = w_{1\cdot 3} - w_{1\cdot 4}$ ist,

$$m^2 = \tfrac{1}{24}(w_{1\cdot 1}^2 + w_{1\cdot 2}^2 + w_{1\cdot 3}^2 + w_{1\cdot 4}^2),$$

welche Formel sich aus (7) unmittelbar ergiebt; vergl. auch S. 191.

Die internationale Näherungsformel nimmt nun für das mittlere Fehlerquadrat einer Richtung in dem hier vorausgesetzten Netze den Wert an:

$$rm_F^2 = \tfrac{1}{24}\sum_1^r (w_{i\cdot 1}^2 + w_{i\cdot 2}^2 + w_{i\cdot 3}^2 + w_{i\cdot 4}^2).$$

Es ist mithin

$$
\begin{aligned}
(m^2 - m_F^2) = & \tfrac{1}{144}\sum_1^{r-1}\{(w_{i\cdot 3} + w_{i\cdot 4})^2 + (w_{i+1\cdot 1} + w_{i+1\cdot 2})^2 + 4(w_{i\cdot 3} + w_{i\cdot 4})(w_{i+1\cdot 1} + w_{i+1\cdot 2})\} \\
= & \tfrac{1}{288}\sum_1^{r-1}\{3(w_{i\cdot 3} + w_{i\cdot 4} + w_{i+1\cdot 1} + w_{i+1\cdot 2})^2 - (w_{i\cdot 3} + w_{i\cdot 4} - w_{i+1\cdot 1} - w_{i+1\cdot 2})^2\}.
\end{aligned}
$$

Die Formel (9) zeigt, dafs, wenn sämtliche w das *gleiche* Vorzeichen haben, die internationale Näherungsformel zu kleine Werte giebt.

Ist im besonderen

$$w_{i\cdot 1} = w_{i\cdot 2} = w_{i\cdot 3} = w_{i\cdot 4} = w,$$

so ist

$$m_F^2 = \frac{1}{6} w^2; \quad m^2 - m_F^2 = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6r}\right) w^2.$$

Ist

$$w_{i\cdot 1} = w_{i\cdot 2} = + w, \quad w_{i\cdot 3} = w_{i\cdot 4} = - w,$$

so wird

$$m_F^2 = \frac{1}{6} w^2; \quad m^2 - m_F^2 = \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{18r}\right) w^2.$$

Ist

$$+ w_{i\cdot 1} = - w_{i\cdot 2} = + w_{i\cdot 3} = - w_{i\cdot 4} = w,$$

so wird

$$m_F^2 = \frac{1}{6} w^2; \; m^2 - m_F^2 = 0.$$

Und ist endlich noch

$$w_{i\cdot 1} = w, \quad w_{i\cdot 2} = 2w, \quad w_{i\cdot 3} = 3w, \quad w_{i\cdot 4} = 4w,$$

so ist

$$m_F^2 = \frac{5}{4} w^2; \quad m^2 - m_F^2 = \frac{71}{72}\left(1 - \frac{1}{r}\right) w^2.$$

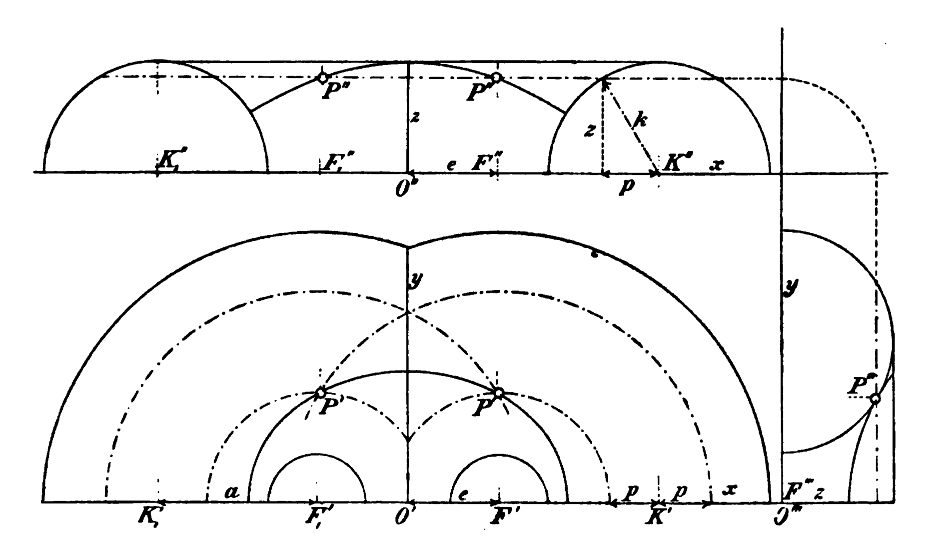
Über die Schnittkurve zweier kongruenten Ringflächen und ihr Zerfallen in Kreise.

Von C. Rodenberg in Hannover.

Die Ringfläche, d. h. die Fläche, welche durch Rotation eines Kreises um eine beliebige Gerade seiner Ebene entsteht, wird bekanntlich von jeder sie zweipunktig berührenden Ebene in zwei Kreisen geschnitten. Die elementaren Beweise dieses Satzes sind nicht einfach, weshalb hier ein anderer mitgetheilt werden soll, bei dem unmittelbar die orthogonalen Projektionen der Kreise auf eine zur Rotationsachse senkrechte Ebene als Ellipsen erkannt werden, deren einer Brennpunkt die Projektion der Achse ist. Aus der Gleichwertigkeit der Brennpunkte schliefsen wir, dafs durch jeden solchen Kreis noch eine zweite, der ersten kongruente Ringfläche hindurchgeht, deren Achse sich in den anderen Brennpunkt projiziert. Es ist damit nahe gelegt, die Schnittkurve zweier kongruenten Ringflächen mit gemeinschaftlicher mittlerer Parallelkreis-Ebene zu untersuchen und darauf die in Rede stehende besondere Lage herzustellen.

Die aus der Verbindung beider Flächen bestehende Figur besitzt drei zu einander senkrecht stehende Symmetrie-Ebenen, parallel zu denen wir die Projektions- und Koordinaten-Ebenen der xy, xz, yz stellen. Die Schnittkurve zerfällt in 3 Teile: 1) in den zur x-Achse

senkrechten Symmetrie-Schnitt, eine Kurve 4. Ordnung, 2) in den vierfach zählenden imaginären Kugelkreis, als Doppelkurve jeder Fläche, 3) in die uns beschäftigende Restkurve von der Ordnung $4^2 - 4 - 2 \cdot 4 = 4$. Durch diese Kurve gehen drei doppelt projizierende Cylinder 2. Ordnung, sie ist folglich Basiskurve eines Flächenbüschels 2. Ordnung, dessen Polartetraeder aus den drei Symmetrie-Ebenen und der unendlich fernen besteht. Da die 4 Schnittpunkte dieser Ebene mit der Basis-



kurve auf dem Kugelkreise liegen, so enthält der Büschel eine Kugel, deren Mittelpunkt der Ursprung $O(O'O''O''')$ ist. *Die Durchschnittskurve ist demnach ein sphärischer Kegelschnitt, welcher im Falle einer zweimaligen Berührung der Flächen (auf der x-Achse) in zwei Kreise zerfällt.*

Zur Erbringung eines elementaren Beweises des Erkannten seien $F(F'F''F''')$ und F_1 die Mittelpunkte der Flächen im Abstande $2e$, sei k der Halbmesser ihrer Meridiane mit den Mittelpunkten K und K_1, a der Halbmesser $FK = F_1K_1$ der Kreise, welche von K und K_1 bei der Erzeugung der Flächen beschrieben werden. — Eine zur Konstruktion von Kurvenpunkten in der Höhe z gelegte Ebene schneidet jede Fläche in zwei Kreisen von den Halbmessern $a + p$ und $a - p$ ($p^2 = k^2 - z^2$). Die Schnittpunkte gleichgroſser Kreise liegen in der Symmetrie-Ebene senkrecht zur x-Achse, sie scheiden aus der Betrachtung aus, aber für die anderen, die Punkte P unserer Kurve ist

$$P'F' + P'F_1' = (a + p) + (a - p) = 2a$$

d. h. ihr Grundriſs ist eine Ellipse, welche $F'F_1'$ zu Brennpunkten hat und deren groſse Achse gleich dem Durchmesser des vom Meridian-

Mittelpunkte beschriebenen Kreises, also ganz unabhängig von der Entfernung der Rotationsachsen ist.

Wir denken hierbei nur an reelle Schnittkurven, setzen also voraus, dafs $e \leqq a$ ist; ist $e > a$, so wird die Projektion zwar eine reelle Hyperbel mit der reellen Achse $2a$, aber die Raumkurve wird imaginär.

Zur Ermittelung des Abstandes $OP = \varrho$ gehen wir aus von der Länge seiner Horizontalprojektion $r = O'P'$, oder besser seines Quadrates. Es ist für $P'(x, y)$:

$$(x - e)^2 + y^2 = (a - p)^2$$
$$(x + e)^2 + y^2 = (a + p)^2$$

d. h.

$$x^2 + y^2 = r^2 = a^2 - e^2 + p^2,$$

folglich

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 = a^2 - e^2 + k^2.$$

Die Kurve liegt also auf einer Kugel vom Halbmesser

$$\varrho = \sqrt{a^2 - e^2 + k^2},$$

und ergiebt sich als deren Durchschnitt mit dem zur Grundrifsebene senkrechten Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1.$$

Wird nun $e = k$, so wird $\varrho = a$, die beiden Flächen berühren sich doppelt und die Kurve zerfällt in zwei Kreise vom Halbmesser a, die Wechselschnitte des Cylinders. Der Neigungswinkel α ihrer Ebenen gegen die Horizontale ist gegeben durch $\cos\alpha = \pm \frac{\sqrt{a^2 - e^2}}{a}$.

Es möge noch der Flächenbüschel

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 - e^2 + k^2) - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1\right) = 0$$

mit seinen vier Kegeln betrachtet werden.

Für $\lambda = + a^2$ ergiebt sich der hyperbolische Cylinder senkrecht zur Seitenebene yz:

$$y^2 = \frac{(z^2 + e^2 - k^2)(a^2 - e^2)}{e^2},$$

für $\lambda = a^2 - e^2$ der elliptische Cylinder senkrecht zur Aufrifsebene xz

$$\frac{x^2}{(ak : e)^2} + \frac{z^2}{k^2} = 1,$$

endlich für $\lambda = a^2 - e^2 + k^2$ der vierte „Kegel" mit dem Scheitel O:

$$\frac{x^2}{a^2 : (e^2 - k^2)} - \frac{y^2}{(a^2 - e^2) : k^2} + z^2 = 0.$$

Wird nun wieder $e = k$, so zerfallen dieser Kegel und der hyperbolische Cylinder in das Ebenenpaar

$$\frac{z}{y} = \frac{k}{\pm\sqrt{a^2 - k^2}} = \operatorname{tg}\alpha,$$

welches die oben gefundenen Kreise enthält.

Der Kegel wird andererseits zum Rotationskegel, wenn seine Gleichung zwei gleiche Koeffizienten aufweist. Sei

$$a^2 : (e^2 - k^2) = -(a^2 - e^2) : k^2 \quad \text{oder} \quad e^2(a^2 - e^2 + k^2) = 0.$$

Das Verschwinden des zweiten Faktors macht den Kegel zur Nullkugel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, die Basiskurve ist imaginär. Für $e = 0$ rücken die Flächen einander unendlich nahe, der Kegel wird zum reellen Rotationskegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{k^2} = 0,$$

welcher die Berührungskreise der beiden Doppeltangential-Ebenen $z = \pm k$ enthält, und es ist auch leicht zu übersehen, daſs im Grenzfalle die Schnittkurve in diese beiden Kreise zerfällt, ebenso, daſs in keinem anderen Falle ein reeller Rotationskegel durch die Kurve hindurchgehen kann.

Über die Schnittpunkte einer Ellipse mit einer ihr coaxialen Ellipse oder Hyperbel.

Von C. Rodenberg in Hannover.

Behufs Bestimmung dieser Punkte führt man durch affine Verwandlung der Figur die Ellipse in einen dem bleibenden Kegelschnitt konzentrischen Kreis über, schneidet beide Kurven mit einander und kehrt wieder zur ursprünglichen Figur zurück. In der Weise ist die Aufgabe für zwei Ellipsen in den Lehrbüchern der „Darstellenden Geometrie" von Wiener Bd. II. S. 279, Peschka Bd. III. S. 621, Rohn u. Papperitz Bd. I, erste Auflage, § 29 gelöst worden. Die folgende Lösung der reduzierten Aufgabe führt auf die Längen der Radienvektoren aus den Brennpunkten, welche zu den Schnittpunkten gehören.

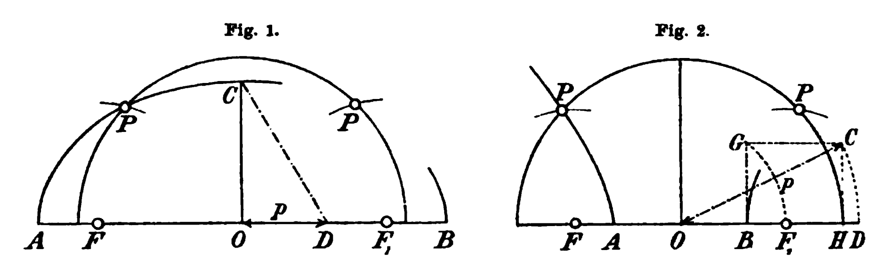
In der vorstehenden Note ist für das Quadrat r^2 der Entfernung eines Ellipsenpunktes vom Mittelpunkt der Ausdruck

$$r^2 = a^2 - e^2 + p^2$$

gefunden worden, worin a und e wie üblich, die halbe Hauptachse und Exzentrizität; $a+p$ und $a-p$ die Entfernungen des Punktes von den Brennpunkten sind. Ist r als Halbmesser des vorliegenden Kreises gegeben, so folgt

$$p^2 = r^2 - (a^2 - e^2) = r^2 - b^2.$$

Man bilde daher (Fig. 1) aus der halben Nebenachse $OC = b$ als Kathete, und $CD = r$ als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck, dann ist dessen zweite Kathete $OD = p$ und ferner $DB_{\imath} = a - p$, $DA = a + p$.



Die Kreise mit diesen Radien um die Brennpunkte F und F_1 beschrieben, schneiden sich in den gesuchten Punkten; aber es bedarf nur der Verzeichnung der beiden Kreise mit *einem* der Radien, da schon der gegebene Kreis um O die Punkte dann ausschneidet.

Liegt (Fig. 2) eine Hyperbel vor, so bleibt der Ausdruck für r^2 ganz ungeändert, da nur Quadrate auftreten, es ist aber $a^2 - e^2$ jetzt negativ. Wir schreiben daher

$$p^2 = r^2 + (e^2 - a^2) = r^2 + b^2,$$

wo $b = BG = HC$ die imaginäre Achse der Hyperbel ist. In dem zu bildenden rechtwinkligen Dreieck OCH sind dann $OH = r$ und $HC = b$ Katheten, $OC = p = OD$ ist Hypotenuse geworden und die Kreise mit den Halbmessern $BD = p - a$ und $AD = p + a$ um F und F_1 beschrieben (einer von ihnen reicht wieder aus) bestimmen die gesuchten Punkte.

Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche.

Von E. Zermelo in Göttingen.

(Erste Mitteilung.)

Die hier vorliegende Arbeit versucht es, die Strömung einer inkompressibelen, reibungslosen (zweidimensionalen) Flüssigkeit in einer Kugelfläche einer ebenso systematischen Theorie zu unterwerfen, wie sie für ebene Strömungen bereits existiert und namentlich in Poincarés „Théorie des tourbillons" (1893) ziemlich vollständig dargestellt ist. Eine solche Untersuchung ist schon an und für sich von geometrischem Interesse, zumal sich auf der Kugel vieles im Endlichen abspielt, was in der Ebene oft im Unendlichen wenigstens für die Anschauung verloren geht. Sodann ist es nicht unmöglich, dafs es auf diesem Wege auch gelingen könnte, über manche Vorgänge bei der Fortpflanzung der atmosphärischen Cyklonen, sowie der Meeresströmungen, soweit sie das Erdganze betreffen und soweit die Vertikalkomponente der Strömung gegen die Horizontalkomponenten vernachlässigt werden kann, einigen Aufschlufs zu erhalten. Freilich ist dieser geophysikalische Gesichtspunkt, der mir die erste Anregung zu dieser Arbeit gegeben hat, bei der weiteren Durchführung gegenüber den rein geometrisch-analytischen Problemen und Methoden mehr in den Hintergrund getreten. Dabei ist es mein Bestreben gewesen, die Darstellung möglichst einheitlich und unabhängig von fremdartigen Voraussetzungen zu gestalten. Der ganzen Entwickelung liegen ausschliefslich die hydrodynamischen Hauptgleichungen in orthogonalen Flächenkoordinaten zu grunde, die gleich im Anfange eingeführt werden, und alle von mir gegebenen litterarischen Citate dienen lediglich als Quellennachweis oder zur Vergleichung.

Unter diesem Gesichtspunkte ist die von Kirchhoff zuerst auf das Problem angewandte stereographische Abbildung der Kugel auf die Ebene hier nur beiläufig benutzt worden, obwohl sich mit ihrer Hilfe verschiedene Eigenschaften der Ebene auf die Kugel übertragen lassen, die bei mir direkt hergeleitet werden (cf. Lamb Hydrodynamics p. 114, p. 253). Diese Methode der Abbildung ist hier eben keine prinzipielle, sondern nur von beschränkter Anwendbarkeit; sie bezieht sich nur auf das jeweilige momentane Vektorfeld, aber nicht auch auf die Bewegung der Wirbel, auf den zeitlichen Verlauf der Erscheinung. So ist namentlich das Problem der stationären Strömung (II § 4) durchaus nicht durch

Abbildung zu lösen, und vollends das „Gleichgewichtsproblem“ der Strudel (K. III §§ 6 u. 7) hat in der Ebene überhaupt kein Analogon. — Aus demselben Grunde ist auch auf die elektromagnetische Deutung hier keine Rücksicht genommen. Diese Analogie gilt nur in Bezug auf mögliche Strömungszustände, nicht auf ihre zeitliche Veränderung, die vielmehr der Hydrodynamik ganz charakteristisch ist.

Der Kern der hier verwendeten Methode ist in dem Begriffe des „einfachen Strudels“ zu suchen (cf. II § 2): d. h. eines isolierten Strudelpunktes bei konstanter (von 0 verschiedener) Wirbeldichte (Curl) auf der ganzen übrigen Kugel, während die früheren Autoren meines Wissens immer nur Strudelpunkte (unendlich dünne Wirbel) in sonst wirbelfreier Flüssigkeit betrachtet hatten. Auf diesem Begriffe ruhen fast alle weiteren Entwickelungen und verdanken ihm ihre zwanglose Formulierung bei Vermeidung störender Nebenbedingungen.

Das im letzten Kapitel behandelte „Problem der drei Strudel“ als eine spezielle Anwendung der vorausgehenden allgemeinen Theorie dürfte namentlich interessieren durch eine gewisse formale Analogie mit dem Kreiselproblem und eine geometrische mit dem astronomischen „Dreikörperproblem“.

Kapitel I.

Die Flüssigkeitsbewegung auf einer beliebigen Fläche.

§ 1. Die Grundgleichungen in Gaufsschen Koordinaten.

Sind u und v krummlinige Koordinaten auf einer gegebenen Fläche und E, F, G die bekannten Gaufsschen Fundamentalgröfsen, so ist der Ausdruck für das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

und daher die lebendige Kraft eines Punktes von der Masse m, welcher sich auf der Fläche bewegt:

$$T = \frac{m}{2}q^2 = \frac{m}{2}(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2),$$

wenn u', v' die nach der Zeit t genommenen Ableitungen von u, v bedeuten. Ist ferner $m\Phi$ das Potential der wirkenden Kräfte, so nehmen die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen (zweiter Art) für unseren Fall die Form an

$$m\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \frac{m}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial u}u'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}u'v' + \frac{\partial G}{\partial u}v'^2\right) = -m\frac{\partial \Phi}{\partial u}$$

$$m\frac{d}{dt}(Fu' + Gv') - \frac{m}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial v}u'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial v}u'v' + \frac{\partial G}{\partial v}v'^2\right) = -m\frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Wählt man orthogonale Koordinaten u, v, so wird $F = 0$ und man kann setzen:

$$E = \frac{1}{U^2}, \quad G = \frac{1}{V^2},$$

also

$$ds^2 = \frac{du^2}{U^2} + \frac{dv^2}{V^2}.$$

Dann werden

$$\bar{u} = \frac{u'}{U} \quad \text{und} \quad \bar{v} = \frac{v'}{V}$$

die wahren Geschwindigkeitskomponenten in der Richtung der Koordinaten u, v, also:

$$(a) \qquad u' = \frac{du}{dt} = U\bar{u}, \quad v' = \frac{dv}{dt} = V\bar{v},$$

und unsere Bewegungsgleichungen werden:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{u}}{U}\right) + \frac{\bar{u}^2}{U}\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\bar{v}^2}{V}\frac{\partial V}{\partial u} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{v}}{V}\right) + \frac{\bar{u}^2}{U}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\bar{v}^2}{V}\frac{\partial V}{\partial v} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial v}. \end{aligned}$$

Da nun aber

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{u}}{U}\right) &= \frac{1}{U}\frac{d\bar{u}}{dt} - \frac{\bar{u}}{U^2}\left(\frac{\partial U}{\partial u}U\bar{u} + \frac{\partial U}{\partial v}V\bar{v}\right), \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{v}}{V}\right) &= \frac{1}{V}\frac{d\bar{v}}{dt} - \frac{\bar{v}}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial u}U\bar{u} + \frac{\partial V}{\partial v}V\bar{v}\right), \end{aligned}$$

so kann man den Gleichungen (1) auch die Form geben:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} - \bar{v}W &= -U\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \\ \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{u}W &= -V\frac{\partial \Phi}{\partial v}, \end{aligned}$$

wenn

$$W = \frac{V}{U}\frac{\partial U}{\partial v}\bar{u} - \frac{U}{V}\frac{\partial V}{\partial u}\bar{v}$$

gesetzt wird.

Diese Differentialgleichungen gelten zunächst nur für einen einzigen materiellen Punkt m. Sie behalten aber ihre Form, wenn man zu einer kontinuierlichen Verteilung von Massenpunkten auf der Fläche, d. h. zu einer reibungslosen zweidimensionalen Flüssigkeit übergeht. Nur hat dann an Stelle von m die variable Flächendichte k zu treten, und das auf die Flächeneinheit bezogene Potential der Massenkräfte $k\Phi$ ist noch um eine Funktion $p = p(u, v)$ des Ortes auf der Fläche zu vermehren, welche von der gegenseitigen Beeinflussung der materiellen Punkte herrührt und der Druck der Flüssigkeit genannt wird; pds ist dann immer die auf das Linienelement ds normal wirkende Kraft. Be-

merkt sei nur noch, daſs wir gleichfalls zu den aufgestellten Grundgleichungen gelangen, wenn wir die Strömung einer dreidimensionalen Flüssigkeit längs eines Systems von Parallelflächen betrachten und dann die Entfernung der beiden Grenzflächen, also die Dicke der Flüssigkeitsschicht an der Grenze null werden lassen. — Ist nun der Druck, wie im Folgenden vorausgesetzt werden soll, eine Funktion der Dichte k allein, so können wir setzen

$$\int \frac{dp}{k} = P \quad \text{(die „Druckfunktion")},$$

also

$$\frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial u}, \quad \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial v},$$

und die Differentialgleichungen (1), (2) gelten auch für unsere Flüssigkeit wenn wir setzen:

$$\Phi = P + \Phi_1,$$

wo Φ_1 die wahre Potentialfunktion der Massenkräfte, bezogen auf die Masseneinheit, bedeutet.

Bisher haben wir nur die zeitliche Veränderung der Geschwindigkeitskomponenten $\frac{d\bar{u}}{dt}$, $\frac{d\bar{v}}{dt}$ durch die Potentialverteilung Φ und die Geschwindigkeiten $\bar{u}$, $\bar{v}$ selbst ausgedrückt. Wir können aber auch die Geschwindigkeitsveränderung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$ an einer bestimmten Stelle u, v der Fläche einführen, indem wir die Beziehungen benutzen

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\,U\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \bar{v}\,V\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\,U\frac{\partial \bar{v}}{\partial u} + \bar{v}\,V\frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{cases} \quad \text{(cf. (a))},$$

und erhalten so aus (2)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + U\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\right) - \bar{v}\,UV\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\bar{v}}{V}\right) + \bar{v}\,UV\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\bar{u}}{U}\right) = -\,U\frac{\partial \Phi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + V\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial v}\right) + \bar{u}\,UV\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\bar{v}}{V}\right) - \bar{u}\,UV\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\bar{u}}{U}\right) = -\,V\frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

Berücksichtigt man hier, daſs

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial q^2}{\partial u},$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial q^2}{\partial v},$$

und setzt weiter:

$$\text{(c)} \qquad 2\varrho = UV\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\bar{v}}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\bar{u}}{U}\right)\right\}$$

(ϱ ist die Rotation um die Flächennormale, der „Curl" oder die „Wirbeldichte" cf. § 2), so kommt schliefslich:

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{\partial \bar u}{\partial t} = \quad 2\bar v \varrho - U\frac{\partial}{\partial u}(\Phi + \frac{1}{2}q^2), \\ \frac{\partial \bar v}{\partial t} = -2\bar u \varrho - V\frac{\partial}{\partial v}(\Phi + \frac{1}{2}q^2). \end{cases}$$

Satz: Die zeitliche Veränderung des Geschwindigkeitsvektors an einer Stelle der Fläche setzt sich zusammen aus zwei Komponenten, deren eine gleich dem doppelten Produkt aus der Wirbeldichte ϱ und der Geschwindigkeit ist und auf der Geschwindigkeitsrichtung senkrecht steht, und deren andere an Richtung und Gröfse gleich dem Gefälle der Funktion χ ist, die sich additiv zusammensetzt aus dem halben Geschwindigkeitsquadrate der Druckfunktion P und event. der Potentialfunktion Φ_1 der wirkenden Massenkräfte.

(Den Spezialfall für die Ebene ($U = 1$, $V = 1$) vergl. bei Lamb, Hydrodynamics p. 226.)

§ 2. Der Massenflufs und die Inkompressibilität.

Unter dem „Massenflufs" $K_{\mathfrak{C}}$ durch ein gegebenes Kurvenstück $\mathfrak{C}$ verstehen wir bei stationärer Strömung die Gesamtmasse der Flüssigkeit, welche in der Zeiteinheit das Kurvenstück in einem bestimmten Sinne durchströmt. Ist die Strömung nicht gerade stationär, so haben wir die in der Zeit τ durchströmende Masse durch τ zu dividieren und für $\tau = 0$ zur Grenze überzugehen. So erhalten wir den Ausdruck

$$(a)\qquad K_{\mathfrak{C}} = \int^{(\mathfrak{C})} k q_n ds,$$

wenn das Integral über das Kurvenstück $\mathfrak{C}$ mit der variablen Bogenlänge s erstreckt wird und q_n die Geschwindigkeitskomponente in der positiv gerechneten Normalen n der Kurve bezeichnet. In unseren orthogonalen Koordinaten u, v ist aber

$$(b)\qquad q_n = \frac{\bar v}{U}\frac{du}{ds} - \frac{\bar u}{V}\frac{dv}{ds};$$

und damit diese Gleichung auch das Vorzeichen von q_n immer richtig bestimmt, wollen wir im Folgenden immer als „positive" Kurvennormale diejenige Richtung (in der Tangentialebene der Fläche) bezeichnen, welche zur Fortschreitungsrichtung ds auf der Kurve ebenso liegt, wie die v-Richtung zur u-Richtung, also nach *links*, wenn wir, von einer bestimmten Seite auf die Fläche blickend, das uv-Koordinatensystem ebenso zeichnen wollen wie in der Ebene gewöhnlich das xy-System.

Es wird also immer:

$$K_{\mathfrak{C}} = \int^{(\mathfrak{C})} k\left(\frac{\bar{v}}{U}du - \frac{\bar{u}}{V}dv\right), \tag{c}$$

wobei aber auch der Sinn angegeben werden mufs, in welchem $\mathfrak{C}$ durchlaufen werden soll.

Besonders wichtig ist der Fall, wo die Kurve $\mathfrak{C}$ *geschlossen* ist, ohne sich selbst zu durchschneiden, und ein endliches Flächenstück C so einschliefst, dafs die positive (linke) Normale immer nach innen weist; wir sagen dann, die Begrenzung von C werde „im positiven Sinne" durchlaufen. Dann ist $K = K_{\mathfrak{C}}$ der Gesamtbetrag der in der Zeiteinheit in das Flächenstück C einströmenden Masse, also auf Grund des Prinzips der Konstanz der Materie gleich der gesamten zeitlichen Massenvermehrung in C, d. h. gleich dem Flächenintegrale

$$\int^{(C)} \frac{\partial k}{\partial t} d\sigma = \int^{(C)} \frac{\partial k}{\partial t} \frac{du}{U} \frac{dv}{V},$$

wenn mit $d\sigma$ das Flächenelement bezeichnet wird.

Nun läfst sich aber das Linienintegral K auch rein formal in ein Flächenintegral verwandeln:

$$K = \int^{(\mathfrak{C})} k\left(\frac{\bar{v}}{U}du - \frac{\bar{u}}{V}dv\right) = -\int^{(C)} du\,dv \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k\bar{u}}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k\bar{v}}{U}\right)\right\}. \tag{1}$$

Setzen wir diesen Ausdruck für K gleich dem eben gefundenen für die Massenvermehrung, so wird

$$\int^{(\mathfrak{C})} du\,dv \left\{\frac{1}{UV}\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k\bar{u}}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k\bar{v}}{U}\right)\right\} = 0,$$

und zwar für ein ganz beliebiges Flächenstück C, also mufs auch der Integrandus verschwinden, und wir erhalten die sogen. „Kontinuitätsbedingung":

$$\frac{1}{UV}\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k\bar{u}}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k\bar{v}}{U}\right) = 0, \tag{2}$$

welche als dritte Grundgleichung zu jedem der Gleichungspaare (1), (2) oder (3) in § 1 hinzuzuziehen ist.

Für eine „homogene und inkompressibele" Flüssigkeit ist nun k der Definition nach in Raum und Zeit *konstant* und zwar, wie wir annehmen wollen, $= 1$, und wir gewinnen aus (2) die „Inkompressibilitätsbedingung"

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\bar{u}}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\bar{v}}{U}\right) = 0. \tag{3}$$

In diesem Falle ist für jede *geschlossene* Kurve $\mathfrak{C}$ das Integral

$$K_{\mathfrak{C}} = \int^{(\mathfrak{C})} \left(\bar{v} \frac{du}{U} - \bar{u} \frac{dv}{V} \right) = 0$$

und daher für jedes *offene* Kurvenstück $\mathfrak{C} = \widehat{AB}$ der Massenflufs $K_{\mathfrak{C}}$ ganz unabhängig von der Gestalt des Verbindungsweges zwischen A und B, so dafs wir einfach von dem Massenflufs $K = K_{AB}$ „zwischen A und B“ oder „von A nach B“ reden können.

Wählen wir daher einen beliebigen festen Punkt O unserer Fläche zum Anfangspunkt, so hat für jeden anderen Flächenpunkt $P \equiv P(u, v)$ unser Integral

$$K_{OP} = \int_{(O)}^{(P)} \left(\bar{v} \frac{du}{U} - \bar{u} \frac{dv}{V} \right) = \psi(u, v) \tag{1a}$$

einen ganz bestimmten nur von den Koordinaten u, v von P abhängigen Wert, den wir als die *„Stromfunktion“* $\psi(u, v)$ im Punkte P bezeichnen wollen. Bei einer Veränderung des Anfangspunktes O ändert sich diese Funktion offenbar nur um eine additive Konstante. Die partiellen Ableitungen der Stromfunktion sind dann gegeben durch:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial u} = \dfrac{\bar{v}}{U}, \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial v} = -\dfrac{\bar{u}}{V} \quad \text{oder} \\ \bar{u} = -V \dfrac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \bar{v} = +U \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \end{cases} \tag{4}$$

und daher:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= U\bar{u} = -UV \frac{\partial \psi}{\partial v}, \\ \frac{dv}{dt} &= V\bar{v} = +UV \frac{\partial \psi}{\partial u}. \end{aligned} \tag{4a}$$

Die ganze Geschwindigkeitsverteilung ist also vollständig bestimmt durch die einzige Funktion $\psi(u, v)$, wodurch alle Untersuchungen über inkompressible Flüssigkeiten in der Fläche wesentlich vereinfacht werden.

Auf den Kurven $\psi = \text{const}$ ist nach der Definition (1a) von $K = \psi(u, v)$ überall $q_n = 0$, d. h. die Geschwindigkeit tangential gerichtet; sie werden als „Stromlinien“ bezeichnet.

Die absolute Eindeutigkeit und Stetigkeit der Stromfunktion ψ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Flüssigkeit auf unserer Fläche inkompressibel und in sich abgeschlossen ist. Die „Inkompressibilitäts-Bedingung“ (3) dagegen bezieht sich nur auf die regulären Punkte und kann an Stellen, wo die Geschwindigkeit unstetig, z. B. unendlich wird, oder eine der Gröfsen U, V verschwindet, ihre

Bedeutung verlieren. Ist dies etwa in einem einzelnen Punkt P_1 der Fall, während sonst überall die Bedingung (3) erfüllt ist, so hätte zwar der Massenflufs K_C, wo C eine beliebige, P_1 einschliefsende geschlossene Kurve sein kann, einen bestimmten von der Gestalt von C unabhängigen Wert, dieser könnte aber von Null verschieden sein und würde dann die Masseneinströmung in diesen Punkt P_1 angeben; es wäre ein „Quellpunkt“ oder ein „Senkpunkt“ (oder „Abflufspunkt“), je nachdem K_C negativ oder positiv wäre, und ein Verzweigungspunkt der Stromfunktion. Doch wollen wir im Folgenden solche Fälle ausschliefsen und uns auf den Fall einer absolut eindeutigen Stromfunktion beschränken.

§ 3. Die Zirkulation und das Wirbelmoment. Das Geschwindigkeitspotential.

Ebenso wie im vorigen Paragraphen das Integral $K = \int k q_n ds$ betrachten wir jetzt das Integral

$$2 R_{\mathfrak{C}} = \int^{(\mathfrak{C})} q_s ds,$$

wo q_s die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung ds bezeichnet, und zwar nehmen wir sogleich den Fall, wo $\mathfrak{C}$ eine geschlossene, sich selbst nicht schneidende Kurve ist und in positivem Sinne durchlaufen wird. Dann wird das Integral die „Zirkulation in der Kurve $\mathfrak{C}$“ genannt. Es ist aber

(a) $$q_s = \frac{\bar{u}}{U}\frac{du}{ds} + \frac{\bar{v}}{V}\frac{dv}{ds},$$

also wird:

(1) $$2 R_{\mathfrak{C}} = \int^{(\mathfrak{C})} q_s ds = \int^{(\mathfrak{C})} \left(\frac{\bar{u}}{U} du + \frac{\bar{v}}{V} dv\right) = \int\int^{(C)} \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\bar{v}}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\bar{u}}{U}\right)\right\} du dv = \int^{(C)} 2 \varrho d\sigma,$$

wenn C das von $\mathfrak{C}$ eingeschlossene Flächenstück mit dem Flächenelement $d\sigma$ bezeichnet und

(b) $$2\varrho = UV\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\bar{v}}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\bar{u}}{U}\right)\right\}$$

gesetzt wird.

$R_{\mathfrak{C}} = \int^{(C)} \varrho d\sigma$ wird auch das „Wirbelmoment von C“ und ϱ die „Wirbeldichte“ im Punkt u, v genannt, die letztere ist nichts anderes als die Rotationskomponente des Flüssigkeitsteilchens um die Flächennormale als Achse. Der Ausdruck ist bereits im ersten Paragraphen ((c) p. 204) zur Vereinfachung der Gleichungen (3) eingeführt worden. Aus der Definition (a) und der Relation (1) ergiebt sich ohne weiteres

Satz I. *Das Wirbelmoment eines Flächenstückes ist gleich der Summe der Wirbelmomente seiner Teile.*

(Vorausgesetzt ist dabei, dafs in den Teilkurven selbst die Geschwindigkeit keinen Sprung erleidet. Solche Diskontinuitätskurven müfste man durch Festsetzung entweder ganz zu der einen oder ganz zu der anderen Seite rechnen.)

Satz II. *Das gesamte Wirbelmoment einer geschlossenen Fläche ist null.*

Denn hier kann man die Kurve 𝔈 auf einen einzigen (nicht singulären) Punkt zusammenziehen.

Es kann vorkommen, dafs innerhalb eines einfach zusammenhängenden Flächenstückes F die Zirkulation durch *jede* geschlossene Kurve, also das Wirbelmoment *jedes* Flächenstückes in F den Wert Null hat und demgemäfs auch die Wirbeldichte ϱ allenthalben verschwindet.

In diesem Falle hat das Integral

$$\text{(c)} \qquad 2R_{OP} = \int_{(O)}^{(P)} q_s ds = \int_{(O)}^{(P)} \left(\frac{\bar{u}\,du}{U} + \frac{\bar{v}\,dv}{V}\right) = \varphi(u, v),$$

welches längs einer beliebigen, doch ganz innerhalb F verlaufenden Kurve 𝔈 von einem festen Anfangspunkt O nach einem beliebigen anderen Flächenpunkte $P = P(u, v)$ erstreckt wird, einen ganz bestimmten von der Gestalt des Weges 𝔈 unabhängigen Wert $\varphi(u, v)$, welcher dem Punkte $P(u, v)$ charakteristisch ist und als das „Geschwindigkeitspotential" im Punkte P bezeichnet wird. Dann können die Geschwindigkeitskomponenten $\bar{u}$, $\bar{v}$, ebenso wie im Falle der Inkompressibilität in § 2 (4) durch die Stromfunktion ψ, nunmehr durch die partiellen Ableitungen von φ ausgedrückt werden:

$$\text{(2)} \qquad \bar{u} = U\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \bar{v} = V\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Ein solches Geschwindigkeitspotential existiert nach (1) in jedem einfach zusammenhängenden Flächenstücke F als eindeutige Funktion des Ortes, wenn innerhalb F die Geschwindigkeit nirgends Sprünge erleidet und die Wirbeldichte ϱ allenthalben verschwindet:

$$\text{(3)} \qquad \frac{2\varrho}{UV} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\bar{v}}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\bar{u}}{U}\right) = 0.$$

Ist aber diese Bedingung (3) nur in einem mehrfach zusammenhängenden Flächenstücke F erfüllt oder enthält F singuläre Punkte oder Linien, in denen ϱ seine Bedeutung verliert und deren Ausschliefsung F

jedenfalls mehrfach zusammenhängend machen würde, so existiert zwar auch ein Geschwindigkeitspotential $\varphi(u, v)$; dasselbe braucht dann aber nicht mehr eindeutig zu sein, sondern ändert sich nach gewissen Umläufen (um die ausgeschlossenen Teile) um additive Perioden.

Die Kurven $\varphi = \text{const.}$, auf denen nach (c) überall $q_s = 0$ ist, stehen in jedem ihrer Punkte auf der dort herrschenden Geschwindigkeitsrichtung senkrecht, schneiden also alle Stromlinien rechtwinklig und werden die *Niveaulinien* genannt.

Ist nun die Flüssigkeit zugleich inkompressibel (§ 2), was in den späteren Untersuchungen immer vorausgesetzt werden soll, so kann man nach (4) p. 207 die Stromfunktion ψ einführen und erhält so für die Wirbeldichte aus (b):

$$(4) \qquad 2\varrho = UV\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{V}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{U}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\right\} \equiv D\psi.$$

Diese Formel gestattet die Berechnung der Wirbeldichte aus der Stromfunktion durch zweimalige Differentiation und umgekehrt bei gegebenem ϱ die Berechnung von ψ durch Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

In einem „wirbelfreien" Flächenstücke F, in welchem überall $\varrho = 0$ und daher ein Geschwindigkeitspotential φ vorhanden ist, wird demnach überall

$$D\psi = 0, \quad \text{aber zugleich auch:} \quad D\varphi = 0,$$

welch letztere Gleichung man erhält, wenn man in der Gleichung (3) § 2 die Ausdrücke (2) für $\bar{u}$ und $\bar{v}$ einführt.

Es ist nun für ein beliebiges Flächenstück C ohne singuläre Stellen im Innern:

$$(5) \quad \int^{(C)} 2\varrho\psi d\sigma = \int^{(C)} \psi D\psi d\sigma = \int\int^{(C)} \psi\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{V}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{U}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\right\} du dv$$
$$= -\int\int^{(C)} \left\{\frac{U}{V}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{V}{U}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2\right\} du dv + \int^{(\mathfrak{C})} \psi\left(\frac{U}{V}\frac{\partial\psi}{\partial u}dv - \frac{V}{U}\frac{\partial\psi}{\partial v}du\right)$$
$$= -\int\int^{(C)} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)\frac{du dv}{UV} + \int^{(\mathfrak{C})} \psi\left(\frac{\bar{u}}{U}du + \frac{\bar{v}}{V}dv\right),$$

wenn das Linienintegral rechts über die Begrenzung $\mathfrak{C}$ von C im positiven Sinne erstreckt wird. Hier kann man aber auch die totale Geschwindigkeit q und ihre Komponente q_s einführen und erhält:

$$(5') \qquad \int^{(C)} 2\varrho\psi d\sigma = -\int^{(C)} q^2 d\sigma + \int^{(\mathfrak{C})} \psi q_s ds.$$

Das Linienintegral über $\mathfrak{C}$ verschwindet aber, wenn C über eine vollständige geschlossene Fläche (ohne Singularitäten) ausgedehnt wird. Ist es dagegen nur ein Flächenstück, ein begrenzter Flüssigkeitsbereich, der von einem festen Rande, bestehend aus einer oder mehreren Stromlinien $\psi = \psi_\lambda = \text{const.}$, begrenzt wird, so zerfällt das Randintegral in eine Anzahl von Ausdrücken

$$\int \psi_\lambda q_s ds = \psi_\lambda \int^{(\psi_\lambda)} q_s ds = 2\psi_\lambda R_\lambda$$

und verschwindet wieder für jeden Bereich C mit eindeutigem Geschwindigkeitspotential, in welchem ja *jede* Zirkulation den Wert Null hat, also namentlich für jedes einfach zusammenhängende wirbelfreie Flächenstück ($\varrho = 0$). Dann verschwindet aber gleichzeitig auch die linke Seite von (5), und es bleibt:

$$\int^{(C)} q^2 d\sigma = \int^{(C)} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)\, d\sigma = 0.$$

Es mufs also überall $q^2 = 0$ und $\psi = \text{const.}$ sein im ganzen Innern von C, d. h. die Flüssigkeit mufs hier überall in Ruhe sein. Wir gewinnen also den Satz:

Satz III. *In einer vollständig geschlossenen Fläche sowie in einem einfach zusammenhängenden Flächenstücke von fester Berandung* ($q_n = 0$) *giebt es keine wirbelfreie Bewegung einer inkompressibeln Flüssigkeit, falls im ganzen Innern Unstetigkeiten der Geschwindigkeit ausgeschlossen sind. In einem solchen Bereiche ist daher die gesamte momentane Geschwindigkeitsverteilung, der „Strömungszustand" durch die vorhandenen Wirbel, d. h. durch die Funktion* $\varrho = \varrho(u, v)$ *eindeutig bestimmt.*

Wären nämlich $\psi = \psi_1$ und $\psi = \psi_2$ zwei Lösungen der Differentialgleichung (4) $D\psi = 2\varrho$, welche auf der vorgeschriebenen Randkurve, die in dem betrachteten Falle höchstens aus einer einzigen Stromlinie bestehen kann, konstante Werte $\bar{\psi}_1$ und $\bar{\psi}_2$ annehmen, so müfste für ihre Differenz $\psi_0 = \psi_1 - \psi_2$ im Innern überall $D\psi_0 = D\psi_1 - D\psi_2 = 0$ sein und auf dem Rande $\bar{\psi}_0 = \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 = \text{const.}$, was nach dem oben Bewiesenen nur möglich wäre bei $\psi_0 = \text{const.}$, also $\psi_1 = \psi_2 + \text{const.}$

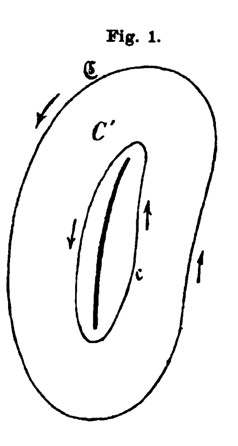
Bei der Herleitung der Beziehung (1)

$$R = \frac{1}{2}\int^{(\mathfrak{C})} q_s ds = \int^{(C)} \varrho\, d\sigma$$

hatten wir vorausgesetzt, dafs das Flächenstück C, über das wir integrierten, von Singularitäten frei sei, die sich auf die Geschwindigkeitskomponenten und ihre ersten Ableitungen beziehen, dafs vielmehr überall im Innern ein bestimmter Wert $2\varrho = D\psi$ existiere. Wir wollen

nun die Natur der möglichen Singularitäten untersuchen, indem wir den Fall ausschließen, daß ϱ in einem ganzen endlichen Flächenstück seine Bedeutung verliere. Es sei nun $\mathfrak{L}$ ein singuläres Kurvenstück, das sich event. auch auf einen einzelnen Punkt reduzieren kann, und C mit der Randkurve $\mathfrak{C}$ ein Flächenstück, welches $\mathfrak{L}$ und sonst keine weitere Singularität in seinem Innern enthält. Umgeben wir nun $\mathfrak{L}$ durch eine innerhalb C beliebig verlaufende geschlossene Kurve $\mathfrak{c}$ mit positivem Richtungssinn in Bezug auf $\mathfrak{L}$ als Inneres, so können wir auf das zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{c}$ liegende Gebiet C' unseren Satz (I) anwenden und erhalten:

Fig. 1.



$$2R' \equiv \int^{(C')} 2\varrho\, d\sigma = \int^{(\mathfrak{C})} q_s\, ds - \int^{(\mathfrak{c})} q_s\, ds.$$

Dies gilt immer, wie eng auch die Kurve $\mathfrak{c}$ die Singularität $\mathfrak{L}$ umgebe, so daß, wenn wir in der Verengung zur Grenze übergehen, auch

$$\lim 2R' \equiv \lim \int^{(C')} 2\varrho\, d\sigma = \int^{(\mathfrak{C})} q_s\, ds - \lim \int^{(\mathfrak{c})} q_s\, ds$$

oder

$$2R_{\mathfrak{C}} \equiv \int^{(\mathfrak{C})} q_s\, ds = \lim \int^{(C')} 2\varrho\, d\sigma + \lim \int^{(\mathfrak{c})} q_s\, ds = 2\overline{R} + 2R_{\mathfrak{L}}.$$

Unser Satz (I) bleibt also richtig, wenn wir nur auf der rechten Seite zu dem Grenzwerte des Flächenintegrales $\int 2\varrho\, d\sigma$ bei ausgeschlossener Singularität $\mathfrak{L}$ noch den Grenzwert $2R_{\mathfrak{L}}$ der Zirkulation um $\mathfrak{L}$ selbst hinzufügen, d. h. wenn wir der Kurve $\mathfrak{L}$ selbst das endliche Wirbelmoment $R_{\mathfrak{L}}$ beilegen. Verfahren wir so bei allen etwa auftretenden Singularitäten, so behalten alle früheren Sätze, z. B. I und II, S. 209, III, S. 211 ihre Giltigkeit. Dabei können wir noch alle die Singularitäten vollständig ignorieren, für welche $2R_{\mathfrak{L}} = \lim \int^{(\mathfrak{c})} q_s\, ds$ den Wert 0 hat. Dies ist aber immer der Fall, wenn die Geschwindigkeitskomponenten auch bei $\mathfrak{L}$ stetig bleiben, die Singularität sich also nur auf ihre Ableitungen $\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}$ etc. bezieht. Denn dann werden bei der Zusammenziehung der Kurve $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{L}$ selbst die einander gegenüberliegenden Elemente ds, ds' gleiche und entgegengesetze Beiträge $q_s ds$ und $q_s' ds' = - q_s ds' = - q_s ds$ liefern und einander aufheben. Anders dagegen, wenn längs der Kurve $\mathfrak{L}$ die Geschwindigkeit unstetig ist, so daß die Tangentialkomponenten derselben rechts und links von $\mathfrak{L}$ nach zwei verschiedenen Werten $q_{\mathfrak{L}}$ und $q_{\mathfrak{L}}'$ konvergieren, während ihre

Normalkomponenten jedenfalls stetig bleiben müssen, solange unserer Voraussetzung (§ 2 fin.) zufolge auch in $\mathfrak{L}$ keine Quell- oder Senkpunkte vorhanden sind. In diesem Falle wird einfach

$$2R_{\mathfrak{L}} = \int^{(\mathfrak{L})}(q'_{\mathfrak{L}} - q_{\mathfrak{L}})ds,$$

d. h. gleich dem Integrale des Geschwindigkeitssprunges über die Diskontinuitätskurve, falls der Sprung nach der Richtung derjenigen Normalen von $\mathfrak{L}$ gerechnet wird, welche zur Fortschreitungsrichtung ds ebenso liegt, wie die v-Richtung zur u-Richtung. Den erhaltenen Wert bezeichnen wir als das „Wirbelmoment der Diskontinuitätskurve $\mathfrak{L}$“.

Ist aber die Singularität $\mathfrak{L}$ nur ein einzelner Punkt, so verschwindet $R_{\mathfrak{L}}$ immer, vermöge der unbegrenzten Verkürzung der Umlaufskurve $\mathfrak{c}$, so lange die Geschwindigkeit in der Umgebung von $\mathfrak{L}$ eine endliche obere Grenze besitzt. Soll also $R_{\mathfrak{L}}$ einen endlichen Wert annehmen, der von 0 verschieden ist, so mufs die Geschwindigkeit bei $\mathfrak{L}$ unendlich grofs werden, so aber, dafs die Normalkomponente q_n in einem $\mathfrak{L}$ umgebenden kleinen Kreise $\mathfrak{c}$ zugleich mit seinem Radius verschwindet, weil $\mathfrak{L}$ eben kein Quellpunkt sein soll. Mit anderen Worten: die Flüssigkeit mufs mit unendlicher Geschwindigkeit um den singulären Punkt herumströmen, und die benachbarten Stromlinien werden kleine ihn umgebende Ovale sein, die, je näher an $\mathfrak{L}$, desto gröfsere Geschwindigkeiten besitzen. Solch einen Punkt bezeichnen wir als einen *„Strudelpunkt“* und den endlichen Grenzwert $R_{\mathfrak{L}}$ der halben Zirkulation über einen umgebenden kleinen Kreis $\mathfrak{c}$ als das „Strudelmoment“ dieses Strudelpunktes.

Von den etwa auftretenden Singularitäten sind also besonders zu berücksichtigen nur die „Strudelpunkte“ und die „Diskontinuitätslinien“, welch letztere auch „Strudellinien“ genannt werden mögen, da sie sich durch aneinander gereihte Strudelpunkte ersetzen lassen.

§ 4. **Das Helmholtzsche Theorem und die Bewegung der Wirbel.**

Bisher hatten wir uns nur mit der momentanen Verteilung der Geschwindigkeit auf unserer Fläche, mit der Lage der Stromlinien u. s. w. in einem einzigen Augenblicke beschäftigt. Nun entsteht aber die Frage: Wie ändert sich dieser Geschwindigkeitszustand, wie deformieren sich die Stromlinien? oder mit anderen Worten: Welches ist der vollständige zeitliche Verlauf der Flüssigkeitsbewegung? Diese Frage beantwortet unter den hier gemachten Voraussetzungen das für unsere zweidimensionale Flüssigkeit auf der Fläche ebenso wie für die

räumliche geltende „Helmholtzsche Theorem", das wir hier so formulieren wollen:

Satz I: *Wenn eine zweidimensionale Flüssigkeit auf einer beliebigen festen Fläche reibungslos unter dem Einflusse von Massenkräften steht, welche ein Potential besitzen, und der Druck eine Funktion der Flächendichte allein ist, so ist die Zirkulation in einer aus bestimmten materiellen Punkten bestehenden geschlossenen Kurve* $\mathfrak{C}$ *oder das Wirbelmoment eines materiellen Flüssigkeitsbereiches* C *bei allen Bewegungen in der Zeit konstant.*

Schreiben wir nämlich nach (1) § 3:

$$2R_{\mathfrak{C}} = \int^{(\mathfrak{C})} \left(\frac{\bar{u}}{U}\delta u + \frac{\bar{v}}{V}\delta v\right),$$

wo das Zeichen δ den Übergang von einem materiellen Flüssigkeitspunkte zum anderen, also eine von der Zeit t unabhängige Veränderung ausdrücken soll und daher gegen das Symbol $\frac{d}{dt}$ vertauschbar ist, so wird:

$$\frac{d\delta u}{dt} = \delta\frac{du}{dt} = \delta(\bar{u}\,U) = \frac{\partial(\bar{u}\,U)}{\partial u}\delta u + \frac{\partial(\bar{u}\,U)}{\partial v}\delta v$$

$$\frac{d\delta v}{dt} = \delta\frac{dv}{dt} = \delta(\bar{v}\,V) = \frac{\partial(\bar{v}\,V)}{\partial u}\delta u + \frac{\partial(\bar{v}\,V)}{\partial v}\delta v,$$

und somit

$$2\frac{dR}{dt} = \int^{(\mathfrak{C})} \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{u}}{U}\right)\delta u + \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{v}}{V}\right)\delta v + \frac{\bar{u}}{U}\delta(\bar{u}\,U) + \frac{\bar{v}}{V}\delta(\bar{v}\,V)\right\}$$

$$= \int^{(\mathfrak{C})} \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{u}}{U}\right) + \frac{\bar{u}^2}{U}\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\bar{v}^2}{V}\frac{\partial V}{\partial u}\right\}\delta u$$

$$+ \int^{(\mathfrak{C})} \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{v}}{V}\right) + \frac{\bar{u}^2}{U}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\bar{v}^2}{V}\frac{\partial V}{\partial v}\right\}\delta v + \int(\bar{u}\delta\bar{u} + \bar{v}\delta\bar{v})$$

oder auf Grund der Bewegungsgleichungen (1) § 1:

$$2\frac{dR}{dt} = \int^{(\mathfrak{C})} \left\{-\frac{\partial\Phi}{\partial u}\delta u - \frac{\partial\Phi}{\partial v}\delta v + \bar{u}\delta\bar{u} + \bar{v}\delta\bar{v}\right\}$$

$$= \int^{(\mathfrak{C})} (-\delta\Phi + \tfrac{1}{2}\delta(q^2)) = \int\delta(\tfrac{1}{2}q^2 - \Phi) = \left[\tfrac{1}{2}q^2 - \Phi\right]_A^A = 0,$$

wenn das Integral über eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ ausgedehnt wird. Es folgt also in der That, wie behauptet war:

$$(1) \qquad R = \tfrac{1}{2}\int^{(\mathfrak{C})} q_s\,ds = \int^{(C)} \varrho\, d\sigma = \text{const.}$$

Aus unserem Satze ergeben sich unmittelbar die Folgerungen:

Satz II: *Ist ein Teil der Flüssigkeit zu irgend einer Zeit wirbelfrei* ($\varrho = 0$), *so ist er es auch zu allen Zeiten.*

Satz III: *Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so ist die Wirbeldichte ϱ in jedem materiellen Punkte konstant, d. h. an jeder Stelle der Fläche, welche ein bestimmter materieller Punkt m einmal erreicht, hat die Wirbeldichte ϱ in diesem Augenblicke immer denselben Wert ϱ_m, welcher dem Punkte m charakteristisch ist.*

Denn nach Satz I ist $\varrho d\sigma = \text{const}$ und der Inkompressibilität wegen zugleich auch $d\sigma = \text{const}$.

Das Helmholtzsche Theorem hätten wir auch aus der Gleichung (3) von § 1 ableiten können in folgender Weise: Es ist

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{u}}{U}\right) &= \quad 2\varrho\frac{\dot{v}}{U} - \frac{\partial}{\partial u}(\Phi + \tfrac{1}{2}q^2), \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{v}}{V}\right) &= -2\varrho\frac{\dot{u}}{V} - \frac{\partial}{\partial v}(\Phi + \tfrac{1}{2}q^2), \end{aligned}$$

da U und V von t unabhängig sind. Wenn man hier die zweite Gleichung nach u, die erste nach v differentiiert und subtrahiert, so folgt:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial t}\left(\frac{\dot{v}}{V}\right) - \frac{\partial^2}{\partial v\,\partial t}\left(\frac{\dot{u}}{U}\right) = -2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varrho\dot{u}}{V}\right) - 2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varrho\dot{v}}{U}\right).$$

Hier ist aber die linke Seite nach der Definition (c) S. 204 $= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\varrho}{UV}\right)$, so dafs wir die Gleichung gewinnen:

$$\text{(2)}\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varrho}{UV}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varrho\dot{u}}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varrho\dot{v}}{U}\right) = 0.$$

Diese unterscheidet sich von der Gleichung (2) in § 2 nur dadurch, dafs hier ϱ an Stelle von k tritt und wie jene, die „Kontinuitätsgleichung“, die Konstanz der Masse $kd\sigma$ eines materiellen Teilchens ausdrückt, ebenso diese die Konstanz seines Wirbelmomentes $\varrho d\sigma$.

Im Falle der Inkompressibilität ist nun nach (3) § 2

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\dot{u}}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\dot{v}}{U}\right) = 0.$$

so dafs (2) sich schreiben läfst:

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\varrho}{\partial t} &= -UV\left(\frac{\dot{u}}{V}\frac{\partial\varrho}{\partial u} + \frac{\dot{v}}{U}\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right) \\ &= -U\dot{u}\frac{\partial\varrho}{\partial u} - V\dot{v}\frac{\partial\varrho}{\partial v} \end{aligned}$$

oder

$$\frac{d\varrho}{dt} \equiv \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{dv}{dt} = 0,$$

d. h. $\varrho = \text{const}$.

Hier kann man aber auch $\bar{u}$ und $\bar{v}$ durch die Stromfunktion ψ ausdrücken [(4) § 2] und erhält:

(4)
$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = UV\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varrho}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)$$

oder, wenn man für 2ϱ nach (4) § 3 seinen Wert $D\psi$ einsetzt:

(4)′
$$\frac{\partial D\psi}{\partial t} = UV\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial D\psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial D\psi}{\partial v}\right),$$

eine (nicht homogene) partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für $\psi = \psi(u, v, t)$, welche den ganzen zeitlichen Verlauf der Flüssigkeitsbewegung bestimmt.

Ist nämlich irgend eine Lösung $\psi = \psi(u, v, t)$ dieser Differentialgleichung gefunden, welche den gegebenen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen genügt, so können die beiden Gleichungen (a) nur noch zur Bestimmung des *Druckes* dienen. Sie lassen sich nämlich schreiben:

(5)
$$\frac{\partial}{\partial u}(\Phi + \tfrac{1}{2}q^2) = 2\varrho\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{V}{U}\frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial t}$$
$$\frac{\partial}{\partial v}(\Phi + \tfrac{1}{2}q^2) = 2\varrho\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{U}{V}\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial t}$$

oder, wenn man die Variationen δu, δv einführt:

(5)′
$$\delta(\Phi + \tfrac{1}{2}q^2) = \left(2\varrho\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{V}{U}\frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial t}\right)\delta u + \left(2\varrho\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{U}{V}\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial t}\right)\delta v.$$

Hier ist auf Grund von (4) die rechte Seite ein vollständiges Differential (denn es wurde ja (4) gerade durch Elimination von Φ aus den Gleichungen (a) oder (5) abgeleitet). Wir können also die Funktion $\Phi + \frac{1}{2}q^2$ durch Integration finden und brauchen dann nur noch $\frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}U^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2}V^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2$ abzuziehen, um Φ, und dann noch das Potential Φ_1 der Massenkräfte (cf. p. 204), um die Druckfunktion $P = \int \frac{dp}{k} = p$, d. h. den Druck selbst als Funktion von u, v und t zu finden.

Besonders wichtig ist der Fall, wo $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$, d. h. wo die Strömung *stationär* ist. Dann muſs auch $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ sein, also nach (4)

(4a)
$$\frac{\partial \varrho}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varrho}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0$$

oder integriert:

(4b)
$$2\varrho = D\psi = f(\psi),$$

eine Relation, die sich auch geometrisch so ausdrücken läſst:

Satz IV. *Bei der stationären Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einer beliebigen Fläche mufs auf jeder Stromlinie* ($\psi = $ const.) *die Wirbeldichte* ϱ *constant sein.*

Dies leuchtet auch unmittelbar ein, weil sich im stationären Falle die materiellen Punkte mit unverändertem ϱ (Satz III) auf den festen Stromlinien bewegen und dabei doch ϱ an jeder Stelle ungeändert bleiben soll.[1])

In diesem Falle ist die Bestimmung des Druckes sehr einfach. Denn hier wird (5)

$$\frac{\partial(\Phi + \frac{1}{2}q^2)}{\partial u} = 2\varrho\frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\Phi + \frac{1}{2}q^2)}{\partial v} = 2\varrho\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

also:

$$(6) \qquad \Phi + \tfrac{1}{2}q^2 = \Phi_1 + p + \tfrac{1}{2}q^2 = \int 2\varrho\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right) = \int 2\varrho\, d\psi;$$

und auf den Stromlinien $\psi = $ const, $\varrho = $ const ist gleichzeitig auch

$$\Phi = \text{const},$$

und falls keine Massenkräfte wirken, der Druck konstant:

$$p = \text{const}.$$

§ 5. Die Erhaltung der lebendigen Kraft.

Aus der Form (2) unserer hydrodynamischen Grundgleichungen in § 1 folgt unmittelbar:

$$\bar{u}\frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{v}\frac{d\bar{v}}{dt} = -U\bar{u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - V\bar{v}\frac{\partial\Phi}{\partial v}$$
$$= -\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{du}{dt} - \frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

oder im Falle der Inkompressibilität, wenn man nach § 2 $\bar{u}$ und $\bar{v}$ durch ψ ausdrückt:

$$(1) \qquad \bar{u}\frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{v}\frac{d\bar{v}}{dt} = UV\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right),$$

also, wenn man über ein Flächenstück C integriert:

$$\int^{(C)}\left(\bar{u}\frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{v}\frac{d\bar{v}}{dt}\right)d\sigma = \iint^{(C)} du\,dv\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right).$$

Da im betrachteten Falle auch das Flächenelement $d\sigma$ in der Zeit konstant ist, so ist die linke Seite nichts anderes als der zeitliche

1) Für den Spezialfall der Ebene, wo $D\psi = \Delta\psi$ ist, findet sich die Bedingung $\Delta\psi = f(\psi)$ der Stationarität bereits bei Lagrange (Oeuvres t. 4 p. 720) vergl. auch Stokes (Math. Phys. Papers v. I p. 264), Lamb, Hydrod. p. 263).

Differentialquotient der gesamten im Bereich C enthaltenen lebendigen Kraft

$$\frac{dT_C}{dt} = \frac{d}{dt}\int^{(C)} \tfrac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)\,d\sigma.$$

Die rechte Seite aber läfst sich in ein Randintegral verwandeln, im positiven Sinne erstreckt über die Begrenzung $\mathfrak{C}$ von C:

$$\int^{(C)} du\,dv\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \int^{(\mathfrak{C})} \Phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right)$$
$$= \int^{(\mathfrak{C})} \Phi\frac{\partial\psi}{\partial s}ds = \int^{(\mathfrak{C})} \Phi q_n ds,$$

wenn ds wieder das Bogenelement von $\mathfrak{C}$ und q_n die Normalkomponente der Geschwindigkeit bedeutet. Wir haben also:

(2) $$\frac{dT_C}{dt} = \frac{d}{dt}\int^{(C)} \tfrac{1}{2}q^2 d\sigma = \int^{(\mathfrak{C})} \Phi q_n ds.$$

Dieses ist der Ausdruck des Gesetzes von der Erhaltung der Energie, angewendet auf eine inkompressible zweidimensionale Flüssigkeit.

Nehmen wir nun an, dafs die Begrenzung $\mathfrak{C}$ unseres Bereiches C durch eine Anzahl von Stromlinien $\psi = \text{const}$ gebildet werden oder dafs sie in einen (nicht singulären) Punkt zusammenschrumpft, während C eine geschlossene Fläche vollständig erfüllt, so verschwindet die rechte Seite, und es wird:

(3) $$T_C = \tfrac{1}{2}\int^{(\mathfrak{C})} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)\,d\sigma = \text{const}.$$

Also:

Satz I. *Die gesamte lebendige Kraft einer inkompressiblen reibungslosen Flüssigkeit in einer vollständig geschlossenen Fläche oder in einem Flächenstücke von fester aus Stromlinien gebildeten Umrandung ist in der Zeit konstant, vorausgesetzt, dafs die Flüssigkeit keine Quellpunkte besitzt und dafs die äufseren Kräfte ein Potential haben.*

Für den Fall der *geschlossenen Fläche* können wir aber der gesamten lebendigen Kraft T noch eine andere Form geben durch Einführung der Stromfunktion ψ und der Wirbeldichte ϱ. Es ist nämlich nach (4) S. 207:

$$\frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{UV} = -\frac{\bar{u}}{U}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\bar{v}}{V}\frac{\partial\psi}{\partial u}$$
$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\psi\bar{v}}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\psi\bar{u}}{U}\right) - \frac{2\psi\varrho}{UV}$$

(cf. (c) §).

und daher, wenn man über das Flächenstück C integriert und rechts das entsprechende Randintegral über $\mathfrak{C}$ einführt:

$$(4) \qquad 2T_C = \int\int^{(C)} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)\frac{du\,dv}{UV} = \int^{(\mathfrak{C})} \psi\left(\bar{u}\frac{du}{U} + \bar{v}\frac{dv}{V}\right) - \int\int^{(C)} 2\psi\varrho\frac{du\,dv}{UV}$$

oder:

$$T_C = \int^{(C)} \tfrac{1}{2}q^2 d\sigma = \tfrac{1}{2}\int^{(\mathfrak{C})} \psi\, q_s ds - \int^{(C)} \psi\varrho\, d\sigma.$$

Also, wenn C die ganze geschlossene Fläche F darstellt:

$$(4a) \qquad T = \int^{(F)} \tfrac{1}{2}q^2 d\sigma = -\int^{(F)} \psi\varrho\, d\sigma = \text{const.}$$[1])

Wir haben somit den Satz gewonnen:

Satz II. *Bei der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einer geschlossenen Fläche ist die Summe aller Wirbelelemente $\varrho\, d\sigma$, jedes multipliziert mit dem jeweiligen Werte der Stromfunktion ψ gleich der negativen lebendigen Kraft der ganzen Strömung und daher unter den Voraussetzungen des Satzes I in der Zeit konstant:*

$$\mathsf{P} = \int \psi\varrho\, d\sigma = -T = \text{const}.$$

Kapitel II.

Anwendung der allgemeinen Theorie auf die Kugel.

§ 1. Die Grundformeln in stereographischen und Polarkoordinaten.

Ist die betrachtete Fläche eine Kugel, so empfehlen sich zur Behandlung der hydrodynamischen Probleme insbesondere die folgenden beiden Systeme orthogonaler Koordinaten u, v.

1) *Polarkoordinaten* ϑ, ω, wo ϑ den Winkelabstand eines Punktes P von einem festen Anfangspunkt O und ω den Neigungswinkel des Meridianes OPO' gegen einen festen Anfangsmeridian $\omega = 0$ bedeutet. Wir rechnen ω nach der Richtung als zunehmend, welche einer positiven Drehung um den Durchmesser $O'CO$ entspricht (nach links, wenn der Beobachter sich in die Richtung CO stellt).

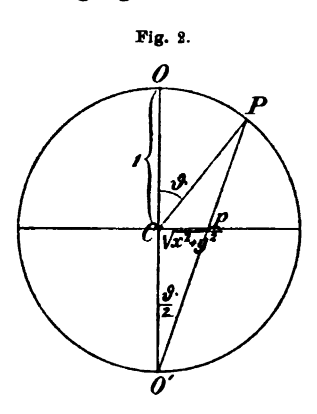
2) *Stereographische Koordinaten* x, y, d. h. die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes p, den wir aus P durch stereographische Projektion von einem festen Kugelpunkte O' (entgegengesetzt O) aus auf die

---

1) Vergl. Poincaré, Théor. d. Tourbillons, § 73. p. 80/81

Äquatorebene des Durchmessers OO' gewinnen. Auch hier soll der Übergang von der x- zur y-Achse einer positiven Drehung um die Achse $O'O$ entsprechen. Dieses Koordinatensystem ist besonders deswegen für viele Zwecke wichtig, weil die stereographische Abbildung der Kugel auf die Ebene bekanntlich eine konforme oder winkeltreue ist.

Fig. 2.



Wählen wir das Projektionszentrum O' dem Punkte O des Polarkoordinatensystems gerade entgegengesetzt, und legen die x-Achse in den Anfangsmeridian $\omega = 0$, so bestehen zwischen ϑ, ω; x, y, wenn wir den Kugelradius $= 1$ annehmen, die Beziehungen:

$$(1)\qquad \sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2},\quad x = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\cos\omega,\quad y = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\sin\omega.$$

Also:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{d\vartheta^2}{4\cos^4\frac{\vartheta}{2}} + \operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}\,d\omega^2 = \frac{d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\omega^2}{4\cos^4\frac{\vartheta}{2}}.$$

Es wird daher, wenn ds wie früher die Länge des Linienelementes auf der Kugel bezeichnet:

$$(2)\qquad ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\omega^2 = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}(dx^2+dy^2),$$

so dafs, wenn wir für die Gröfsen U, V in Kap. I bezw. Θ, Ω; X, Y setzen und die Geschwindigkeitskomponenten durch $\bar\vartheta$, $\bar\omega$; $\bar x$, $\bar y$ bezeichnen:

$$(3)\left\{\begin{aligned} &\Theta = 1,\quad \Omega = \frac{1}{\sin\vartheta}. && X = Y = \tfrac{1}{2}(1+x^2+y^2).\\ &\frac{d\vartheta}{dt} = \bar\vartheta,\quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\bar\omega}{\sin\vartheta}. && \frac{dx}{dt} = \tfrac{1}{2}(1+x^2+y^2)\bar x,\quad \frac{dy}{dt} = \tfrac{1}{2}(1+x^2+y^2)\bar y.\end{aligned}\right.$$

Aus den Grundformeln (1), (2) und (3) in Kap. I, § 1 erhalten wir dann die folgenden:

$$(4\text{a})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\bar\vartheta}{dt} - \cot\vartheta\,\bar\omega^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\\ &\frac{d\bar\omega}{dt} + \cot\vartheta\,\bar\vartheta\bar\omega = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}\end{aligned}\right.$$

$$(4\text{b})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar x}{1+x^2+y^2}\right) + \frac{x}{1+x^2+y^2}(\bar x^2+\bar y^2) = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar y}{1+x^2+y^2}\right) + \frac{y}{1+x^2+y^2}(\bar x^2+\bar y^2) = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\end{aligned}\right.$$

$$(4\,b)' \quad \begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} - \bar{y}(y\bar{x} - x\bar{y}) = -\tfrac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} + \bar{x}(y\bar{x} - x\bar{y}) = -\tfrac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{array}{l|l} \dfrac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} = 2\varrho\bar{\omega} - \dfrac{\partial}{\partial \vartheta}(\Phi + \tfrac{1}{2}q^2) & \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial t} = 2\varrho\bar{y} - \tfrac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)\dfrac{\partial}{\partial x}(\Phi + \tfrac{1}{2}q^2) \\ \dfrac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = -2\varrho\bar{\vartheta} - \dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial \omega}(\Phi + \tfrac{1}{2}q^2) & \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} = -2\varrho\bar{x} - \tfrac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)\dfrac{\partial}{\partial y}(\Phi + \tfrac{1}{2}q^2) \end{array}$$

$$(6\,a) \quad 2\varrho = \frac{1}{\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\bar{\omega}\sin\vartheta) - \frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\omega}\right\}$$

$$(6\,b) \quad \begin{aligned} 2\varrho &= \tfrac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)^2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{y}}{1 + x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\bar{x}}{1 + x^2 + y^2}\right)\right\} \\ &= y\bar{x} - x\bar{y} + \tfrac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)\left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial x} - \frac{\partial\bar{x}}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Ferner werden die Komponenten der Geschwindigkeit $q = \sqrt{\bar{\vartheta}^2 + \bar{\omega}^2} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ in der Richtung der Tangente und Normale:

$$(7) \quad \begin{array}{ll} q_n = \bar{\omega}\dfrac{d\vartheta}{ds} - \bar{\vartheta}\sin\vartheta\dfrac{d\omega}{ds} & q_n = \dfrac{2}{1 + x^2 + y^2}\left(\bar{y}\dfrac{dx}{ds} - \bar{x}\dfrac{dy}{ds}\right) \\ q_s = \bar{\vartheta}\dfrac{d\vartheta}{ds} + \bar{\omega}\sin\vartheta\dfrac{d\omega}{ds} & q_s = \dfrac{2}{1 + x^2 + y^2}\left(\bar{x}\dfrac{dx}{ds} + \bar{y}\dfrac{dy}{ds}\right). \end{array}$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit kann man noch die Stromfunktion $\psi = \int_0^P q_n ds$ einführen und erhält so nach (4) § 2 von Kap. I:

$$(8) \quad \begin{cases} \bar{\vartheta} = \dfrac{d\vartheta}{dt} = -\dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\omega}, & \bar{x} = \dfrac{2}{1 + x^2 + y^2}\dfrac{dx}{dt} = -\tfrac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ \bar{\omega} = \sin\vartheta\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{\partial\psi}{\partial\vartheta}, & \bar{y} = \dfrac{2}{1 + x^2 + y^2}\dfrac{dy}{dt} = \tfrac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \end{cases}$$

$$(9\,a) \quad \begin{aligned} 2\varrho = D\psi &= \frac{1}{\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)\right\} \\ &= \frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2} \end{aligned} \quad \text{nach (4) S. 210.}$$

$$(9\,b) \quad 2\varrho = D\psi = \tfrac{1}{4}(1 + x^2 + y^2)^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{dy^2}\right) = \tfrac{1}{4}(1 + x^2 + y^2)^2\Delta\psi.$$

$$\Delta\psi = \frac{8\varrho}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

§ 2. Der einfache Strudel und das sphärische Potential.

Die Gleichung (9a) in § 1 suchen wir zunächst zu befriedigen unter der Bedingung, dafs ψ und ϱ *Funktionen von ϑ allein* sind, also nach (8)

$$\bar{\vartheta} = 0, \quad \bar{\omega} = \frac{d\psi}{d\vartheta} = \psi'(\vartheta),$$

und die ganze Strömung symmetrisch um die Achse CO in den Parallelkreisen erfolgt. Eine solche Geschwindigkeitsverteilung wollen wir im Folgenden immer als eine „zonale“ oder „axialsymmetrische“ bezeichnen. Die genannte Gleichung nimmt dann die Form an:

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{d\psi}{d\vartheta}\right) = 2\varrho \sin\vartheta \tag{1}$$

und ihr wird für den besonderen Fall $\varrho = \text{const.}$ genügt durch den Ansatz:

$$\psi = -4\varrho \lg \sin\frac{\vartheta}{2}, \quad \overline{\omega} = \frac{d\psi}{d\vartheta} = -2\varrho \cot\frac{\vartheta}{2} \tag{2}$$

$$\overline{\vartheta} = 0.$$

Diese spezielle Lösung besitzt im Anfangspunkte $O(\vartheta = 0)$ einen singulären Punkt, in welchem ψ und $\overline{\omega}$ unendlich werden. Bilden wir nun die Zirkulation (I § 3) im Parallelkreise ϑ:

$$2R_\vartheta = \int_0^{2\pi} \overline{\omega} \sin\vartheta \, d\omega = 2\pi\overline{\omega}_\vartheta \sin\vartheta = -4\pi\varrho(1 + \cos\vartheta),$$

so nimmt diese für $\vartheta = O$ den Wert an

$$2R_0 = -8\pi\varrho,$$

also ist

$$R_0 = -4\pi\varrho = m$$

das Moment des Strudelpunktes O (cf. Kap. I, § 2 S. 213), so daſs in der That gemäſs Satz II S. 209 die Summe aller Wirbelmomente auf der ganzen Kugel $= 4\pi\varrho - R_0 = 0$ ist.

Satz I. Jede zonale Strömung in der Kugel, bei welcher, abgesehen von einem einzigen Strudelpunkte m in O die Wirbeldichte auf der ganzen Kugel konstant $= -\frac{m}{4\pi}$ *ist, soll als ein „einfacher Strudel“ vom Momente m bezeichnet werden und wird dargestellt durch die Stromfunktion*

$$\psi = \frac{m}{\pi} \log \sin\frac{\vartheta}{2},$$

wenn ϑ den Bogenabstand vom Strudelpunkte O, dem „Zentrum“ des Strudels, bedeutet.

Hier strömt die Flüssigkeit gleichförmig auf den Parallelkreisen und um so schneller, je näher sie dem Strudelpunkt O sind, um diesen selbst mit unendlicher Geschwindigkeit, während sie in dem Gegenpole O' ganz in Ruhe bleibt.

Einen solchen „Strudel“ können wir uns in einer physikalischen Flüssigkeit, welche keine wirkliche Unstetigkeit zuläſst, angenähert rea-

lisiert denken durch geeignete Zusammensetzung der betrachteten Lösung mit irgend einer anderen Lösung von (1), z. B.

$$\psi = \psi_1 = -\alpha \cos\vartheta, \quad \bar{\omega} = \alpha \sin\vartheta, \quad \varrho = \alpha\cos\vartheta = -\psi_1,$$

welche einer starren Rotation der ganzen Flüssigkeit um die Achse $O'O$ mit der Winkelgeschwindigkeit α entspricht. Wir könnten dann auf einem beliebigen Parallelkreise $\vartheta = \vartheta_0$ beide Strömungen ψ_0 und ψ_1 stetig zusammenfügen, indem wir die entsprechenden Geschwindigkeiten gleich setzten:

$$\bar{\omega} = \alpha \sin\vartheta_0 = \frac{m}{2\pi}\cot\frac{\vartheta_0}{2},$$

also:

$$\alpha = \frac{m}{4\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}}.$$

Dann wäre die zusammengesetzte Strömung gegeben durch:

$$\psi = \psi_1 \quad (\vartheta < \vartheta^0), \quad \psi = \psi_0 = \frac{m}{\pi}\lg\sin\frac{\vartheta}{2} \quad (\vartheta > \vartheta_0)$$

und würde mit der des einfachen Strudels umsomehr übereinstimmen, je kleiner ϑ_0 gewählt würde, und doch würde die Geschwindigkeit überall stetig bleiben, solange noch ϑ_0 von 0 verschieden ist.

Nun war aber der Anfangspunkt O ursprünglich ein beliebiger Punkt auf der Kugel, der keine ausgezeichnete Eigenschaft besitzt. Wir können daher auch jeden beliebigen anderen Punkt P_0 zum Mittelpunkte eines „Strudels" machen, wenn wir setzen:

$$\psi = \frac{m}{\pi}\lg\sin\frac{\delta_0}{2} = \frac{m}{\pi}\lg\frac{r_0}{2},$$

wo unter δ_0 der sphärische und unter r_0 der Sehnenabstand eines beliebigen Kugelpunktes P von P_0 verstanden werden soll. Dabei können wir immer noch ein beliebiges Polar- oder stereographisches Koordinatensystem zu grunde legen, wenn wir nur δ_0 oder r_0 richtig durch die Koordinaten ϑ, ω oder x, y von P ausdrücken. Beachten wir nun weiter, dafs unsere Grundgleichung $D\psi = 2\varrho$ in den Variabeln ϱ, ψ und ihren Ableitungen linear und homogen ist, dafs wir also aus zwei Lösungen ψ_1, ϱ_1 und ψ_2, ϱ_2 immer neue Lösungen $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, $c_1\varrho_1 + c_2\varrho_2$ linear zusammensetzen können, so gelangen wir zu dem Satze:

Satz II. *Bezeichnen wir mit* $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ *die sphärischen und mit* $r_1, r_2, \ldots r_n$ *die Sehnenabstände des variablen Punktes* P *von* n *festen Kugelpunkten* $P_1, P_2, \ldots P_n$, *so stellt die Funktion:*

$$(4) \qquad \psi = \frac{m_1}{\pi}\lg\sin\frac{\delta_1}{2} + \frac{m_2}{\pi}\lg\sin\frac{\delta_2}{2} + \cdots + \frac{m_n}{\pi}\lg\sin\frac{\delta_n}{2}$$
$$= \frac{m_1}{\pi}\lg\frac{r_1}{2} + \frac{m_2}{\pi}\lg\frac{r_2}{2} + \cdots + \frac{m_n}{\pi}\lg\frac{r_n}{2},$$

welche das „sphärische Potential“ der n Massen m_1, m_2, .. m_n genannt werde, die Stromfunktion einer bestimmten Strömung in der Kugel dar, in welcher die Punkte P_1, P_2, .. P_n Strudelpunkte mit den Wirbelmomenten m_1, m_2, .. m_n sind und welche in jedem anderen Kugelpunkte P eine ***konstante*** *Wirbeldichte*

$$(5)\quad \varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots \varrho_n = -\frac{m_1}{4\pi} - \frac{m_2}{4\pi} \cdots - \frac{m_n}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\Sigma m = -\frac{M}{4\pi}$$

besitzt. Jede solche Strömung bezeichnen wir als ein „Strudelsystem“.

Die konstante Wirbeldichte ϱ nimmt den Wert 0 an, wenn die Summe $M = \Sigma m$ aller Strudelmomente verschwindet.

Besteht beispielsweise das System nur aus zwei gleichen und entgegengesetzten Strudeln $\pm m$, so wird seine Stromfunktion:

$$(5\text{a})\qquad \psi = \frac{m}{\pi}\lg\frac{\sin\frac{\vartheta_1}{2}}{\sin\frac{\vartheta_2}{2}} = \frac{m}{\pi}\lg\frac{r_1}{r_2},$$

und die Stromlinien werden gegeben durch:

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{const},$$

d. h. es sind die Kugelkreise, deren Ebenen durch die Schnittlinie der in P_1 und P_2 berührenden Tangentialebenen gehen.[1]

Liegen die beiden Strudel insbesondere in zwei entgegengesetzten Punkten O, O' ($\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$), so wird die Stromfunktion:

$$(5\text{b})\qquad \psi = \frac{m}{\pi}\lg\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

und die Geschwindigkeit:

$$\bar{\vartheta} = 0, \quad \bar{\omega} = \frac{m}{\pi}\frac{1}{\sin\vartheta}.$$

Die Strömung erfolgt in den Parallelkreisen mit einer Geschwindigkeit umgekehrt proportional ihren Radien.

Das sphärische Potential, das wir oben für eine endliche Anzahl von Massenpunkten definiert hatten, wollen wir jetzt auf den Fall einer kontinuierlichen Massenverteilung auf der Kugelfläche ausdehnen. Es sei nämlich $k = k(\vartheta, \omega)$ eine wenigstens stückweise stetige Funktion des Ortes auf der Kugel, und es werde gesetzt:

$$(6)\qquad M = \int k\,d\sigma,$$

wo die Integration über die ganze Kugel erstreckt wird. Nun zerlegen wir die Kugelfläche in eine Anzahl von Teilbereichen σ_1, σ_2, σ_3 ...

1) Vergl. Lamb, Hydrodynamics, p. 115 und p. 253.

und bezeichnen mit k_1, k_2, k_3 ... die entsprechenden arithmetischen Mittelwerte der Funktion k, so dafs

(7) $$k_1\sigma_1 = \int^{(\sigma_1)} k\,d\sigma,\quad k_2\sigma_2 = \int^{(\sigma_2)} k\,d\sigma \ldots$$

Ferner nehmen wir in jedem der Bereiche σ_1, σ_2, ... einen festen Punkt P_1, P_2, ... an und bezeichnen mit r_1, r_2, ... die von diesen Punkten aus gerechneten Sehnenabstände eines variablen Punktes P. Jetzt betrachten wir das Strudelsystem (Satz II, S. 223) mit der Stromfunktion

(8) $$\psi' = \frac{k_1\sigma_1}{\pi}\lg\frac{r_1}{2} + \frac{k_2\sigma_2}{\pi}\lg\frac{r_2}{2} + \cdots,$$

für welches die konstante Wirbeldichte, abgesehen von den Strudelpunkten P_1, P_2, .., den Wert hat:

(9) $$\varrho' = -\frac{k_1\sigma_1}{4\pi} - \frac{k_2\sigma_2}{4\pi} \cdots = -\frac{M}{4\pi},$$

und bilden die halbe Zirkulation

$$R_\sigma = \frac{1}{2}\int^{(\mathfrak{S})} q_s\,ds = \frac{1}{2}\int^{(\mathfrak{S})} \frac{\partial\psi'}{\partial n}\,ds$$

über die Begrenzung $\mathfrak{S}$ eines Aggregates σ solcher Teilgebiete σ_1, σ_2, .. Diese wird dann gleich der Summe der im Innern von σ enthaltenen Wirbelmomente, also

$$\begin{aligned} R_\sigma &= k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + \cdots + \varrho'\sigma \\ &= \int^{(\sigma_1)} k\,d\sigma + \int^{(\sigma_2)} k\,d\sigma + \cdots + \varrho'\sigma \\ &= \int^{(\sigma)} k\,d\sigma + \varrho'\sigma = \int^{(\sigma)} (k+\varrho')\,d\sigma = \int^{(\sigma)}\left(k - \frac{M}{4\pi}\right) d\sigma. \end{aligned}$$

Lassen wir jetzt die Dimensionen aller Teilgebiete σ_1, σ_2 .. unbegrenzt abnehmen, während ihre Anzahl unbegrenzt wächst, so werden wir schliefslich *jedes* Flächenstück C als ein solches Aggregat σ auffassen können und erhalten so:

(10) $$R_C = \int^{(C)}\left(k - \frac{M}{4\pi}\right) d\sigma,$$

d. h. die Wirbeldichte der betrachteten Strömung hat an der Grenze den Wert:

(11) $$\varrho = k(\vartheta, \omega) - \frac{M}{4\pi}.$$

Gleichzeitig geht aber in (8) die endliche Summe in ein bestimmtes Integral über:

(12) $$\psi = \lim\psi' = \frac{1}{\pi}\int^{(K)} k\lg\frac{r}{2}\,d\sigma = \frac{1}{\pi}\int^{(K)} k\lg\sin\frac{\delta}{2}\,d\sigma,$$

wo die Integration sich auf die ganze Kugelfläche K bezieht und die Buchstaben r und δ den Sehnen- und den Bogenabstand eines variablen Punktes P von dem betreffenden Elemente $d\sigma$ ausdrücken sollen.

So erhalten wir:

Satz III. *Das sphärische Potential*

$$\psi = \frac{1}{\pi}\int^{(K)} k \lg \sin\frac{\delta}{2}\, d\sigma$$

einer kontinuierlichen Massenverteilung auf der Kugelfläche mit der variablen Dichte $k = k(\vartheta, \omega)$ *und der Gesamtmasse* M *stellt, als Stromfunktion betrachtet, eine Flüssigkeitsströmung dar, deren Wirbeldichte* ϱ *an jeder Stelle den Wert hat*

$$\varrho = k(\vartheta, \omega) - \frac{M}{4\pi}. \tag{11}$$

Ist daher $M = \int^{(K)} k\, d\sigma = 0$, so wird $\varrho = k$ und somit:

$$\psi = \frac{1}{\pi}\int^{(K)} \varrho \lg \frac{r}{2}\, d\sigma = \frac{1}{\pi}\int^{(K)} \varrho \lg \sin\frac{\delta}{2}\, d\sigma, \tag{13}$$

während gleichzeitig nach (4) S. 210

$$D\psi = 2\varrho \tag{14}$$

sein mufs. Die Gleichung (13) stellt also bei vorgeschriebenem $\varrho = \varrho(\vartheta, \omega)$ eine Auflösung der Differentialgleichung (14) dar und zwar (nach Satz III, S. 211) bis auf eine additive Konstante die einzig mögliche, falls ϱ überall endlich bleibt. Sind dagegen aufser der kontinuierlichen Wirbelverteilung ϱ noch Strudelpunkte $m_1, m_2, \ldots$ oder Strudellinien mit den Längendichten $\gamma_1, \gamma_2 \ldots$ vorhanden, so hat man noch die entsprechenden sphärischen Potentiale hinzuzufügen:

$$\frac{m_1}{\pi}\lg\sin\frac{\delta_1}{2} + \frac{m_2}{\pi}\lg\sin\frac{\delta_2}{2} + \cdots$$
$$+ \int \gamma_1 \lg\sin\frac{\delta}{2}\, ds_1 + \cdots$$

und erhält so auf jeden Fall die Stromfunktion eindeutig (bis auf eine additive Konstante), wenn nur, dem Satze II § 3 entsprechend, die Summe *aller* Wirbelmomente verschwindet. Wir haben also den weiteren Satz:

Satz III. *Ist von einer Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit auf der unbegrenzten Kugelfläche die gesamte Wirbelverteilung gegeben, so ist die zugehörige Stromfunktion (bis auf eine additive Konstante) gleich dem sphärischen Potential der entsprechenden Massenverteilung.*

Das hier betrachtete sphärische Potential verhält sich auf der

Kugel ganz analog dem gewöhnlichen Newtonschen Potential im Raume oder dem logarithmischen in der Ebene. Namentlich gilt auch hier das Theorem:

Satz IV. *Das sphärische Potential einer zonalen, d. h. aus homogenen konzentrischen Ringen bestehenden Massenverteilung auf einer Kalotte C bleibt für alle äufseren Punkte (in der restierenden Kalotte C′) bis auf eine additive Konstante ungeändert, wenn man alle wirkenden Massen M in ihrem (inneren) Mittelpunkte O vereinigt.*

Es sei nämlich $\varrho = \varrho(\vartheta)$ $(\vartheta < \alpha)$ die Dichte der ursprünglichen Massenverteilung und $\psi = \psi(\vartheta)$ ihr sphärisches Potential, und es sei ferner $\psi_1 = \frac{M}{\pi} \lg \sin \frac{\vartheta}{2} = \psi_1(\vartheta)$ das Potential der in O befindlichen Masse M. Dann wird $\psi_0 = \psi - \psi_1$ das sphärische Potential der Massenverteilung mit der vorgeschriebenen Dichte ϱ in C und dem *hinzukommenden* Massenpunkte $- M$ in O. Hier ist natürlich die Summe aller Massen $= 0$, und wir können sie deshalb auch als die Wirbel einer Flüssigkeitsströmung auffassen, welche in O den Strudelpunkt $- M$, innerhalb C die variable Wirbeldichte ϱ und in C' gar keine Wirbel mehr besitzt. Diese Strömung ist ebenfalls zonal und hat die Stromfunktion $\psi_0 = \psi - \psi_1$, und da sie in dem einfach zusammenhängenden und von einer Stromlinie begrenzten Bereiche C' wirbelfrei ist, so mufs nach Satz III, S. 211 die Stromfunktion in diesem Bereiche *konstant* sein, d. h.:

$$\psi_0 = \psi - \psi_1 = \text{const.}, \quad \psi = \psi_1 + \text{const.} \qquad (\vartheta > \alpha)$$

q. e. d.

Den Wert der Konstanten bestimmt man, indem man das Potential ψ in O', dem Mittelpunkte von C', wo ψ_1 verschwindet, direkt berechnet:

$$\psi_{O'} = \frac{1}{\pi} \int \varrho \, d\sigma \lg \cos \frac{\vartheta}{2} = 2 \int_0^\alpha \varrho \sin \vartheta \, d\vartheta \lg \cos \frac{\vartheta}{2}.$$

Ist z. B. $\varrho = \text{const.}$, d. h. ist unsere Kalotte C homogen mit Masse belegt, so wird

$$M = 2\pi\varrho(1 - \cos\alpha) = 4\pi\varrho \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

und

$$\psi_{O'} = 2\varrho \int_0^\alpha \lg \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta \, d\vartheta = 2\varrho \left[\cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \lg \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) - 1 \right],$$

also ist das Potential im Äufsern (C'):

$$(15) \qquad \psi_a = 4\varrho \sin^2 \frac{\alpha}{2} \lg \sin \frac{\vartheta}{2} - 2\varrho \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \lg \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

Um aber das Potential im Innern von $C(\vartheta < \alpha)$ zu berechnen, denken wir uns zunächst die *ganze* Kugel homogen mit ϱ belegt und dann die Belegung mit der Dichte $-\varrho$ in der Kalotte C' hinzugefügt. Bei der ersteren Belegung ist natürlich das Potential überall konstant $\bar{\psi} = \psi_0$, also nach (15) für $\alpha = \vartheta = \pi$ $\bar{\psi} = -2\varrho$, und bei der zweiten ist C wieder die *äußere* Kalotte, also das Potential:

$$\psi' = -4\varrho\cos^2\frac{\alpha}{2}\lg\cos\frac{\vartheta}{2} + 2\varrho\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\lg\sin^2\frac{\alpha}{2}\right), \quad (\vartheta < \alpha)$$

und man erhält im Ganzen für das innere Potential:

$$(16) \quad \psi_i = \bar{\psi} + \psi' = -4\varrho\cos^2\frac{\alpha}{2}\lg\cos\frac{\vartheta}{2} - 2\varrho\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \lg\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Am Rande $\vartheta = \alpha$ werden beide Ausdrücke einander gleich:

$$\psi_a = \psi_i = 2\varrho\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\lg\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\lg\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

§ 3. Die Erhaltung des Schwerpunktes.

Nach (9a) S. 221 ist für die Kugel:

$$2\varrho = D\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2},$$

also:

$$(1) \quad 2\varrho\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\sin\vartheta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)^2 - \frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)^2\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial\vartheta}(-\sin^2\vartheta\,\bar{\vartheta}\,\bar{\omega}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}(\sin\vartheta\,\bar{\omega}^2 - \sin\vartheta\,\bar{\vartheta}^2)$$

und somit, wenn man über den Bereich C nach ϑ und ω integriert[1]) und die rechte Seite in ein Randintegral über $\mathfrak{C}$ verwandelt:

$$(2) \quad \int^{(C)} 2\varrho\frac{\partial\psi}{\partial\omega}d\sigma = \int^{(\mathfrak{C})}\left(\tfrac{1}{2}(\bar{\omega}^2 - \bar{\vartheta}^2)\sin\vartheta\,d\vartheta - \bar{\vartheta}\,\bar{\omega}\sin^2\vartheta\,d\omega\right).$$

Wird hier der Bereich C über die ganze Kugelfläche K ausgedehnt, in welcher sich die Geschwindigkeit überall stetig ändern möge, so verschwindet die rechte Seite und es wird:

$$(2a) \quad \int^{(K)} 2\varrho\frac{\partial\psi}{\partial\omega}d\sigma = 0$$

oder, da nach (8) S. 221 $\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = -\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\cos\vartheta}{dt}$ ist und gleichzeitig $\frac{d}{dt}(\varrho\,d\sigma) = 0$:

1) Cf. Poincaré a. a. O. Nr. 65.

$$\frac{d}{dt}\int^{(K)} \varrho\, d\sigma \cos\vartheta = 0$$

oder

$$L_0 = \int^{(K)} \varrho\, d\sigma \cos\vartheta = \text{const.}$$

Nun ist $\cos\vartheta$ gleich der Projektion des zum Punkte $P(\vartheta, \omega)$ gehörenden Radius CP auf die Koordinatenachse CO, die aber willkürlich ist, und den Ausdruck $\varrho\, d\sigma$ hatten wir bereits S. 219 als „Wirbelelement" bezeichnet. Somit haben wir:

Satz I: *Die Summe aller Wirbelelemente auf der Kugel, jedes multipliziert mit der Projektion des zugehörigen Kugelradius auf eine beliebige feste Achse ist in der Zeit konstant.*

Sind also CX, CY, CZ drei auf einander senkrechte Achsen und ξ, η, ζ die entsprechenden Projektionen von OP, so wird:

$$(4) \qquad \begin{cases} L_x = \int^{(K)} \xi\varrho\, d\sigma = \text{const} \\ L_y = \int^{(K)} \eta\varrho\, d\sigma = \text{const} \\ L_z = \int^{(K)} \zeta\varrho\, d\sigma = \text{const}, \end{cases}$$

und diese drei Relationen sind von einander unabhängig, während jede weitere analoge Gleichung durch lineare Kombination aus ihnen hervorgehen würde. Die Gröfsen L_x, L_y, L_z sind die Komponenten eines Vektors, dessen Endpunkt (vom Kugelmittelpunkt C an gerechnet) ein fester Punkt S' im Raume ist, den wir als den „repräsentierenden Schwerpunkt" der Wirbelelemente bezeichnen. Wollten wir nämlich den wahren Schwerpunkt aller Elemente $\varrho\, d\sigma$ bestimmen, so wären seine Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 gegeben durch:

$$\xi_0 = \frac{L_x}{M}, \quad \eta_0 = \frac{L_y}{M}, \quad \zeta_0 = \frac{L_z}{M},$$

wo $M = \int^{(K)} \varrho\, d\sigma$, die Summe aller Wirbelelemente, nach Satz II, S. 209 bekanntlich $= 0$ ist. Der wahre Schwerpunkt fällt daher ins *Unendliche*, doch in eine feste, d. h. in der Zeit unveränderliche Richtung:

$$\xi_0 : \eta_0 : \zeta_0 = L_x : L_y : L_z,$$

und dabei würden von den drei unabhängigen Relationen (4) immer nur zwei zur Geltung kommen, während die Konstanz z. B. der Gröfse $L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ verloren ginge. Um diesem Übelstande zu entgehen, ersetzen wir die Massenverteilung mit der Dichte ϱ durch eine andere,

deren Summe nicht mehr $= 0$, sondern $= 1$ ist, indem wir die Dichte $\varrho' = \varrho + \frac{1}{4\pi}$ annehmen, also eine homogene Massenbelegung von der Dichte $\frac{1}{4\pi}$ und der Gesamtmasse 1 hinzufügen. Der Schwerpunkt dieser Belegung ϱ' hat dann die Koordinaten:

$$
(5) \quad \begin{aligned}
\xi_0' &= \int^{(K)} \xi \varrho' d\sigma = \int^{(K)} \xi \varrho d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int^{(K)} \xi d\sigma = \int^{(K)} \xi \varrho d\sigma = L_x = \text{const.} \\
\eta_0' &= \int^{(K)} \eta \varrho' d\sigma = \int^{(K)} \eta \varrho d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int^{(K)} \eta d\sigma = \int^{(K)} \eta \varrho d\sigma = L_y = \text{const.} \\
\zeta_0' &= \int^{(K)} \zeta \varrho' d\sigma = \int^{(K)} \zeta \varrho d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int^{(K)} \zeta d\sigma = \int^{(K)} \zeta \varrho d\sigma = L_z = \text{const.},
\end{aligned}
$$

fällt also zusammen mit dem oben definierten „repräsentierenden Schwerpunkt". Also:

Satz II. *Ist ϱ die Wirbeldichte einer kontinuierlichen Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit auf einer Vollkugel, und bildet man in jedem Augenblick den Schwerpunkt S' einer Massenbelegung mit der Dichte $\varrho + \frac{1}{4\pi}$, so ist dieser (immer im Endlichen liegende) „repräsentierende Schwerpunkt" S' ein fester Punkt im Raume bei allen Veränderungen der Geschwindigkeitsverteilung. Der wahre Schwerpunkt S aller Wirbelelemente dagegen fällt in den unendlich fernen Punkt desselben Durchmessers CS'.*

§ 4. Stationäre Strömungen.

Nach Satz IV S. 217 ist eine (von singulären Stellen freie) Strömung auf einer Fläche *stationär*, wenn auf jeder Stromlinie die Wirbeldichte konstant ist, d. h. wenn

$$\varrho = \tfrac{1}{2} D\psi = f(\psi),$$

eine Funktion der Stromfunktion allein ist. Diese Bedingung schreibt sich für die Kugel a) in Polarkoordinaten ϑ, ω, b) in stereographischen Koordinaten x, y (cf. II § 1) in der Form:

$$
(1) \quad \begin{cases}
\text{a)} \quad D\psi \equiv \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \cot\vartheta \dfrac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \dfrac{1}{\sin^2\vartheta} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2} = 2 f(\psi) \\
\text{b)} \quad \Delta\psi \equiv \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \dfrac{8 f(\psi)}{(1 + x^2 + y^2)^2}.
\end{cases}
$$

Die Bedingung (1a) wird sicher befriedigt, wenn $\frac{\partial \psi}{\partial \omega} = 0$, d. h. wenn $\psi = \psi(\vartheta)$ eine Funktion der Poldistanz allein und demnach auf allen Parallelkreisen konstant ist. Daraus folgt:

Satz I. *Alle „zonalen" Strömungen (welche symmetrisch um einen Durchmesser als Achse in den Parallelkreisen erfolgen) sind stationär.*

Bei diesem wie bei den folgenden Sätzen wird auch ohne ausdrückliche Erwähnung vorausgesetzt, daſs die Flüssigkeit inkompressibel, auf der Kugel unbegrenzt und von Strudelpunkten etc. frei sei.

Abgesehen von dem zonalen Falle klassifiziert man die stationären Strömungen mit Vorteil nach der Beschaffenheit der Funktion f.

Hier ergiebt sich zunächst, weil nach S. 209

$$\int^{(K)} \varrho \, d\sigma = \int^{(K)} f(\psi) \, d\sigma = 0$$

ist, daſs die Funktion f jedenfalls kein definites Vorzeichen haben kann. So kann *nicht* auf der ganzen Kugel

$$\varrho = \text{const}, \quad \varrho = c\psi^2 \quad \text{oder} \quad \varrho = c e^{g(\psi)}$$

sein.

Der einfachste Fall, der hier in Betracht kommt, wäre der, wo $f(\psi)$ eine *lineare* Funktion von ψ oder, was die Allgemeinheit nicht beschränkt sondern nur die additive Konstante von ψ beeinfluſst, wo die Wirbeldichte ϱ der Stromfunktion ψ proportional $= k\psi$ ist. Wir erhalten dann für ψ die partielle Differentialgleichung:

(2a) $$D\psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2} = 2k\psi$$

oder

(2b) $$\Delta \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{8k}{(1 + x^2 + y^2)^2} \psi.$$

Diese Differentialgleichung der *„linear-stationären Strömungen"*, wie wir uns zur Abkürzung ausdrücken wollen, ist identisch mit derjenigen, welche z. B. die elastischen Schwingungen der Kugelfläche bestimmt, und spielt auch in der Potentialtheorie eine wichtige Rolle. Ihre Integration erfolgt durch *Kugelfunktionen* („Laplacesche Funktionen", „Kugelflächenfunktionen", „Spherical harmonics"), und ihre Theorie ist vielfach ausführlich behandelt, z. B. bei Lamb a. a. O., und bei Maxwell, Treatise on Elect. a. Magn. Wir können uns hier darauf beschränken, die wichtigsten Ergebnisse dieser Theorie, soweit wir ihrer bedürfen, kurz anzugeben und auf ihre hydrodynamische Bedeutung für das hier vorliegende Problem hinzuweisen.

Zunächst ist zu beachten, daſs unsere Differentialgleichung linear und homogen ist, daſs sich also alle ihre Lösungen linear superponieren. Also:

Satz II. *Durch additive Übereinanderlagerung (d. h. durch Addition der entsprechenden Stromfunktionen oder Geschwindigkeitsvektoren)*

von zwei linear-stationären Strömungen, die zu demselben Werte k, wir wollen dafür sagen: zur selben „Klasse“, gehören, erhält man immer wieder linear-stationäre Strömungen derselben Klasse.

Unter den Lösungen $\psi = \psi(\vartheta, \omega)$ von (2a) interessieren zunächst die Funktionen $\psi = \psi(\vartheta)$ von ϑ allein, welche zonalen Strömungen entsprechen. Sie müssen der gewöhnlichen Differentialgleichung genügen:

$$\frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} + \cot\vartheta \frac{d\psi}{d\vartheta} - 2k\psi = 0. \tag{3}$$

Diese Differentialgleichung besitzt aber nur dann ein zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ stetiges partikuläres Integral, wenn

$$-2k = n(n+1) \tag{4}$$

und n eine positive *ganze Zahl* ist, welche die „Klasse“ der linear-stationären Strömung angiebt. Die Gleichung muſs also von der Form sein

$$\frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} + \cot\vartheta \frac{d\psi}{d\vartheta} + n(n+1)\psi = 0, \tag{3'}$$

und die gesuchte stetige Lösung ist dann die „$n$te Kugelfunktion“ (oder „Legendresches Polynom“) von $\cos\vartheta$:

$$\psi = P_n(\cos\vartheta), \quad \overline{\omega} = \frac{d\psi}{d\vartheta} = -\sin\vartheta\, P_n'(\cos\vartheta), \tag{5}$$

wo P_n eine ganze Funktion $n$ten Grades.

$n = 0$ liefert die triviale Lösung $\psi = \text{const}$, d. h. die völlige Ruhe der Flüssigkeit, $n = -k = 1$ dagegen die Lösung:

$$\psi = -\varrho = -\alpha\cos\vartheta, \quad \overline{\omega} = \alpha\sin\vartheta,$$

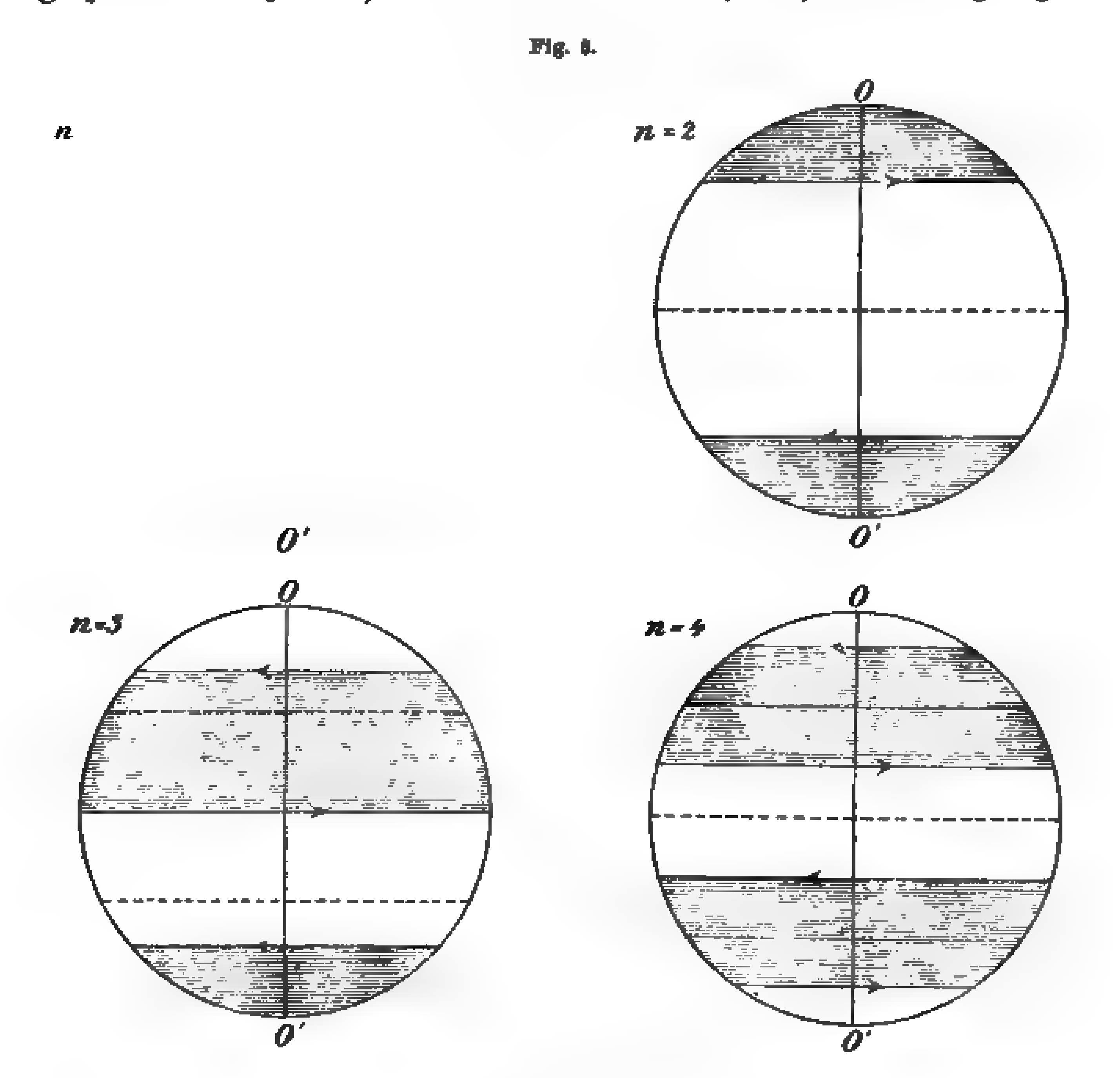
welche einer *starren Rotation* der gesamten Flüssigkeit um die Achse OO' mit der Winkelgeschwindigkeit α entspricht. Erst die höheren Kugelfunktionen $P_2, P_3 \ldots$ liefern eigentliche Strömungen mit wirklicher Deformation der Flüssigkeit.

Da $P_n(x)$ zwischen den Grenzen -1 und $+1$ bekanntlich $n$mal, $P_n'(x)$ $n-1$mal verschwindet, so giebt es (unter Ausschluſs der Pole O und O') immer n Parallelkreise, auf welchen die Stromfunktion und die Wirbeldichte ϱ, und, von ihnen separiert, $n-1$ Parallelkreise, auf welchen die Geschwindigkeit verschwindet. Beide Kreissysteme verteilen sich symmetrisch um den Äquator $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ (auf welchem selbst $\psi = 0$ und $\varrho = 0$ oder $\omega = 0$ ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist), und zerlegen die ganze Kugelfläche in $n+1$, bezw. n Zonen, auf welchen ϱ, bezw. ω abwechselnd positiv und negativ ist. Auf zwei

symmetrischen Parallelkreisen oberhalb und unterhalb des Äquators sind entweder die Werte der Wirbeldichte gleich und die der Geschwindigkeit entgegengesetzt (wenn n gerade) oder die der Geschwindigkeit gleich und die der Wirbeldichte entgegengesetzt (wenn n ungerade).

[Auf den beistehenden Figuren für $n = 1, 2, 3, 4$ (in orthographischer Projektion) sind die Parallelkreise $\varrho = 0$, $\psi = 0$ ausgezogen

Fig. 8.



und die Kreise $\overline{\omega} = 0$ punktiert gezeichnet, die Geschwindigkeitsrichtung durch Pfeile angedeutet und die Gebiete $\varrho > 0$ schraffiert].

Da aber der Pol O auf der Kugel willkürlich angenommen werden kann und die Lösungen ψ von (2) für jedes $2k = -n(n+1)$ sich additiv zusammensetzen lassen, so erhält man neue *nicht* achsial-symmetrische Strömungen, wenn man mehrere zu verschiedenen Polen gehörende zonale zu einander addiert:

$$\psi_n = c_1 P_n(\cos\vartheta_1) + c_2 P_n(\cos\vartheta_2) + \dots, \tag{6}$$

wo $\delta_1, \delta_2, \ldots$ die sphärischen Abstände von den Polen $P_1, P_2, \ldots$ bezeichnen.

Nun ist aber bekannt, daſs auch die partielle Differentialgleichung (2) *nur* in dem Falle (4) $2k = -n(n+1)$ überhaupt eine eindeutige und stetige Lösung auf der Vollkugel besitzt, und daſs die allgemeinste Lösung von dieser Beschaffenheit eine ganze rationale Funktion $n$ter Dimension von $\cos\vartheta$, $\cos\omega$ und $\sin\omega$ ist, welche sich mittelst $2n+1$ willkürlicher Konstanten in der Form darstellen läſst:

$$(7) \quad \psi = \psi_n = a_0 P_n(\cos\vartheta) + \sum_{r=1}^{n} (a_r \cos(r\omega) + b_r \sin(r\omega)) \sin^r\vartheta \, P_n^{(r)}(\cos\vartheta),$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ Konstanten sind und $P_n^{(r)}(x)$ die $r$te Ableitung von $P_n(x)$ bedeutet. Eine solche Funktion des Ortes auf der Kugel wird eine „Laplacesche Funktion" oder eine „Kugelflächenfunktion" genannt.

Wir erkennen somit:

Satz III. *Es giebt keine anderen kontinuierlichen linear-stationären Strömungen auf der Vollkugel als solche $n$ter Klasse.* ($2k = -n(n+1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$), *und die allgemeinste $n$ter Klasse läſst sich aus $2n+1$ von einander unabhängigen Grundströmungen linear zusammensetzen, deren Stromfunktionen sämtlich durch die „Kugelflächenfunktionen" $n$ten Grades dargestellt werden.*

Die Strömungen 1. Klasse

$$\psi = \psi_1 = a_0 \cos\vartheta + a_1 \sin\vartheta \cos\omega + b_1 \sin\vartheta \sin\omega$$
$$= a_0 \zeta + a_1 \xi + b_1 \eta$$

(wo ξ, η, ζ rechtwinklige Koordinaten mit dem Kugelmittelpunkt als Anfangspunkt bedeuten) sind lediglich starre *Rotationen* um beliebige Durchmesser und lassen sich stets aus drei verschiedenen Rotationen linear zusammensetzen.

Für höhere Werte von n zerfällt die ganze Kugelfläche in eine Anzahl von Teilgebieten, in deren Innerem Stromfunktion und Wirbeldichte abwechselnd positiv und negativ ist und an den durch Stromlinien gebildeten Grenzen verschwindet. Besonders einfach werden diese Gebiete für eine „Grundströmung"

$$(7\text{a}) \qquad \psi = \psi_{n,r} = \sin^r\vartheta \, P_n^{(r)}(\cos\vartheta) \cos(r\omega) \qquad (r = 0, 1, \ldots n)$$

Denn hier verschwinden (abgesehen von dem oben behandelten zonalen Fall $r = 0$, $\psi = P_n(\cos\vartheta)$) ψ und ϱ augenscheinlich

1) auf allen r Meridianen $\omega = \frac{\pi}{2r}, \frac{3\pi}{2r}, \cdots (2r-1)\frac{\pi}{2r}$, für welche $\cos(r\omega) = 0$ ist,

2) auf allen $n-r$ Parallelkreisen $\vartheta = \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-r}$, für welche $P_n^{(r)}(\cos\vartheta) = 0$ ist.

Hier zerfällt also die Kugelfläche in ein System von $r(n-r+1)$ rechtwinkligen sphärischen Vierecken (bezw. Dreiecken bei O und O'), deren Grenzen von Stromlinien gebildet sind, welche abwechselnd im positiven und negativen Sinne umkreist werden ($\varrho \gtrless 0$), und in deren Eckpunkten die Flüssigkeit beständig in Ruhe bleibt ($\dot{\bar{\vartheta}} = 0$, $\omega = 0$). In Merkatorscher Projektion erhält man demnach eine schachbrettartige Figur wie die beistehende Fig. 4.

Für andere, zusammengesetzte Kugelflächenfunktionen (6) werden die Teilbereiche unregelmäfsiger, aber der allgemeine Charakter des Vorganges bleibt derselbe. Mittelst der Laméschen Funktionen würden wir z. B. Einteilungen durch konfokale sphärische Kegelschnitte erhalten. Doch soll darauf nicht weiter eingegangen werden.

Fig. 4.

Hätten wir statt der Vollkugel nur ein bestimmt umrandetes *Gebiet* C betrachtet und nach den dort möglichen stationären Strömungen gefragt, so wären wir auf die Randwertprobleme der Differentialgleichung (1) oder (2) gestofsen. Denn da die Berandung immer selbst eine Stromlinie sein mufs, so hätten wir unsere partielle Differentialgleichung unter der Randbedingung $\psi = \psi_0 = \text{const}$ zu integrieren gehabt. Bezüglich der Differentialgleichung (2) in der Form (2b) kann dieses Problem als gelöst betrachtet werden durch die Untersuchungen von Schwarz (Festschrift „Über ein Problem der Variationsrechnung etc." 1885). Die Lösung der Randwertaufgabe für irgend ein $\psi_0 > 0$ ist immer möglich (für beliebiges k), wenn das Gebiet C nicht zu grofs gewählt wird. Dagegen existiert für jedes Gebiet C immer ein Wert k derart, dafs an dem Rande überall $\psi = \psi_0 = 0$ wird. Unter analogen Bedingungen ist aber nach Picard (Liouville Journ., Ser. IV, t. 6, p. 145ff.) die Randwertaufgabe auch lösbar für die Diffgl. (1b), wenn die Funktion f eine nicht lineare Funktion ist; es giebt also stationäre, aber *nicht*-linear-stationäre Strömungen wenigstens in hinreichend kleinen umrandeten *Bereichen* der Kugelfläche. Ob aber auch auf der Vollkugel solche allgemeineren stationären Strömungen

möglich sind, diese Frage ist als noch ungelöst zu bezeichnen. Jedenfalls bedürfte es zu dieser Untersuchung wohl eines wesentlich anderen Integrationsverfahrens als der Schwarz-Picardschen Approximationsmethode.

Den stationären Strömungen am nächsten stehen die *„rotierend-stationären"*, d. h. solche Strömungen, bei denen das ganze Bild der Stromlinien oder die Stromfunktion ψ als Funktion des Ortes auf der Kugel zwar nicht konstant bleibt, aber doch nur eine gleichförmige Rotation um eine feste Achse erfährt, oder m. a. W., die Strömungen, welche, auf ein gleichförmig rotierendes Koordinatensystem bezogen, stationär erscheinen.

Ist $\psi(\vartheta, \omega)$ die wahre Stromfunktion und nach S. 232 $\psi_1 = -\alpha \cos\vartheta$ die einer Rotation, so wird

$$\psi - \psi_1 = \psi + \alpha \cos\vartheta$$

die „scheinbare" oder „relative Stromfunktion" in Bezug auf die rotierende Kugel, und auf den „scheinbaren" Stromlinien $\psi - \psi_1 = \text{const}$ mufs jetzt, wenn die „scheinbare Strömung" stationär sein soll, die wahre Wirbeldichte $\varrho = \frac{1}{2} D\psi$ konstant sein (da eben diese jedem materiellen Teilchen charakteristisch ist), damit die Wirbelverteilung, auf die rotierende Kugel bezogen, ungeändert bleibt, d. h. es mufs sein:

$$(8) \qquad \varrho = \tfrac{1}{2} D\psi = f(\psi - \psi_1) = f(\psi + \alpha \cos\vartheta).$$

Auch hier betrachten wir ebenso wie bei der Diffgl. (1) vor allem den Spezialfall

$$f(u) = ku = -\frac{n(n+1)}{2}\, u,$$

also die Gleichung:

$$(9) \qquad D\psi + n(n+1)\psi = -n(n+1)\,\alpha \cos\vartheta.$$

Eine partikuläre Lösung derselben ist die neue Rotation

$$(10) \qquad \psi_0 = c \cos\vartheta = -\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}\,\alpha \cos\vartheta,$$

wie man sich mit Hilfe von $D \cos\vartheta = -2\cos\vartheta$ durch Ausrechnung leicht überzeugt, und die allgemeine Lösung von (9) erhält man, wenn man zu dieser partikulären ψ_0 die allgemeine Lösung ψ' der homogenen Diffgl. (2) hinzufügt, also nach (7):

$$(11) \qquad \psi = \psi_0 + \psi' = -\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}\,\alpha \cos\vartheta + a_0 P_n(\cos\vartheta)$$
$$+ \sum_{r=1}^{n} (a_r \cos r\omega + b_r \sin r\omega) \sin^r\vartheta\, P_n^{(r)}(\cos\vartheta).$$

So haben wir den Satz:

Satz IV. *Aus jeder linear-stationären Strömung* $2k = -n(n+1)$ *kann man eine mit der Winkelgeschwindigkeit* α *rotierend-stationäre ableiten durch bloſse Hinzufügung einer Rotation von der Winkelgeschwindigkeit* $c = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}\alpha$ *um dieselbe Achse. Oder anders ausgedrückt: Eine linearstationäre Strömung nter Klasse verbunden mit einer beliebigen Rotation c rotiert gleichförmig um dieselbe Achse mit der Winkelgeschwindigkeit* $\alpha = c\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$.

Die Theorie der rotierend-stationären Strömungen hat ein physikalisches Interesse, insofern sie sich anwenden läſst auf stationäre Luft- oder Wasserströmungen auf der rotierenden Erde.

Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball.

Von F. KLEIN in Göttingen.

Sir Robert Ball hat seine langjährigen Untersuchungen über Schraubentheorie im vorigen Jahre in einem stattlichen Bande zusammengefaſst[1]), der nicht verfehlen kann, dieser geometrischen Weiterbildung der Mechanik starrer Körper erneut das allgemeine Interesse zuzuwenden. Zwei Vorzüge sind es insbesondere, die dem Ballschen Werke von vornherein einen zahlreichen Leserkreis sichern dürften, nämlich die *Anschaulichkeit* und der *elementare Charakter* seiner grundlegenden Entwickelungen. Ich wünsche diese Vorzüge lebhaft anzuerkennen, will aber andererseits hervorheben, daſs dieselben von einem gewissen Verzicht auf die Darlegung der im weiteren Verfolg der Theorie notwendig in Betracht kommenden tiefer greifenden Fragen begleitet werden (wie dies übrigens der Verfasser selbst an verschiedenen Stellen seines Buches deutlich hervorhebt.[2]))

---

1) A treatise on the theory of screws, Cambridge 1900.

2) Man vergl. z. B. die amüsante Auseinandersetzung, die der Verf. 1887 über die Ziele seiner Untersuchungen vor der British Association in Manchester gab und die nun aus den bez. Reports auf pg. 496—509 des vorliegenden Buches wieder abgedruckt ist. Eine Kommission ist niedergesetzt, um die Bewegungen eines starren Körpers zu untersuchen. „Let is suffice for us", sagt der Präsident der Kommission gleich zu Anfang, „to experiment upon the dynamics of this body so long it remains in or near the position it now occupies. We may leave to *some more ambitious committee* the task of following the body in all conceivable gyrations through the universe".

Jedenfalls möchte ich im Folgenden einige Ergänzungen zum Ballschen Werke geben, die manchem Leser willkommen sein dürften. Diese Ergänzungen betreffen erstlich die *allgemeine Systematik* des Gebietes im Sinne moderner invariantentheoretischer (oder gruppentheoretischer) Prinzipien, zweitens aber die Verwendung der Schraubentheorie in der Lehre von den *endlichen* Bewegungen starrer Körper (wo ich übrigens in der Hauptsache nur systematisch zusammenstelle, was zerstreut in der Litteratur vorliegt). Ich darf vielleicht hinzufügen, dafs ich die betreffenden Überlegungen seit Jahren in Vorlesungen und gelegentlichen Vorträgen wiederholt zur Geltung gebracht habe; speziell knüpfe ich mit den Darlegungen der nächstfolgenden Paragraphen an meine eigenen Beiträge zur Liniengeometrie und Schraubentheorie aus den Jahren 1869 und 1871[1]), sowie an die Auseinandersetzung meines Erlanger Programmes von 1872[2]) an. Es hat seinen guten Sinn, dafs ich mich dabei von vornherein der Methoden der *analytischen* Geometrie bediene; in der That meine ich, dadurch die in Betracht kommenden Beziehungen kürzer und präziser bezeichnen zu können, als dies auf andere Weise möglich wäre.

§ 1. Von der rationellen Klassifikation geometrischer und mechanischer Gröfsen.

Als *Hauptgruppe räumlicher Änderungen* bezeichnete ich in meinem Erlanger Programme den Inbegriff der Bewegungen des Raumes und seiner Ähnlichkeitstransformationen. Es möge ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde gelegt werden; ich deute an, wie die Operationen der Hauptgruppe auf die zugehörigen Punktkoordinaten wirken. Wir haben erstlich für *Drehungen um den Anfangspunkt* Formeln folgender Bauart:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = a\,x + b\,y + c\,z, \\ y_1 = a'\,x + b'\,y + c'\,z, \\ z_1 = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

dabei hat man zwischen den $a, b, c, \cdots$ die bekannten Relationen und insbesondere ist jede dieser Gröfsen gleich der ihr in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

1) Math. Annalen, Bd. 2 und 4. Vgl. insbesondere die „Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper" in Bd. 4 daselbst, pg. 403—415.

2) „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" (Erlangen 1872), abgedruckt in Bd. 43 der Math. Annalen und anderwärts.

zugehörigen Unterdeterminante. Wir haben ferner für *Parallelverschiebungen des Raumes* Formeln, die ich so bezeichne:

(2) $$x_1 = x + A, \quad y_1 = y + B, \quad z_1 = z + C,$$

endlich für diejenigen *Ähnlichkeitstransformationen,* die den Koordinatenanfangspunkt festlassen:

(3) $$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \lambda y, \quad z_1 = \lambda z;$$

unter ihnen mögen wir die *Inversionen*

(4) $$x_1 = -x, \quad y_1 = -y, \quad z_1 = -z$$

besonders hervorheben. Die Formeln für beliebige Transformationen der Hauptgruppe ergeben sich aus (1), (2), (3) durch Kombination; wir mögen dementsprechend die (1), (2), (3) als *erzeugende Substitutionen* der Hauptgruppe bezeichnen. Es handelt sich dabei zunächst um *Raumtransformationen bei festem Koordinatensystem.* Es steht aber nichts im Wege, die Formeln auch so zu interpretieren, dafs sie bei festgehaltenem Raume den Übergang je zu einem neuen rechtwinkligen Koordinatensysteme vorstellen (so dafs es sich bei den Operationen der Hauptgruppe überhaupt um die allgemeinste Transformation der rechtwinkligen Koordinaten handelt). Wir werden in der Folge diese Auffassung, die zumal bei den Verallgemeinerungen eine Kleinigkeit bequemer scheint, bevorzugen. Die Formeln (1) und (2) ergeben dann zusammengenommen die allgemeinste Abänderung des rechtwinkligen Koordinatensystems durch *Bewegung,* Formel (4) den Übergang zu einem *inversen Koordinatensystem,* Formel (3) für die allein nur noch in Betracht kommenden positiven Werte von λ die allgemeinste Abänderung, welche aus geänderter Wahl der *Längeneinheit* resultiert.

Wir legen nunmehr nicht blofs Punkte sondern *beliebige andere geometrische Gebilde* hinsichtlich unseres Koordinatensystems durch „Koordinaten" fest, wobei wir uns diese Gebilde in geeigneter Weise durch Punkte definiert denken, so dafs ihre „Koordinaten" Verbindungen verschiedener Reihen von Punktkoordinaten sind. *Den Inbegriff der solcherweise zur Festlegung eines geometrischen Gebildes dienenden Koordinaten mögen wir jeweils als „geometrische Gröfse" bezeichnen.* Und nun ruht die rationelle Klassifikation geometrischer Gröfsen, von der im folgenden ausgegangen werden soll, einfach darauf, dafs wir zusehen, wie sich die in Betracht kommenden Koordinaten bei den Operationen (1), (2), (3) bez. (4) (und also überhaupt bei den Operationen der Hauptgruppe) verhalten. *Wir werden alle diejenigen und nur diejenigen geometrischen Gröfsen als gleichartig ansehen, deren Koordinaten bei den Operationen der Hauptgruppe die gleichen Änderungen erleiden.*

Erleiden aber die Koordinaten zweier Gebilde verschiedene Änderungen, so ergiebt sich die geometrische Beziehung der beiden Arten geometrischer Gröſsen zu einander unmittelbar und in erschöpfender Weise durch den Vergleich der beiderlei Änderungen. —

Ausführungen zu diesem Prinzip enthält u. a. der neuerdings erschienene Artikel von Abraham über die geometrischen Grundbegriffe in der Mechanik der deformierbaren Körper, Bd. IV der mathematischen Encyklopädie, Art. 14. In der Sache hat man selbstverständlich immer dem Prinzip entsprechend verfahren. Insbesondere ist die in der Mechanik (und Physik) übliche Unterscheidung der geometrischen Gröſsen nach ihrer *Dimension* nichts anderes als eine Inbetrachtnahme der Substitutionen (3) im Sinne unseres Prinzips (wobei man sich stillschweigend auf positive Werte von λ beschränkt). In dieser Bemerkung liegt zugleich, wie unser Prinzip auf allgemeine, mechanische oder physikalische Gröſsen auszudehnen ist. Es ist weiterhin bequem neben der *Längeneinheit* und *Zeiteinheit* nicht, wie sonst üblich, eine Masseneinheit, sondern eine *Krafteinheit* eingeführt zu denken. Man wird daraufhin den Formeln (3) noch diejenigen zur Seite stellen, die sich auf die *Änderung der Zeiteinheit*, bez. die *Änderung der Krafteinheit* beziehen:

(5) $$t_1 = \varrho t,$$ (6) $$P_1 = \sigma P;$$

man wird dann sagen, daſs die Formeln (1)—(6) zusammen die *Hauptgruppe der Mechanik* (bez. der *Physik*) definieren, und ferner die mechanischen (bez. physikalischen) Gröſsen nach dem *Verhalten* einteilen, *welches ihre Koordinaten bei den Operationen dieser Hauptgruppe zeigen.* Übrigens werden wir auf diese erweiterten Festsetzungen nur bei Gelegenheit zurückkommen; für die laufenden Entwickelungen genügt uns die Inbetrachtnahme der räumlichen Hauptgruppe.

§ 2. Koordinaten für die unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers, sowie für die an ihm angreifenden Kraftsysteme.

Eine unendlich kleine Bewegung mag durch folgende Formeln vorgestellt sein:

(7) $$\begin{cases} dx = (-ry + qz + u)\,dt, \\ dy = (-pz + rx + v)\,dt, \\ dz = (-qx + py + w)\,dt. \end{cases}$$

Wir bezeichnen die Gröſsen

(8) $$p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w$$

als die *Koordinaten der instantanen Geschwindigkeit*, dagegen die Gröfsen

$$(9) \qquad pdt,\ qdt,\ rdt,\ udt,\ vdt,\ wdt$$

als die *Koordinaten der unendlich kleinen Bewegung* selbst.

Kräfte am starren Körper stellen wir in üblicher Weise durch Strecken dar, welche auf bestimmte gerade Linien aufgetragen und längs dieser geraden Linien verschiebbar sind. Dabei werden wir die Länge dieser Strecken je der Gröfse der Kräfte gleich setzen; es ist gleichgiltig, ob wir uns dabei die Kräfte sämtlich als Stofskräfte oder als kontinuierlich wirkende Kräfte denken.[1]) Es seien x, y, z bez. x', y', z' Anfangs- und Endpunkt einer „linienflüchtigen" Strecke. *Dann hat man in üblicher Weise als Koordinaten derselben:*

$$x'-x,\quad y'-y,\quad z'-z,\quad yz'-y'z,\quad zx'-z'x,\quad xy'-x'y;$$

dieselben sechs Gröfsen werden als Koordinaten der Kraft gelten, sofern man die Länge l der Strecke gleich der Zahl P gewählt hat, welche die Gröfse der Kraft mifst. Wollen wir die Abhängigkeit von der Wahl der Krafteinheit und der Längeneinheit deutlicher hervorkehren, so wird es zweckmäfsiger sein, als Koordinaten der Kraft folgende sechs Gröfsen zu bezeichnen:

$$\frac{P}{l}(x'-x),\ \frac{P}{l}(y'-y),\ \frac{P}{l}(z'-z),\ \frac{P}{l}(yz'-y'z),\ \frac{P}{l}(zx'-z'x),\ \frac{P}{l}(xy'-x'y).$$

Als *Kräftesystem* bezeichnen wir den Inbegriff beliebig vieler auf den starren Körper wirkender Einzelkräfte, und wählen als Koordinaten desselben die Summen der zusammengehörigen Koordinaten dieser Einzelkräfte. *Solcherweise erhalten wir als Koordinaten eines Kräftesystems die sechs Gröfsen:*

$$(10)\quad \begin{aligned} X&=\sum\frac{P_i}{l_i}(x_i'-x_i), & Y&=\sum\frac{P_i}{l_i}(y_i'-y_i), & Z&=\sum\frac{P_i}{l_i}(z_i'-z_i),\\ L&=\sum\frac{P_i}{l_i}(y_iz_i'-y_i'z_i), & M&=\sum\frac{P_i}{l_i}(z_ix_i'-z_i'x_i), & N&=\sum\frac{P_i}{l_i}(x_iy_i'-x_i'y_i). \end{aligned}$$

Es wird nunmehr darauf ankommen, zuzusehen, wie sich die Koordinaten p, q, r, u, v, w (8) und die jetzt eingeführten X, Y, Z, L, M, N bei den Operationen (1)—(6) der Hauptgruppe verhalten. Ich stelle hier die Resultate einfach zusammen:

1) *Drehung um den Koordinatenanfangspunkt* (Formel (1)).

---

1) Die Unterscheidung tritt erst ein, wenn wir zur Kinetik schreiten, wo dann die Verabredung sein wird, dafs die Einheit der Stofskraft an irgend einem Massenpunkte instantan dieselbe Geschwindigkeitsänderung hervorbringt, wie die Einheit der kontinuierlichen Kraft während der Zeiteinheit.

Die Koordinaten p, q, r und die u, v, w, andererseits die X, Y, Z und die L, M, N erleiden je für sich genau dieselbe Substitution wie die Punktkoordinaten x, y, z. (Dies Resultat ruht wesentlich auf dem oben hervorgehobenen Umstande, dafs die Substitutionskoeffizienten a, $b, c, \ldots$ ihren bez. Unterdeterminanten gleich sind.)

2) *Verschiebung* (Formel (2)).

Die p, q, r, andererseits die X, Y, Z bleiben ungeändert. Dagegen erleiden die u, v, w die folgende Substitution:

$$(11) \qquad \begin{cases} u_1 = u - Cq + Br, \\ v_1 = v - Ar + Cp, \\ w_1 = w - Bp + Aq \end{cases}$$

und genau entsprechende Formeln ergeben sich für L, M, N:

$$(11') \qquad \begin{cases} L_1 = L - CY + BZ, \\ M_1 = M - AZ + CX, \\ N_1 = N - BX + AY. \end{cases}$$

3) *Ähnlichkeitstransformation* (Formel (3), bez. (4)).

Ist λ positiv, so werden

$$(12) \qquad p_1, q_1, r_1, u_1, v_1, w_1 \text{ bez. gleich } p, q, r, \lambda u, \lambda v, \lambda w$$

und genau so

$$(12') \quad X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 \text{ bez. gleich } X, Y, Z, \lambda L, \lambda M, \lambda N.$$

Dagegen tritt bei *negativem* λ ein Unterschied ein, der sich am einfachsten darin ausprägt, dafs bei *Inversion*

$$(13) \qquad p_1, q_1, r_1, u_1, v_1, w_1 \text{ gleich } p, q, r, -u, -v, -w,$$

dagegen

$$(13') \quad X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 \text{ gleich } -X, -Y, -Z, L, M, N$$

werden. (Dieser Unterschied kommt dadurch hervor, dafs die in den Formeln (10) auftretenden Längen l_i absolute Beträge sind, welche als solche ihr Vorzeichen bei Inversion nicht wechseln.)

4) *Änderung der Zeiteinheit* (Formel (5)).

$$(14) \quad p_1, q_1, r_1, u_1, v_1, w_1 \text{ sind bez. gleich } \frac{p}{\varrho}, \frac{q}{\varrho}, \frac{r}{\varrho}, \frac{u}{\varrho}, \frac{v}{\varrho}, \frac{w}{\varrho};$$

die Koordinaten des Kräftesystems bleiben ungeändert.

5) *Änderung der Krafteinheit* (Formel (6)).

Die p, q, r, u, r, w bleiben ungeändert, dagegen werden

$$(15) \quad X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 \text{ bez. gleich } \sigma X, \sigma Y, \sigma Z, \sigma L, \sigma M, \sigma N.$$

Indem wir uns der Kürze halber auf die *Hauptgruppe räumlicher Änderungen* beschränken, werden wir zusammenfassend sagen können:

Bei blofser Bewegung des Koordinatensystems, ebenso auch bei Ähnlichkeitstransformation von positivem Ähnlichkeitsmodul, transformieren sich die Kraftkoordinaten

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad L, \quad M, \quad N$$

genau wie die Geschwindigkeitskoordinaten

$$p, \quad q, \quad r, \quad u, \quad v, \quad w.$$

Dagegen tritt bei Inversion des Koordinatensystems ein abweichendes Verhalten ein; während die

$$p, \; q, \; r, \; u, \; v, \; w \quad \text{in} \quad p, \quad q, \quad r, \; -u, \; -v, \; -w$$

übergehen, verwandeln sich die

$$X, \; Y, \; Z, \; L, \; M, \; N \text{ bez. in } -X, \; -Y, \; -Z, \quad L, \quad M, \quad N.$$

§ 3. Die Analogie der unendlich kleinen Bewegungen und der Kräftesysteme (beim starren Körper). Schraubengröfsen der ersten und zweiten Art. Ballsche Schrauben.

Durch die Formeln des vorigen Paragraphen ist die Analogie von unendlich kleinen Bewegungen und Kräftesystemen, welche die ganze Mechanik der starren Körper und insbesondere die Ballsche Schraubentheorie durchzieht, auf das klarste begründet und gleichzeitig umgrenzt.

Bemerken wir vorab, dafs das Gröfsensystem

$$pdt, \quad qdt, \quad rdt, \quad udt, \quad vdt, \quad wdt$$

vermöge der Formeln (7) ohne weiteres eine (unendlich kleine) *Schraubung* des Raumes der x, y, z (von bestimmter Achse, Ganghöhe und Amplitude) bedeutet, das Gröfsensystem der

$$p, \quad q, \quad r, \quad u, \quad v, \quad w$$

dementsprechend eine *Schraubungsgeschwindigkeit.* Ich will in diesem Sinne den Inbegriff der p, q, r, u, v, w fortan als eine *Schraubengröfse* bezeichnen, genauer, wenn es darauf ankommt, als eine *Schraubengröfse erster Art.*

Nunmehr wolle man den Inbegriff der Koordinaten eines Kräftesystems, also die in (10) definierten

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad L, \quad M, \quad N$$

zum Vergleich heranziehen. Wir wollen insbesondere ein Kräftesystem und eine Schraubengröfse erster Art in Zusammenhang bringen, indem wir setzen:

$$X = p, \quad Y = q, \quad Z = r, \quad L = u, \quad M = v, \quad N = w,$$

und uns fragen, wie weit diese Zusammenordnung *eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung* hat (also gegenüber den Operationen der Hauptgruppe invariant ist). Zunächst ergeben die Formeln (14), (15) des vorigen Paragraphen, *dafs die Zuordnung von der Wahl der Zeiteinheit und der Krafteinheit abhängig ist.* Ferner aber ergeben die Formeln für Drehung, Parallelverschiebung und Ähnlichkeitstransformation mit positivem Ähnlichkeitsmodul, *dafs die Zuordnung von allen in diese Worte einbegriffenen Änderungen des räumlichen Koordinatensystems unabhängig ist.* Endlich die Formeln (13), (13'), *dafs sich die Zuordnung bei Inversion in ihr Gegenteil verkehrt:*

$$(17)\quad X_1 = -p_1,\ Y_1 = -q_1,\ Z_1 = -r_1,\ L_1 = -u_1,\ M_1 = -v_1,\ N_1 = -w_1.$$

Die geometrische Überlegung bestätigt das so formulierte Resultat natürlich Schritt für Schritt. Ich will, um dies im Detail auszuführen, angeben, dafs die *Achse* der Schraubengeschwindigkeit p, q, r, u, v, w die Linienkoordinaten hat:

$$(18)\qquad p : q : r : u - kp : v - kq : w - kr$$

wo der „Parameter“

$$(18')\qquad k = \frac{pu + qv + rw}{p^2 + q^2 + r^2},$$

und dafs die *Drehgeschwindigkeit* um diese Achse die Komponenten p, q, r, die *Translationsgeschwindigkeit* längs der Achse die Komponenten kp, kq, kr besitzt. Genau entsprechend kann man bei einem Kräftesystem X, Y, Z, L, M, N eine *Zentralachse* finden, deren Linienkoordinaten durch

$$(19)\qquad X : Y : Z : L - kX : M - kY : N - kZ$$

gegeben sind, unter k die Gröfse

$$(19')\qquad k = \frac{XL + YM + ZN}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

verstanden, und das Kräftesystem läfst sich dann auf eine *Einzelkraft* mit den Komponenten X, Y, Z entlang dieser Achse und ein *Paar* mit den Komponenten kX, kY, kZ in einer zur Achse senkrechten Ebene reduzieren. Die Zusammenordnung verlangt, der Drehgeschwindigkeit *um* die Achse die *längs* der Achse wirkende Einzelkraft und der *in Richtung* der Achse liegenden Translationsgeschwindigkeit ein Paar in einer zur Achse *senkrechten* Ebene gleich zu setzen. Hierzu ist selbstverständlich eine vorherige Verständigung über die Zeiteinheit und die Krafteinheit notwendig. Erst wenn dies geschehen, kann man sagen, dafs die *Intensität* eines Kräftesystems (gemessen durch $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$) gleich der durch $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ gemessenen *Intensität*

einer Geschwindigkeit sei. *Darüber hinaus aber brauchen wir eine Verabredung, welchen Sinn um die Achse man einem entlang der Achse weisenden Sinne zuweisen will;* — ob denjenigen Sinn um die Achse, der beim Entlangblicken längs der Achse in der vorgegebenen Richtung durch die Bewegung des Uhrzeigers gegeben ist, oder den entgegengesetzten. Erst durch diese Verabredung wird die Zusammenordnung von Kräftesystem und Geschwindigkeit eindeutig. *Jede solche Verabredung verwandelt sich aber bei Inversion der Figur bekanntlich in ihr Gegenteil,* und dies ist, was durch Formel (17) ausgedrückt wird. —

Der Inbegriff der $(X\,Y\,Z\,L\,M\,N)$ steht also zwar dem Inbegriff der $(p\,q\,r\,u\,v\,w)$, d. h. der Schraubengröfse erster Art sehr nahe, ist aber nicht selbst eine Schraubengröfse erster Art. Wir werden ihn als *Schraubengröfse zweiter Art* bezeichnen. Die Zusammenordnung der beiderlei Gröfsenarten aber werden wir so in Worte fassen, dafs wir sagen:

Nachdem Zeiteinheit und Krafteinheit festgelegt sind, gehören zu einer Schraubengröfse zweiter Art immer noch zwei (entgegengesetzt gleiche) Schraubengröfsen erster Art, und umgekehrt; die Zusammengehörigkeit wird erst eine eindeutige, wenn man im angegebenen Sinne eine Verabredung über rechts und links hinzufügt.

Neben die so besprochenen Schraubengröfsen erster und zweiter Art treten dann *drittens* als engverwandte geometrische Gebilde die *Ballschen Schrauben* selbst. Die Ballsche Schraube ist der Inbegriff der um eine Axe herumgelegten Schraubenlinien von gegebenem Windungssinn, die eine bestimmte Ganghöhe haben, oder, wie Ball sagt, der Inbegriff von Zentralaxe und Parameter (pitch). Die so definierte Ballsche Schraube ist mit dem Nullsystem, das jedem Punkte die Normalebene der durch ihn gehenden Schraubenlinien zuordnet, oder auch mit dem linearen Linienkomplex, der von den Normalen sämtlicher Schraubenlinien gebildet wird, eineindeutig zusammengeordnet; ob ich von der Ballschen Schraube, dem Nullsystem oder dem linearen Komplex spreche, ist für den hier vertretenen Standpunkt dasselbe. Jedes dieser Gebilde wird durch die *Verhältnisse* $X:Y:Z:L:M:N$ der Koordinaten einer Schraubengröfse zweiter Art, oder auch durch die *Verhältnisse* $p:q:r:u:v:w$ der Koordinaten oder Schraubengröfse erster Art festgelegt. In der That verschwindet, wenn man sich auf die Betrachtung dieser „Verhältnisse“ beschränkt, der Unterschied der beiden Arten von Schraubengröfsen. *Entsprechend giebt es nur eine Art Ballscher Schrauben.* Zu jeder Ballschen Schraube gehören unendlich viele Schraubengröfsen erster wie zweiter Art, die sich unter einander durch Intensität und Sinn unterscheiden.

Hiermit dürfte der Zusammenhang der verschiedenen in Betracht kommenden Gebilde so vollständig dargelegt sein, als man wünschen mag. Die einzelne „Schraube“ ist Trägerin von unendlich vielen „Schraubengröfsen erster und zweiter Art“. Indem wir die letzteren sprachlich unterscheiden, dürfte zugleich dem immer wiederkehrenden Mifsverständnisse, als handele es sich bei der Zusammenordnung der zweierlei Schraubengröfsen um einen *kausalen* Zusammenhang, nach Möglichkeit vorgebeugt sein.[1])

§ 4. Über die Invarianten der Schraubengröfsen und die Begründung der Artunterscheidung aus dem Arbeitsbegriff.

Die gegenseitige Beziehung der beiden Arten von Schraubengröfsen findet einen sehr prägnanten Ausdruck, wenn man ihre *Invarianten* betrachtet, d. h. diejenigen aus ihren Koordinaten gebildeten rationalen ganzen Funktionen, welche gegenüber den Operationen der Hauptgruppe entweder überhaupt ungeändert bleiben oder sich nur um einen Faktor ändern. Ich werde mich hier der Kürze wegen auf diejenigen Operationen der Hauptgruppe beschränken, die entweder *Bewegungen* vorstellen oder aus Bewegungen durch Hinzutreten einer Inversion entstehen, und die ich mit Herrn Study als *Umlegungen* bezeichnen will.

Als Invarianten der einzelnen Schraubengröfse ergeben sich bekanntlich erstens die Ausdrücke:

$$(20) \qquad p^2+q^2+r^2 \quad \text{bez.} \quad X^2+Y^2+Z^2,$$

die bei Bewegungen und Umlegungen gleichmäfsig ungeändert bleiben, zweitens aber die folgenden:

$$(21) \qquad pu+qv+rw \quad \text{bez.} \quad XL+YM+ZN;$$

dieselben bleiben bei beliebigen Bewegungen ungeändert, kehren aber bei Umlegungen (wie aus ihrem Verhalten bei Inversion hervorgeht) ihr Zeichen um. Wir werden dementsprechend die (20) als *gerade*

1) Vergl. die Erörterungen in meiner oben genannten Notiz, Math. Ann. Bd. 4 pg. 403 ff. Die Hartnäckigkeit des Mifsverständnisses hat offenbar eine psychologische Wurzel. Wir sind durch unsere tägliche Beschäftigung gewöhnt, wenn wir eine Einzelkraft auf einen Körper wirken lassen, diese auf den Schwerpunkt des Körpers zu richten, worauf sie natürlich Translation des Körpers erzeugt. Von hier aus hat sich zwischen den beiden Dingen (Einzelkraft und Translation) ein Assoziation gebildet, die sich in unseren Überlegungen unwillkürlich immer wieder geltend macht, wenn man sie nicht durch eine immer wiederholte Erklärung und eine möglichst unzweideutige Sprechweise ausdrücklich abschneidet.

Invarianten bezeichnen, die (21) als *schiefe*, oder auch die (20) als *Skalare der ersten Art*, die (21) als *Skalare der zweiten Art.*[1])

Die hiermit eingeführte Unterscheidung überträgt sich selbstverständlich auf diejenigen „simultanen" Invarianten zweier Schraubengrößen derselben Art, die sich aus den (20), bez. (21) durch „Polarisieren" ergeben. Ich will hier nur die Polaren der Ausdrücke (21) betrachten:

$$(22)\qquad \begin{cases} pu' + qv' + rw' + p'u + q'v + r'w, \\ XL' + YM' + ZN' + X'L + Y'M + Z'N. \end{cases}$$

Indem dieselben auch ihrerseits Skalare zweiter Art sind, folgt:

Satz I. *Die*

$$p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w$$

sind zu den

$$u,\ v,\ w,\ p,\ q,\ r, \text{ —}$$

und ebenso natürlich die

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

zu den

$$L,\ M,\ N,\ X,\ Y,\ Z \text{ —},$$

bei Bewegungen direkt kontragredient, bei Umlegungen kontragredient mit Zeichenwechsel.

Dem entgegen betrachte man nun den Ausdruck, der sich nach Analogie von (22) bilinear aus den Koordinaten zweier Schraubengrößen verschiedener Art zusammensetzt:

$$(23)\qquad Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr.$$

Es folgt sofort, daſs derselbe nicht nur bei Bewegungen, sondern (wegen seines Verhaltens bei Inversion) auch bei Umlegungen durchaus ungeändert bleibt; *er ist ein Skalar erster Art.* Daher kommt:

Satz II. *Die*

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

sind zu den

$$u,\ v,\ w,\ p,\ q,\ r$$

sowohl bei Bewegungen wie bei Umlegungen schlechtweg kontragredient.

Durch diesen Satz dürfte die Zusammengehörigkeit der beiden Arten von Schraubengröſsen in einfachster Weise bezeichnet sein. Verbinden wir ihn mit Satz I, so fallen wir auf die Analogie der zweierlei Schraubengröſsen zurück, die der Gegenstand des vorigen Paragraphen war. Dieselbe mag hier folgendermaſsen ausgesprochen werden:

---

1) Vergl. den schon genannten Artikel von Abraham in Bd. 4 der math. Encyklopädie, Art. 14 (Nr. 11 daselbst).

Satz III. *Die*

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad L, \quad M, \quad N$$

sind den

$$p, \quad q, \quad r, \quad u, \quad v, \quad w$$

bei Bewegungen direkt kogredient, bei Umlegungen kogredient mit Zeichenwechsel.

Die in Rede stehende Analogie folgt hier also aus dem Umstande, dafs vermöge des besonderen, durch Satz I festgelegten Verhaltens der Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w die zu ihnen *kontragredienten* Gröfsen X, Y, Z, L, M, N zugleich in dem durch Satz III festgelegten Sinne *kogredient* sind. Hiermit dürfte der algebraische Grundgedanke dieser Beziehung so klar herausgearbeitet sein, als überhaupt möglich ist. Wir können diesen Gedanken an die Spitze der Schraubentheorie rücken, wenn wir uns das invariante Verhalten des Ausdrucks (23), bez. der Ausdrücke (22), direkt aus ihrer geometrisch-mechanischen Bedeutung klar machen. Dies ist, was ich in meiner wiederholt genannten Notiz in Bd. 4 der Math. Annalen im Auge hatte. Im gegenwärtigen Zusammenhange läfst sich die Sache folgendermafsen präzis darstellen:

1) Man interpretiere die $X, Y, Z, \ldots$ als die Koordinaten eines Systems kontinuierlich wirkender Kräfte. Dann bedeutet der Ausdruck (23) multipliziert mit dt, also das Produkt:

$$(24) \qquad (Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr)\,dt$$

die *Arbeit*, welche das Kräftesystem bei Eintritt der unendlich kleinen Bewegung $udt, vdt, wdt, \ldots$ leistet, und ist eben darum ein *Skalar erster Art.*

2) Dagegen haben die Ausdrücke (22) vermöge ihrer geometrischen Bedeutung von vorneherein den Charakter von *Skalaren zweiter Art.* Es genügt, dies hier an dem Beispiele zweier Kräftesysteme nachzuweisen, die sich auf Einzelkräfte reduzieren lassen. Wir setzen dementsprechend

$$X_1 = \frac{P_1}{l_1}(x_1 - x_1'), \quad Y_1 = \frac{P_1}{l_1}(y_1 - y_1'), \; \ldots\ldots$$

und analog

$$X_2 = \frac{P_2}{l_2}(x_2 - x_2'), \quad Y_2 = \frac{P_2}{l_2}(y_2 - y_2'), \; \ldots\ldots$$

Hierdurch verwandelt sich $X_1 L_2 + Y_1 M_2 + Z_1 N_2 + X_2 L_1 + Y_2 M_1 + Z_2 N_1$ in das Produkt von $\frac{P_1 P_2}{l_1 l_2}$ in die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \end{vmatrix},$$

die einen sechsfachen Tetraederinhalt vorstellt und gewifs ein Skalar zweiter Art ist.

3) Aus der Nebeneinanderstellung von 1) und 2) ergiebt sich nun sofort der Satz III, der das zu beweisende Resultat in präziser Form ausspricht.

§ 5. Gruppentheoretische Charakterisierung der verschiedenen Arten von Schraubentheorie.

Bisher haben wir die Substitutionen, welche die Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w (um nur von diesen zu reden) bei den Bewegungen und Umlegungen erfahren, nur erst durch das Verhalten der $p, q, \ldots$ bei den erzeugenden Operationen (1), (2), (4) definiert. Es ist von Interesse, den Inbegriff dieser Substitutionen von den Invarianten

$$p^2 + q^2 + r^2 \quad \text{und} \quad pu + qv + rw$$

aus zu charakterisieren. In dieser Hinsicht stelle ich folgenden Satz auf:

Die p, q, r erleiden alle ternären linearen Substitutionen von der Determinante $+1$, welche $p^2 + q^2 + r^2$ ungeändert lassen, die p, q, r, u, v, w zusammen aber alle senären linearen Substitutionen von der Determinante ± 1, welche $pu + qv + rw$ beziehungsweise in $\pm(pu + qv + rw)$ überführen.

Der erste Teil dieses Satzes (der sich auf die ternären Substitutionen der p, q, r bezieht) braucht nach den Angaben, die wir über das Verhalten der p, q, r bei den erzeugenden Operationen machten, nicht weiter erläutert zu werden; er bringt nur die bekannte Beziehung der Drehungen um den Koordinatenanfangspunkt O zu den ternären orthogonalen Substitutionen zum Ausdruck. Sei nun irgend eine ternäre orthogonale Substitution der p, q, r von der Determinante $+1$ als Teil einer senären Substitution der p, q, r, u, v, w von der Determinante ± 1 vorgelegt, welche $(pu + qv + rw)$ bez. in $\pm(pu + qv + rw)$ verwandelt. Wir kombinieren sie mit einer Drehung um O, welche die p, q, r zu ihren Anfangswerten zurückführt (und übrigens für die u, v, w nach den Angaben von § 2 genau dieselbe ternäre Substitution von der Determinante $+1$ ergiebt, wie für die p, q, r selbst, so dafs der Wert von $pu + qv + rw$ und der Wert der senären Substitutionsdeterminante dabei ungeändert bleibt). Wir ziehen ferner nötigenfalls eine Inversion heran, um zu erreichen, dafs $pu + qv + rw$ seinem ursprünglichen Werte direkt gleich wird; dabei erhält die senäre Substitutionsdeterminante von selbst den Werth $+1$. Die so vereinfachte

Substitution hat jetzt (weil $pu + qv + rw$ in sich selbst übergehen soll) notwendig die Form

$$\begin{cases} p_1 = p, & u_1 = u - Cq + Br, \\ q_1 = q, & v_1 = v - Ar + Cp, \\ r_1 = r, & w_1 = w - Bp + Aq, \end{cases}$$

wo einzig die A, B, C noch willkürlich sind. Eine solche Substitution stellt aber nach (11), § 2, eine Translation dar. Also unsere anfängliche Substitution ergiebt eine Translation, wenn wir sie mit einer geeigneten Rotation und eventuell einer Inversion verbinden, — *sie stellt daher von Hause aus entweder eine Bewegung oder eine Umlegung dar*, was zu beweisen war.

Soviel über die Substitutionen der p, q, r, u, v, w. Die Substitutionen der X, Y, Z, L, M, N ergeben sich von da aus sofort, wenn wir nur festhalten, dafs sie zu den u, v, w, p, q, r kontragredient sind.

Mit dieser Festlegung der beiderlei Substitutionsgruppen ist nach den Grundsätzen meines Erlanger Programms die zugehörige *Schraubentheorie* vollkommen charakterisiert.

Wir schreiten nach dem oben Gesagten zur Ballschen Schraubentheorie im engern Sinne, indem wir nur die *Verhältnisse* $p:q:r:u:v:w$ beziehungsweise $X:Y:Z:L:M:N$ in Betracht ziehen (wobei der Unterschied zwischen den Schraubengröfsen der beiden Arten wegfällt). Die $p:q:r:u:v:w$ (um nur von diesen zu sprechen) erleiden solche (und alle solche) lineare Substitutionen, bei denen die *Gleichungen* $p^2 + q^2 + r^2 = 0$ und $pu + qv + rw = 0$ in sich übergehen, der Parameter $\frac{pu + qv + rw}{p^2 + q^2 + r^2}$ aber entweder überhaupt ungeändert bleibt oder doch nur sein Zeichen wechselt. Wollen wir neben Bewegungen und Umlegungen auch noch Ähnlichkeitstransformationen in Betracht ziehen, so wird sich $\frac{pu + qv + rw}{p^2 + q^2 + r^2}$ um einen beliebigen Faktor ändern können; die auf den Parameter bezügliche Einschränkung der Substitution kommt dann in Wegfall.

Die so umgrenzte Ballsche Schraubentheorie ist mit derjenigen Liniengeometrie, *welche das Nullsystem* (oder, was dasselbe ist, den linearen Linienkomplex) *als Raumelement benutzt, nach dem Klassifikationsprinzip des § 1 im Wesen identisch.* Aber natürlich ist, wenn wir uns so ausdrücken, diejenige Liniengeometrie gemeint, welche die Hauptgruppe räumlicher Änderungen zu Grunde legt; ich möchte sie die *konkrete Liniengeometrie* nennen. Statt dessen ist in meinen eigenen alten Arbeiten (wie auch in der Mehrzahl der seitdem erschienenen deutschen und italienischen Arbeiten) die Liniengeometrie in mehr abstrakter Form

behandelt worden, nämlich unter Zugrundelegung der 15gliedrigen Gruppe, welche einerseits alle projektiven Umformungen unseres Raumes, andererseits aber die dualistischen Umformungen enthält. Für diese *abstrakte* Liniengeometrie (wie ich sie hier des Gegensatzes halber nennen möchte) gilt dann der Satz, den ich in Bd. 4 der Math. Annalen pg. 356 aufstellte, dafs bei ihr die Gruppe aller derjenigen linearen Substitutionen der $p:q:r:u:v:w$ zu Grunde liegt, welche die Gleichung $pu + qv + rw = 0$ in sich überführen. *Die Bezugnahme auf die quadratische Form* $p^2 + q^2 + r^2$ *ist einfach weggefallen.*

Mit der so gegebenen Entgegenstellung der zugehörigen Gruppe dürfte die Beziehung meiner eigenen alten Arbeiten und beispielsweise des Werkes von Sturm über Liniengeometrie[1]) zu denjenigen von Ball mit aller Schärfe gegeben sein. Auf Einzelheiten einzugehen ist hier nicht der Ort.

§ 6. Lineare Schraubensysteme.

Nachdem solcherweise die Grundlagen der Schraubentheorie festgelegt sind, mögen wir mit Ball dazu übergehen, die *linearen Systeme* von Schrauben zu studieren, d. h. die Manigfaltigkeiten solcher Schrauben, deren Koordinaten sich aus den Koordinaten von 2, 3, 4, 5 Schrauben mit Hilfe einer entsprechenden Zahl veränderlicher Parameter homogen linear zusammensetzen lassen. Bei der bezüglichen Diskussion beschränkt sich Ball im wesentlichen auf die Besprechung der allgemeinen Fälle oder zieht doch nur Beispiele von Spezialfällen heran. Es scheint aber erwünscht, die Diskussion systematisch durchzuführen.[2])

Ich will dies hier für die zweigliedrige Schar skizzieren, beschränke mich aber dabei der Kürze halber darauf, nur die *Verhältnisse* der 6 Koordinaten in Betracht zu ziehen. Sei dementsprechend:

$$(25) \qquad \varrho p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, \quad \varrho q = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2, \quad \ldots \quad \varrho w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2,$$

unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor verstanden. Es erleichtert die Ausdrucksweise, wenn wir die so definierten $p:q:\ldots:w$ als homogene Punktkoordinaten in einem Raume von fünf Dimensionen bezeichnen. Die Formeln (25) repräsentieren dann in diesem Raume eine *gerade Linie*, und es wird sich darum handeln, die sämtlichen Geraden, die es in unserem fünfdimensionalen Raume giebt, nach ihrer Beziehung zu

1) Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, 3 Teile, Leipzig 1892—1896.

2) In ähnlichem Sinne äufsert sich Hr. Study auf pg. 226—228 der (bis jetzt allein erschienenen) ersten Lieferung seiner *Geometrie der Dynamen* (Leipzig, 1901) und stellt für die demnächst erscheinende zweite Lieferung weitergehende Entwickelungen in Aussicht.

den beiden quadratischen Mannigfaltigkeiten $p^2 + q^2 + r^2 = 0$ und $pu + qv + rw = 0$ zu studieren, resp. zu klassifizieren. Dabei wird sich unsere Aufmerksamkeit in erster Linie auf die *Schnittpunkte* richten, welche unsere Gerade mit diesen Mannigfaltigkeiten gemein hat. Die Schnittpunkte mit jeder der beiden Mannigfaltigkeiten können getrennt sein, zusammenfallen oder unbestimmt werden. Aufserdem können die Schnittpunkte, welche die gerade Linie mit der einen Mannigfaltigkeit gemein hat, mit denen, die sie mit der anderen Mannigfaltigkeit gemein hat, teilweise oder ganz koinzidieren. Des Weiteren möge man Realitätsunterschiede heranziehen. *Hiernach ergiebt sich eine von vornherein übersehbare Reihe von Fallunterscheidungen, die nicht nur mit leichter Mühe aufgezählt sondern ebensowohl nach ihrer schraubentheoretischen Bedeutung diskutiert werden können.* Jeder Geometer, der mit algebraischen Betrachtungen in mehrdimensionalen Räumen einigermafsen vertraut ist, wird dies ohne weiteres ausführen; es scheint unnötig, hierbei noch länger zu verweilen.

Immerhin wird es gut sein, einen Unterschied hervorzuheben, den der geschilderte Ansatz den Ballschen Entwickelungen gegenüber zeigt. Ball berücksichtigt prinzipiell nur die *reellen* Vorkommnisse, hier dagegen wird reell und imaginär zunächst als gleichwertig betrachtet und die Frage nach den Realitätsverhältnissen erst zum Schlusse eingeführt. Um an einem Beispiel den Vorteil zu zeigen, den das letztere Verfahren haben kann, betrachten wir die Regelfläche, welche von den Achsen der Schrauben (25) gebildet wird, das sogenannte *Cylindroid.* Nach Ball ist dasselbe im allgemeinen von der dritten Ordnung; wenn aber die komponierenden Schrauben $p_1, q_1, r_1 \ldots$ und $p_2, q_2, r_2 \ldots$ sich auf zwei Rotationen reduzieren, deren Achsen sich schneiden, so artet es in dasjenige ebene Strahlbüschel aus, dem die Achsen angehören. Statt der Fläche von der dritten Ordnung haben wir dann also eine von der ersten. Wie kommt diese Ausartung zustande? Wenn wir das Imaginäre mitnehmen, finden wir zunächst, dafs es Rotationen mit unbestimmter Achse giebt (es sind diejenigen Schraubenbewegungen, bei denen der durch Formel (19′) gegebene Parameter den Wert $\frac{0}{0}$ erhält). Dieselben lassen nämlich alle Minimallinien fest, welche durch einen festen Punkt des Kugelkreises in einer festen Tangentenebene desselben verlaufen, also ihrerseits ein Strahlbüschel bilden. Solcher Rotationen treten nun im vorliegenden Spezialfalle unter der Schar (25) *zwei* auf, entsprechend den beiden Minimallinien, die unter den Strahlen des Ballschen Strahlbüschels enthalten sind. Die Folge ist, dafs sich von dem Cylindroid zwei imaginäre Ebenen abtrennen, nämlich die beiden

Ebenen, welche sich durch die Normale zum Ballschen Strahlbüschel und die beiden Minimallinien desselben legen lassen. Der Rest, eben das Ballsche Strahlbüschel, ist dann natürlich von der ersten Ordnung. — Der Leser mufs entscheiden, ob der Gewinn an Einsicht, der hier und in ähnlichen Fällen resultiert, ein Äquivalent für die weitläufigere Vorbereitung ist, die erforderlich scheint, wenn man in der Geometrie mit imaginären Elementen bequem und sicher operieren will. —

Übrigens möchte ich nicht minder eine Ausgestaltung der Theorie der linearen Schraubensysteme nach der *eigentlich mechanischen* Seite hin in Anregung bringen. Die Diskussion der linearen Schraubensysteme, von der ich gerade sprach, versieht uns mit einer endlichen Zahl unterschiedener Fälle der Beweglichkeit eines starren Körpers im Unendlich-Kleinen; es kann sich dabei der Reihe nach um 2, 3, 4, 5 Grade der Freiheit handeln. Nun findet man in der Natural Philosophy von Thomson und Tait (2. ed. Bd. I, p. 155 (Nr. 201)) einen einfachen Mechanismus beschrieben, vermöge dessen man einem starren Körper fünf Grade der Beweglichkeit im Unendlich-Kleinen in allgemeinster Weise erteilen kann: der Körper ist um eine Schraubenspindel drehbar, die mit Hülfe zweier aneinander geketteter Hookescher Schlüssel an ein Postament befestigt ist. Ich stelle die Aufgabe, *die sämtlichen gemäfs unserer Diskussion zu unterscheidenden reellen Fälle infinitesimaler Beweglichkeit eines starren Körpers durch möglichst einfache Mechanismen zu realisieren.*

Eine letzte Bemerkung zur Theorie der linearen Schraubensysteme möge wieder nach seiten der Gruppentheorie liegen. Camille Jordan hat bekanntlich zuerst alle kontinuierlichen und diskontinuierlichen Gruppen aufgestellt, die sich aus den reellen Bewegungen des Raumes bilden lassen.[1]) Unter diesen interessieren uns hier nur die *kontinuierlichen* Gruppen. Man findet dieselben bei Study im 39. Bande der Math. Annalen, p. 486—487, übersichtlich zusammengestellt und geometrisch charakterisiert; eine Tabelle der zugehörigen unendlich kleinen Bewegungen giebt Lie in Bd. III seiner Theorie der Transformationsgruppen (Leipzig, 1893), p. 385. Ich nenne hier von diesen Gruppen nur die einfachsten, nämlich:

a) die Gesamtheit aller ∞^3 Translationen,

b) die Gesamtheit aller ∞^4 Bewegungen, die einen unendlich fernen Punkt (oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine unendlich ferne Gerade) festlassen,

---

1) Annali di Matematica, ser. 3., t. 2 (1869).

c) die Gesamtheit aller ∞^3 Bewegungen, welche einen im Endlichen gelegenen Punkt festlassen,

d) die Gesamtheit aller ∞^3 Bewegungen, welche eine im Endlichen gelegene Ebene festlassen.

Offenbar empfiehlt es sich, die Mechanik solcher starrer Körper, welche die Beweglichkeit einer dieser Untergruppen haben, gesondert zu bearbeiten (wie dies für den Körper mit im Endlichen gelegenen festen Punkt von jeher geschehen ist). Die unendlich kleinen Bewegungen jeder solcher Untergruppe bilden aber ein lineares Schraubensystem und die so entstehenden linearen Schraubensysteme heben sich also vor anderen durch ihre Wichtigkeit für die Mechanik hervor; ich werde sie lineare Schraubensysteme von *selbständiger gruppentheoretischer Bedeutung* nennen. Indem ich das Koordinatensystem in geeigneter Weise wähle, bekomme ich in den Fällen a) bis d) für die Koordinaten

$$p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w$$

der betreffenden Schrauben folgende Werte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 0,\ 0,\ 0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3; \\ \text{b)} & 0,\ 0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4; \\ \text{c)} & \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ 0,\ 0,\ 0; \\ \text{d)} & 0,\ 0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ 0. \end{array}$$

Hier sind die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, wie in (25), beliebig veränderliche Parameter. Man sollte jedes einzelne der so gewonnenen linearen Schraubensysteme genau so für die Mechanik der ihm zugehörigen endlichen Bewegungen benutzen, wie dies sofort mit dem System c) für die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt und hernach mit der Gesamtheit aller Schrauben für den in allgemeinster Weise beweglichen starren Körper geschehen wird.

§ 7. Übergang zur Kinetik. Unterscheidung holonomer und nicht holonomer Differentialausdrücke, bez. Differentialbedingungen.

Daſs für $n \geqq 2$ nicht jeder Differentialausdruck

$$(26) \qquad \Sigma \varphi_i (x_1 \ldots x_n)\, dx_i$$

ein exaktes Differential dF einer Funktion von $x_1 \ldots x_n$ ist, und daſs für $n \geqq 3$ nicht jede Differentialbedingung

$$(26') \qquad \Sigma \varphi_i dx_i = 0$$

mit einer Gleichung $dF = 0$ gleichbedeutend ist, ist bekannt genug; die Klassifikation der verschiedenen in dieser Hinsicht vorliegenden

Möglichkeiten wird in der Theorie des „Pfaffschen Problems" entwickelt. Wir sprechen nach der Ausdrucksweise von Hertz in allen den Fällen, wo der Differentialausdruck oder die Differentialbedingung nicht durch ein einfaches dF ersetzt werden kann, von einem *nicht holonomen* Differentialausdruck, bez. einer *nicht holonomen* Differentialbedingung.

In der Mechanik liegt die Sache, allgemein zu reden, nun merkwürdigerweise so, dafs man zwar von je Anlafs hatte, nicht holonome Differentialausdrücke und -bedingungen in Betracht zu ziehen, dafs man aber erst in den letzten Jahren angefangen hat, diesem Umstande besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden.[1])

Was zunächst *nicht holonome Differentialausdrücke* angeht, so treten dieselben in unsere jetzige Betrachtung dadurch ein, dafs bereits die Koordinaten pdt, qdt, rdt einer unendlich kleinen *Drehung* um 0, und umsomehr die *Schraubenkoordinaten* pdt, $qdt \dots wdt$ einer beliebigen unendlich kleinen Verrückung eines starren Körpers nicht holonome Verbindungen der Differentiale der 3 oder 6 endlichen Parameter sind, durch welche man die Lage des Körpers in den beiden Fällen festlegen mag; wir werden hierfür sogleich noch explicite Formeln geben.

Was aber *nicht holonome Bedingungsgleichungen* betrifft, so bilden dieselben nicht etwa einen Ausnahmefall, sondern treten bei den mechanischen Vorgängen, die wir täglich beobachten, aufserordentlich häufig auf. So macht Hertz in seinem Werke über die Prinzipien der Mechanik[2]) darauf aufmerksam, dafs eine Kugel, die auf einer Ebene rollt, das Beispiel eines mechanischen Systems von 5 Freiheitsgraden abgiebt, das an eine nicht holonome Bedingungsgleichung gebunden ist. Noch einfacher ist vielleicht das Beispiel eines auf horizontaler Ebene beweglichen Wagens oder Schlittens, der (wegen der Reibung an der Unterlage) immer nur in Richtung seiner Achse fortschreiten kann; wir haben hier die nicht holonome Bedingungsgleichung $dy - \operatorname{tang}\vartheta \cdot dx = 0$, unter ϑ das Azimut der Achse verstanden. Wir schliefsen, *dafs die Betrachtung nicht holonomer Bedingungsgleichungen in der Mechanik nichts Künstliches ist, sondern von vorneherein mit in Betracht gezogen werden mufs, wenn anders wir die Bewegungsvorgänge der uns umgebenden Wirklichkeit verstehen wollen.*

Wir werden daher die nicht holonomen Bedingungsgleichungen im Folgenden immer mit erwähnen. Bei Ball geschieht dies nicht und braucht nicht zu geschehen, da Ball seine Betrachtungen von vorne-

---

1) Vergl. verschiedene Stellen in Voss, *Die Prinzipien der rationellen Mechanik* (Encyclopädie der Math. Wiss. IV, 1), insbesondere Nr. 38 daselbst.

2) Einleitung, p. 23.

herein in der Weise auf unendlich kleine Ortsänderungen einschränkt, dafs er nur die ersten Potenzen der Differentiale beibehält. Infolge dessen kann Ball auch den starren Körper, der irgend k Differentialbeziehungen vom Typus (26) unterworfen ist, kurzweg als ein mechanisches System von $(6 - k)$ Freiheitsgraden bezeichnen. Dies würde im Falle endlicher Bewegungen nicht richtig sein: die rollende Kugel vermag trotz der nicht holonomen Bedingung, der ihre infinitesimalen Bewegungen unterworfen sind, ∞^5 Lagen anzunehmen, ebenso der auf der (x, y) Ebene bewegliche Wagen sämtliche ∞^3 Lagen (x, y, ϑ).

§ 8. Ueber die Verwendung der Geschwindigkeitskoordinaten p, q, r in der Kinetik des starren Körpers mit festem Punkt.

Ehe wir zur Verwendung der Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w in der Kinetik beliebiger starrer Körper schreiten, mögen wir die Verwendung der p, q, r in der Kinetik des starren Körpers mit festem Punkt betrachten. Es handelt sich dabei zwar im Prinzip um lauter bekannte Dinge, aber man findet dieselben nicht überall in der einfachen und präzisen Form beisammen, die wir ihnen hier geben wollen und die sich hernach unmittelbar auf die Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w überträgt. Den einzelnen Angaben Beweise hinzuzufügen wird kaum nötig sein; ich verweise wegen der etwaigen Ableitung der Resultate, sofern deutsche Litteratur in Betracht gezogen werden soll, am liebsten auf die von Sommerfeld und mir herausgegebenen Vorlesungen über die *Theorie des Kreisels* (Teil I, Leipzig 1897); insbesondere geschieht dort (pag. 138 ff.) die Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen (im Anschlufs an die ursprüngliche Entwickelung von Hayward) genau so, wie es im Folgenden skizziert wird.

1. *Zusammenhang der p, q, r mit den Geschwindigkeitskoordinaten* $\varphi', \psi', \vartheta'$.

Wir nehmen ein im Körper festes Koordinatensystem XYZ und ein im Raume festes xyz (mit gemeinsamem Anfangspunkt), deren gegenseitige Beziehung wir durch irgend drei Parameter, für welche wir hier wegen ihres elementaren Charakters die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ nehmen wollen, festlegen (Kreisel, pg. 19). Der Übergang von der Lage φ, ψ, ϑ zur Lage $\varphi + \varphi' dt$, $\psi + \psi' dt$, $\vartheta + \vartheta' dt$ sei äquivalent mit einer Drehung durch $p dt$, $q dt$, $r dt$ um die Achsen des XYZ-Systems in seiner den Parameterwerten φ, ψ, ϑ entsprechenden Lage. Die Nebeneinanderstellung der bezüglichen Formeln ergiebt dann folgenden Zusammenhang zwischen den p, q, r und den φ, ψ, ϑ, bez. $\varphi', \psi', \vartheta'$ (Kreisel, pg. 45):

$$(27)\qquad \begin{cases} p = \vartheta' \cos\varphi + \psi' \sin\vartheta \sin\varphi, \\ q = -\vartheta' \sin\varphi + \psi' \sin\vartheta \cos\varphi, \\ r = \varphi' + \psi' \cos\vartheta. \end{cases}$$

Man erkennt, daſs die p, q, r nicht-holonome Verbindungen der φ', ψ', ϑ' sind. Die Folge ist, daſs ich in den Bewegungsgleichungen des starren Körpers zwar die φ', ψ', ϑ' gern durch die p, q, r ersetzen kann, daſs ich aber daneben zur Lagenbestimmung des Körpers die φ, ψ, ϑ festhalten muſs, die dann mit den p, q, r durch die Gleichungen (27), welche ich die *kinematischen Gleichungen* nenne, verbunden sind.

2. *Kraftkoordinaten.*

Hat man bei irgend einem mechanischen System bestimmte Geschwindigkeitskoordinaten (hier also die p, q, r) ausgewählt, so hat man als Koordinaten der kontinuierlich wirkenden Kräfte allgemein diejenigen Gröſsen zu nehmen, mit denen multipliziert die Koordinaten der unendlich kleinen Bewegung in den Ausdruck für die Arbeit eingehen. Im vorliegenden Falle haben wir für die Arbeit nach (24) oben (indem die u, v, w verschwinden):

$$dA = (Lp + Mq + Nr)dt;$$

wir werden also das Kräftesystem, das am starren Körper angreift, durch *seine Drehmomente L, M, N um die Achsen des im Körper festen Koordinatensystems* festzulegen haben. Genau so werden wir als Koordinaten einer Stoſskraft ihre bezüglichen Drehmomente wählen, wie wir nicht weiter ausführen.

3. *Aufstellung der kinetischen Gleichungen für die p, q, r.*

Die Aufstellung der eigentlichen Bewegungsgleichungen für die p, q, r (der Eulerschen Bewegungsgleichungen) erfolgt nun am kürzesten folgendermaſsen:

a) Man drücke die lebendige Kraft des rotierenden Körpers durch die p, q, r aus. Als Einheit der Masse ist dabei natürlich, auf Grund unserer früheren Verabredungen, diejenige zu wählen, die bei Einwirkung einer kontinuierlichen Kraft von der Gröſse 1 in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit 1 erhält. Da sich die p, q, r auf ein im Körper festes Koordinatensystem beziehen, erhält man eine quadratische Form derselben mit konstanten Koeffizienten

$$(28)\qquad T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Dqr + 2Erp + 2Fpq).$$

b) Hierauf bilde man die Koordinaten L, M, N des sogenannten „Impulses“, d. h. desjenigen Systems von Stoſskräften, welches im

Stande wäre, den in seiner augenblicklichen Lage ruhend gedachten Körper instantan in den Geschwindigkeitszustand p, q, r zu versetzen. Nach den Grundgesetzen der Kinetik, die in der sogenannten „ersten Zeile der Lagrangeschen Gleichungen“ ihren Ausdruck finden, erhält man dieselben aus T durch Differentiation nach den entsprechenden Geschwindigkeitskoordinaten. *Die Formeln sind:*

$$L = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad M = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad N = \frac{\partial T}{\partial r}. \tag{29}$$

c) Von hieraus erhält man nun die gesuchten kinetischen Gleichungen, indem man überlegt, daſs sich die Koordinaten L, M, N des Impulses während des Zeitelementes dt aus zwei Gründen um unendlich kleine Beträge abändern.

Erstlich dadurch, daſs an unserem Körper von auſsen gegebenenfalls ein System kontinuierlich wirkender Kräfte angreift. Wir nennen die Koordinaten dieses Systems (d. h. seine Drehmomente um die X-, Y-, Z-Achse) $\mathsf{\Lambda}$, M, N. Die von hier aus resultierenden Änderungen der L, M, N sind:

$$d'L = \mathsf{\Lambda}\, dt, \quad d'M = \mathsf{M}\, dt, \quad d'N = \mathsf{N}\, dt. \tag{30}$$

Zweitens aber ändern sich die L, M, N dadurch, daſs sich das Koordinatensystem XYZ, auf welches sie bezogen sind, während des Zeitelementes dt gegen seine ursprüngliche Lage um pdt, qdt, rdt gedreht hat. Wir können ebensowohl sagen, daſs wir den Raum (und also den im Raume feststehenden Impulsvektor) gegen das Koordinatensystem der XYZ um $-pdt$, $-qdt$, $-rdt$ gedreht haben. Dies giebt als Änderungen der L, M, N:

$$d''L = (rM - qN)dt, \quad d''M = (pN - rL)dt, \quad d''N = (qL - pM)dt. \tag{31}$$

Die Gesamtänderung der L, M, N ist die Summe der Änderungen (30), (31); daher kommt, wenn wir noch durch dt dividieren:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = (rM - qN) + \mathsf{\Lambda}, \\ \frac{dM}{dt} = (pN - rL) + \mathsf{M}, \\ \frac{dN}{dt} = (qL - pM) + \mathsf{N}, \end{cases} \tag{32}$$

und dieses sind die gesuchten kinetischen Gleichungen. Die $\mathsf{\Lambda}$, M, N werden dabei zunächst als Funktionen der φ, ψ, ϑ anzusetzen sein.

4. *Bemerkungen zu den gewonnenen Gleichungen.*

Schlieſslich haben wir zur Darstellung der Bewegung die Gleichungen (27), (28), (29), (32), wo wir gern noch die aus (29) folgenden Werte der

L, M, N in die (32) eintragen können. Wir haben dann 6 Differentialgleichungen erster Ordnung für die φ, ψ, ϑ, p, q, r. Ist insbesondere irgend eine (holonome oder nicht holonome) Bedingungsgleichung für die φ', ψ', ϑ' gegeben, so wird sich diese in eine lineare Gleichung für die p, q, r umsetzen lassen (deren Koeffizienten, allgemein zu reden, Funktionen der φ, ψ, ϑ sind):

$$Pp + Qq + Rr = 0. \tag{33}$$

Es werden dann in den Λ, M, N neben Gliedern, welche sich auf die anderweitigen äufseren Kräfte beziehen, Terme folgender Form auftreten:

$$-\lambda P, \quad -\lambda Q, \quad -\lambda R, \tag{34}$$

unter λ einen Lagrangeschen Multiplikator verstanden, der so zu bestimmen ist, dafs die Gleichung (33) fortgesetzt erfüllt ist.

§ 9. Fortsetzung. Fälle, wo die p, q, r wie Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten gebraucht werden können.

Die Betrachtungen, welche wir im vorigen Paragraphen unter 3. gaben, sind wesentlich durch den Umstand veranlafst, dafs die p, q, r keine Lagrangeschen Geschwindigkeitskoordinaten, d. h. keine holonome Verbindungen der φ', ψ', ϑ' sind; wir hätten andernfalls nur die „zweite Zeile" der allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen heranzuziehen brauchen. Es hat daher Interesse, zuzusehen, bei welchen Ansätzen und Problemen der Unterschied der p, q, r und der Lagrangeschen Geschwindigkeitskoordinaten noch nicht hervortritt; wir lösen dadurch aus der allgemeinen Theorie der Rotation eines starren Körpers einen relativ elementaren Teil heraus. In dieser Hinsicht ergiebt sich zunächst folgende Zusammenstellung:

1. Die Bedingungsgleichungen, welche gegebenenfalls die Beweglichkeit des Körpers *im Unendlich-Kleinen* einschränken, sind in den p, q, r ebenso *linear*, wie in den φ', ψ', ϑ' (vergl. Glch. (33)).

2. Der Unterschied verschwindet ferner bei den Fragen der *Statik*, insofern bei ihnen die p, q, r (und also auch die L, M, N) durchweg gleich Null zu setzen sind.

3. Er verschwindet endlich in der *Stofstheorie*; in der That sind die Gleichungen (29), die den Zusammenhang des Impulses mit den erzeugten Geschwindigkeitskoordinaten p, q, r ergeben, ihrer Form nach von dem Umstande, dafs die p, q, r nicht holonome Geschwindigkeitskoordinaten sind, durchaus unabhängig.

Es sind dies einfach diejenigen Teile der Mechanik, welche der Aufstellung der auf kontinuierliche Kräfte bezüglichen Bewegungsgleichungen vorangehen. Hierzu tritt aber, wenn man approximative Rechnung

zulassen will, noch ein *vierter* Punkt. Derselbe liegt vor, *wenn man die Theorie der kleinen Schwingungen unseres starren Körpers um eine Gleichgewichtslage behandelt, und dabei die üblichen Vernachlässigungen eintreten läfst.* Man nimmt dann nämlich an, dafs man die in (32) rechter Hand auftretenden „Glieder zweiter Ordnung", also die $(rM - qN)$ etc., gegen die übrigen Glieder, also die $\frac{dL}{dt}$ und Λ, etc., vernachlässigen kann. Man erhält solcherweise die vereinfachten Formeln:

$$(35)\qquad \begin{cases} \frac{dL}{dt} = \Lambda, \\ \frac{dM}{dt} = \mathsf{M}, \\ \frac{dN}{dt} = \mathsf{N}, \end{cases}$$

und diese hängen mit dem Ausdruck (28) der lebendigen Kraft in der That so zusammen, als wenn die p, q, r Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten wären.

Es steht überhaupt nichts im Wege, *sofern man Glieder höherer Ordnung vernachlässigen will*, die p, q, r nach der Zeit genommenen exakten Differentialquotienten von Funktionen der φ, ψ, ϑ gleichzusetzen. Wir werden eine unendlich kleine Drehung vor uns haben, wenn wir ϑ und $\varphi + \psi = \chi$ unendlich klein nehmen. Ersetzen wir dementsprechend in (27) $\sin\vartheta$ durch ϑ, $\cos\vartheta$ durch 1, $\psi'\cdot\vartheta$ durch $-\varphi'\cdot\vartheta$ und $\varphi' + \psi'$ durch χ', so kommt.

$$(36)\qquad \begin{cases} p = \vartheta'\cos\varphi - \varphi'\cdot\vartheta\sin\varphi = \frac{d(\vartheta\cos\varphi)}{dt}, \\ q = -\vartheta'\sin\varphi - \varphi'\cdot\vartheta\cos\varphi = \frac{d(-\vartheta\sin\varphi)}{dt}, \\ r = \chi' \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \frac{d\chi}{dt}. \end{cases}$$

Hier sind $\vartheta\cos\varphi$, $-\vartheta\sin\varphi$, χ die unendlich kleinen Winkel, durch welche der Körper von seiner Anfangslage aus um die Achsen OX, OY, OZ gedreht ist. —

Die Aufzählung der vorgenannten vier Punkte ist für das Verständnis der Ballschen Schraubenuntersuchungen von unmittelbarster Wichtigkeit. Wir dürfen vorgreifend erwähnen, dafs die Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w (wie überhaupt irgend welche nicht-holonome Geschwindigkeitskoordinaten) genau in den entsprechenden vier Fällen ebenfalls wie Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten behandelt werden können. Und nun trifft es sich so, dafs Ball in seinen ursprünglichen Untersuchungen über die Anwendung der Schraubentheorie auf die Mechanik der starren Körper gerade die vier hiermit bezeichneten Kapitel heraus-

gegriffen hat. Und auch die weitere Frage, die er später in Angriff nahm und von der noch genauer weiter unten die Rede sein soll, die Frage nach den jeweils vorhandenen *permanenten* Schrauben, läſst sich unter denselben Gesichtspunkt bringen. Dies ist gewiſs nicht zufällig sondern wohlbedacht, entsprechend der Auffassung, daſs es in der Mechanik vor allen Dingen darauf ankommt, sich die jeweils *einfachsten* Beziehungen und Vorgänge klar zu machen. —

§ 10. Verwendung der Schraubenkoordinaten für die allgemeine Kinetik der starren Körper.

Das in § 7 Entwickelte läſst sich nun Schritt für Schritt auf die Frage nach der Verwendung der Schraubenkoordinaten für die allgemeine Kinetik der starren Körper übertragen.

1) Wir fixieren die jeweilige Ortsänderung des starren Körpers durch irgend 6 Parameter, etwa so, daſs wir wieder ein im Körper festes Koordinatensystem XYZ einführen und dessen Lage gegen ein im Raume festes System xyz durch die Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ des Anfangspunktes und die drei Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ festlegen (was freilich sehr unsymmetrische Formeln ergiebt). *Die auf das Koordinatensystem XYZ bezüglichen Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w der instantanen Geschwindigkeit werden sich dann in folgender Weise als lineare, nicht holonome Verbindungen der $\xi', \eta', \zeta', \varphi', \psi', \vartheta'$ darstellen:*

$$(37)\quad \begin{cases} p = \vartheta' \cos\varphi + \psi' \sin\vartheta \sin\varphi, \quad q = -\vartheta' \sin\varphi + \psi' \sin\vartheta \cos\varphi, \\ \qquad\qquad r = \varphi' + \psi' \cos\vartheta, \\ u = \xi'(\cos\varphi \cos\psi - \cos\vartheta \sin\varphi \sin\psi) \\ \qquad + \eta'(\cos\varphi \sin\psi + \cos\vartheta \sin\varphi \cos\psi) + \zeta' \sin\vartheta \sin\varphi, \\ v = \xi'(-\sin\varphi \cos\psi - \cos\vartheta \cos\varphi \sin\psi) \\ \qquad + \eta'(-\sin\varphi \sin\psi + \cos\vartheta \cos\varphi \cos\psi) + \zeta' \sin\vartheta \cos\varphi, \\ w = \xi' \sin\vartheta \sin\psi - \eta' \sin\vartheta \cos\psi + \zeta' \cos\vartheta. \end{cases}$$

Wir bezeichnen diese Gleichungen wieder als die *kinematischen* Gleichungen.

2) Um nunmehr zu den *kinetischen* Gleichungen zu kommen, drücken wir erstlich die lebendige Kraft des Körpers durch die p, q, r, u, v, w aus; wir erhalten eine *quadratische Form mit konstanten Koeffizienten*:

$$(38)\qquad T = F(p, q, r, u, v, w).$$

Wir berechnen ferner, gemäſs der ersten Zeile der Lagrangeschen Gleichungen und dem Ausdruck (24) für die virtuelle Arbeit eines Kräftesystems, die Schraubenkoordinaten X, Y, Z, L, M, N des zum Ge-

schwindigkeitszustande p, q, r, u, v, w gehörigen Impulses durch die Formeln:

$$(39)\qquad X=\frac{\partial T}{\partial u},\quad Y=\frac{\partial T}{\partial v},\quad Z=\frac{\partial T}{\partial w},\quad L=\frac{\partial T}{\partial p},\quad M=\frac{\partial T}{\partial q},\quad N=\frac{\partial T}{\partial r}.$$

Wir überlegen endlich, dafs diese Impulskoordinaten während des Zeitelementes dt aus zwei Gründen Änderungen erfahren, die sich superponieren, nämlich durch die von aufsen auf den Körper wirkenden Kräfte, die zusammengenommen die Koordinaten

$$\Xi,\ \mathsf{H},\ \mathsf{Z},\ \Lambda,\ \mathsf{M},\ \mathsf{N}$$

ergeben mögen, und durch die Bewegung des im Körper festen Koordinatensystems mit dem Körper. Von hier aus erhalten wir:

$$(40)\qquad \begin{cases} \frac{dX}{dt}=(rY-qZ)+\Xi, & \frac{dL}{dt}=(wY-vZ)+(rM-qN)+\Lambda,\\ \frac{dY}{dt}=(pZ-rX)+\mathsf{H}, & \frac{dM}{dt}=(uZ-wX)+(pN-rL)+\mathsf{M},\\ \frac{dZ}{dt}=(qX-pY)+\mathsf{Z}, & \frac{dN}{dt}=(vX-uY)+(qL-pM)+\mathsf{N}, \end{cases}$$

und dies sind die gesuchten *kinetischen Gleichungen*.

3) An diese Entwickelung schliefsen sich dann genau dieselben Bemerkungen, wie in § 7, insbesondere auch, was die Berücksichtigung irgend welcher Bedingungsgleichungen angeht.

§ 11. Spezielle Ausführungen zu den Entwickelungen des vorigen Paragraphen.

Um die Entwickelungen des vorigen Paragraphen durch spezielle Ausführungen zu belegen, ziehen wir zuvörderst den Fall eines isolierten, frei beweglichen Körpers heran. *Die Sache wird dann eminent einfach, verliert aber zugleich einen guten Teil ihrer spezifischen Bedeutung.* Wir legen den Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Körpers. Die lebendige Kraft (38) nimmt dann bekanntlich folgende einfache Form an:

$$(41)\qquad T=\frac{m}{2}(u^2+v^2+w^2)+f(p,q,r),$$

unter f eine quadratische Form der beigesetzten Argumente mit konstanten Koeffizienten verstanden. Die Impulskoordinaten (39) werden daraufhin

$$(42)\qquad X=mu,\quad Y=mv,\quad Z=mw,\quad L=\frac{\partial f}{\partial p},\quad M=\frac{\partial f}{\partial q},\quad N=\frac{\partial f}{\partial r}.$$

Es nehmen daher die letzten drei Gleichungen (40) folgende einfache Form an:

$$(43)\qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = (rM - qN) + \mathsf{\Lambda}, \\ \dfrac{dM}{dt} = (pN - rL) + \mathsf{M}, \\ \dfrac{dN}{dt} = (pL - pM) + \mathsf{N}. \end{cases}$$

Wollen wir nun noch voraussetzen, dafs die $\mathsf{\Lambda}$, M, N nur von den φ, ψ, ϑ (nicht von den ξ, η, ζ) abhängen, so haben wir ersichtlich zur Bestimmung der p, q, r, d. h. *der Drehung um den Schwerpunkt*, genau denselben Ansatz, den man von jeher benutzt hat. *Das Eigenartige der Schraubentheorie entschwindet;* man wird das Problem am einfachsten so weiter behandeln, dafs man nach Bestimmung der Drehung *um* den Schwerpunkt die fortschreitende Bewegung des letzteren direkt bestimmt, d. h. die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen für die ξ, η, ζ aufstellt. Die Schraubentheorie erleidet hier also sozusagen einen Mifserfolg. An diesem Mifserfolg mag es liegen, dafs sich die Schraubentheorie die grofse Geltung, welche sie zweifellos für die Mechanik der starren Körper besitzt, immer nur erst partiell hat erringen können. *Gäbe es in der Mechanik der starren Körper keine anderen Aufgaben, als die gerade besprochenen, so wäre es überflüssig, eine besondere Schraubentheorie zu entwickeln.*

Es giebt aber andere Aufgaben die Menge. Ich nenne hier die Bewegung eines starren Körpers in einem widerstehenden Mittel (wo die $\mathsf{\Lambda}$, M, N gewifs nicht von dem φ, ψ, ϑ allein abhängen), ferner aber die Bewegung eines starren Körpers, der gezwungen ist, auf anderen starren Körpern zu rollen oder zu gleiten.

Ich möchte hier insbesondere auf dasjenige Problem hinweisen, bei welchem die Schraubentheorie bislang die glänzendste Verwendung gefunden haben dürfte, *das Problem von der Bewegung des starren Körpers in einer reibungslosen inkompressiblen Flüssigkeit.*[1]) Die lebendige Kraft des aus Körper und Flüssigkeit gebildeten Systems kann in diesem Falle ohne weiteres in der Form (38) angeschrieben werden, worauf die gesamten Entwickelungen des vorigen Paragraphen Platz greifen. Diese Entwickelungen sind in der That nichts anderes als eine Transskription der Ansätze, welche Lord Kelvin und Kirchhoff ursprünglich für den Körper in Flüssigkeit gemacht haben; man ver-

---

1) Leider ist die mathematische Eleganz dieser Untersuchungen kein Mafsstab für ihre physikalische Wichtigkeit; vielmehr ist das praktische Geltungsgebiet derselben wegen der in allen Fällen vorhandenen Flüssigkeitsreibung und der bei gröfseren Geschwindigkeiten auftretenden turbulenten Bewegungen ein sehr geringes.

gleiche die Darstellung bei Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge, 1895; Kap. 6), der sich direkt an die Ausdrucksweise der Schraubentheorie anschliefst, sowie das Referat von Love in IV 15 und IV 16 der mathematischen Encyklopädie. Die verschiedenen Formen, welche die lebendige Kraft T je nach der Symmetrie des in die Flüssigkeit getauchten Körpers annimmt, der jeweilige Zusammenhang zwischen der instantanen Geschwindigkeitsschraube und der Impulsschraube, endlich die resultierende Bewegung des Körpers selbst sind ebenso viele Gegenstände, welche sich auch für eine anschaulich-geometrische Diskussion im Sinne der Ballschen Schraubentheorie vorzüglich eignen dürften. Es würde dies eine direkte und doch nicht triviale Weiterbildung von Poinsots berühmten Untersuchungen über die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt sein. Hierzu wolle man insbesondere die Arbeit von Minkowski in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie von 1888 vergleichen.

§ 12. Abschliefsende Bemerkungen über die mechanischen Kapitel des Ballschen Werkes. — Verallgemeinerungen des in § 7 und § 9 gegebenen Ansatzes.

Es wurde bereits in § 8 hervorgehoben, dafs die Untersuchungen über die Mechanik der starren Körper, welche Ball in seinem Werke ausführt[1]), einen übereinstimmenden Charakter zeigen: es handelt sich bei Ball durchweg um solche Fragen, *bei denen die Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w der instantanen Geschwindigkeit wie Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten benutzt werden können.* Ich habe dies hier nur noch betreffs der letzten Frage, die in § 8 genannt wurde, der Frage nach den jeweiligen *permanenten Schrauben* auszuführen. Dies gelingt in einfachster Weise im Anschlufs an die kinetischen Gleichungen (40). Man findet nämlich, dafs es sich bei Ball dabei um die Aufsuchung solcher Werte der p, q, r, u, v, w bez. $\varphi, \psi, \vartheta, \xi, \eta, \zeta$ handelt, *für welche die rechten Seiten der kinetischen Gleichungen* (40) *verschwinden*; es bleiben dann die X, Y, Z, L, M, N des Impulses und also auch die p, q, r, u, v, w wenigstens für ein Zeitelement konstant, und eben deshalb spricht Ball in einem solchen Falle von einer permanenten Schraube. Als einfache Beispiele möchte ich anführen Staudes

1) Nur von diesen *mechanischen* Entwickelungen des Ballschen Werkes ist im vorliegenden Artikel die Rede, nicht von den anschliefsenden *geometrischen*. Ich möchte aber nicht unterlassen anzuführen, dafs Herr Ball die geometrischen Fragen neuerdings in einer besonderen Abhandlung in den Transactions der R. Irish Academy (vol. 31, post 12, Dublin 1901) weiter verfolgt hat; dieselbe trägt den Titel: *Further Developments of the geometrical theory of six screws.*

permanente Drehachsen eines um einen Punkt rotierenden schweren Körpers (Journal für Mathematik Bd. 113, 1894), sowie Kirchhoffs Theorem, dafs bei jedem Körper in einer reibungslosen, inkompressiblen Flüssigkeit bei Abwesenheit äufserer Kräfte drei zu einander senkrechte Richtungen gleichförmiger Translation existieren. Die sämtlichen Fälle stationärer Bewegung, welche in dem genannten Falle bei dem Körper in Flüssigkeit auftreten können, diskutiert Minkowski l. c. In diesen Beispielen sind zugleich die p, q, r, u, v, w nicht nur zeitweise, sondern dauernd konstant, so dafs man von *Permanenz* der bez. Schrauben im vollen Sinne des Wortes reden kann.

Letzterer Umstand hängt ersichtlich mit der Thatsache zusammen, dafs die Drehungen um einen Punkt, wie andererseits die Bewegungen eines freien Körpers eine *Gruppe* bilden: gehört eine unendlich kleine Bewegung der Gruppe an, so auch die endliche Bewegung, welche aus ihr durch unendlichmalige Wiederholung entsteht. Dafs dies bei der Bewegung starrer Körper keineswegs immer der Fall ist, zeigt das einfache Beispiel eines auf einer Ebene rollenden Cylinders. Hier treten daher die in § 5 genannten *Gruppen von Bewegungen* (bez. die mit ihnen verknüpften linearen Schraubensysteme von „selbständiger gruppentheoretischer Bedeutung“) in charakteristischer Weise in den Vordergrund. In der That läfst sich die Kinetik aller dieser Gruppen genau so in Ansatz bringen wie in § 7 die Kinetik der Drehungen um einen Punkt und in § 9 diejenige der freien Bewegungen (eines starren Körpers); man wird sagen können, dafs in allen diesen Fällen die *Methode der Eulerschen Gleichungen* eine naturgemäfse Verallgemeinerung findet.[1]) Die Gesamtheit der Bewegungen, welche ein starrer Körper nach der Natur der ihm auferlegten Bedingungen gegebenenfalls ausführen kann, ist immer in einer *kleinsten* Gruppe von Bewegungen enthalten. Es dürfte sich empfehlen, die kinetischen Gleichungen für den Körper jeweils so aufzustellen, dafs man diese Gruppe als Ausgangspunkt nimmt, also bei ihr „kinematische Gleichungen“ und das Analogon der Eulerschen Gleichungen aufstellt.

Göttingen, den 3. September 1901.

1) Diese Bemerkungen stehen in naher Beziehung zu gewissen allgemeineren Betrachtungen über dynamische Probleme, die Herr Volterra in den Jahren 1899 bis 1900 in den Atti di Torino veröffentlichte; siehe insbesondere den Aufsatz: *Sopra una classe di equazioni dinamiche* in Bd. 33 und den anderen: *Sopra una classe di moti permanenti stabili* in Bd. 34 daselbst.

Kleinere Mitteilungen.

Druckfehler in den Tables des Logarithmes à huit decimales du Service Géographique de l'Armée (Paris 1891).

Sr. Don J. de Mendizábal Tamborrel, Astronom in Mexico, teilt in der Revista Científica y Bibliografica de la Sociedad Científica „Antonio Alzate", t. XV (1900—1901) p. 21 mit, dafs in den oben genannten Tafeln bei Log. cot. $34^{\circ}\ 53'\ 60''$ an Stelle von 0.21981237 zu lesen ist 0.21981257.[1])

Auskünfte.

Fr. M., K. Die auch vom Taschenbuch der Hütte und neuerdings von Herrn Kiepert in der 9. Auflage seines Grundrisses der Differential- und Integralrechnung für die Umkehrungen der Hyperbelfunktionen an Stelle der noch von Günther und Ligowski gebrauchten sinnlosen Schreibweise Arc Sin, Arc Cos u. s. w. angenommenen Bezeichnungen Ar Sin, Ar Cos u. s. w. (zu sprechen: area sinus u. s. w.) sind unseres Wissens von J. F. W. Gronau eingeführt worden (eigentlich Ar. Sin, Ar. Cos u. s. w., in den Tafeln für die hyperbolischen Sektoren und für die Logarithmen ihrer Sinus und Cosinus, Danzig 1862). M.

E. H., S. Die beachtenswerte Schrift von P. Crueger, Dezimale Zeit- und Kreisteilung, ein Kulturfortschritt, Berlin 1900, ist ein Sonderabdruck aus der Wochenschrift „Prometheus", Jahrg. XI, Nr. 560. M.

H. H., S. Unserer Mitteilung im vorigen Heft S. 485, die in der französischen Marine mit der neuen Winkelteilung gemachten günstigen Erfahrungen betreffend, können wir hinzufügen, dafs der erwähnte, den Bericht des Kommandanten Guyou enthaltende Compte rendu sommaire du Congrès international de Chronométrie de 1900 aus der Imprimerie Nationale stammt, während der Compte rendu in extenso unter der Presse ist und bei Gauthier-Villars erscheinen wird.

1) Diesen Tafeln liegt bekanntlich die Hundertteilung des rechten Winkels zu Grunde und die Zeichen $^{\circ}\ '\ ''$ bedeuten beziehentlich Neu-(Centesimal-)Grad, Neuminute, Neusekunde.

Anfrage.

In dem „Versuch einer graphischen Dynamik“ von R. Proell (Leipzig 1874) ist für die geradlinige Bewegung eines Punktes der Satz aufgestellt, daſs die Beschleunigung gleich der Subnormale der Geschwindigkeitskurve ist, unter letzterer die Kurve verstanden, welche von dem Endpunkt der senkrecht zur Bahn an den bewegten Punkt angetragenen Geschwindigkeit beschrieben wird. Im Taschenbuch der Hütte, 17. Aufl. (Berlin 1899) S. 525 ist dieser Satz mit dem Namen Bour in Verbindung gebracht. Wo und wann hat Bour denselben veröffentlicht? Trägt man bei einer beliebigen krummlinigen Bewegung eines Punktes die Geschwindigkeit auch senkrecht zur Bahn von dem Punkt aus ab, so geht die Normale der von dem Endpunkt beschriebenen Kurve ebenfalls durch den Endpunkt der nach Gröſse und Richtung von dem bewegten Punkt abgetragenen Beschleunigung. Ist diese Verallgemeinerung des Bour-Proell'schen Satzes bekannt? Es giebt einen ähnlichen Satz, bei welchem die Geschwindigkeit in ihrer natürlichen Richtung abgetragen, statt um einen rechten Winkel gedreht, vorkommt. Ist derselbe bekannt? R. Mehmke.

Bücherschau.

A. von Oettingen. Elemente des geometrisch-perspektivischen Zeichnens. 177 S. Leipzig 1901, Wilhelm Engelmann.

Der Verfasser giebt in diesem Buche eine weitere Ausführung der Anmerkungen, die er seiner Bearbeitung der „Systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von Jacob Steiner“, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 82 und Nr. 83, beigefügt hat. Von den drei Teilen des Buches ist der erste „Perspektive der Lage“ betitelt und enthält zunächst eine kurze Darstellung der synthetischen Geometrie in genauem Anschlufs an das Steinersche Werk. Daran schliefst sich die Erörterung, wie man unter Anwendung des Prozesses der Zentralprojektion die geometrischen Elemente festlegen kann, wobei aufser der Bildebene noch eine weitere feste Ebene, die horizontale Grundebene oder wie der Verfasser sie nennt, die „Fufsebene“ eingeführt wird. Die Abbildung der Punkte dieser Fufsebene heifst das „Terrain“. Um einen Punkt im Raume zu bestimmen, fällen wir von ihm auf die Fufsebene das Lot und markieren dessen Fufspunkt. Die Zentralprojektionen des Punktes einerseits und des Fufspunktes andererseits liegen dann auf einer vertikalen Linie und umgekehrt können zwei so gelegene Punkte zur Festlegung eines Raumpunktes verwendet werden, wobei natürlich durch die Bezeichnung angedeutet sein mufs, welcher der beiden auf der Bild-Tafel gegebenen Punkte dem Terrain angehört.

Eine Gerade wird ferner zu bestimmen sein, indem man sich das Bild ihres unendlich fernen Punktes, den Fluchtpunkt, giebt und überdies den „Terrainschnitt“, d. h. das Bild des Punktes, in welchem sie die Fufsebene durchsetzt. Die Ebene endlich kann in analoger Weise gegeben werden durch ihre Fluchtlinie, d. h. das Bild der unendlich fernen Geraden, und ihren „Terrainschnitt“, das Bild der Spur in der Fufsebene. Fluchtlinie und Terrainschnitt einer Ebene begegnen sich stets auf dem Horizont.

Nachdem in solcher Weise die Grundelemente graphisch bestimmt werden können, findet eine Anzahl von Aufgaben der Raumgeometrie ihre Erledigung. Zu erwähnen sind einige elegante Anwendungen auf Schattenkonstruktionen.

Sodann werden die Kegelschnitte eingeführt als Zentralprojektionen des Kreises und umgekehrt Kreise der Bildebene als Kegelschnitte der Fufsebene gedeutet. Die Bemerkung auf Seite 70 unten mufs dahin richtig gestellt werden, dafs ein zur Tafel *nicht* paralleler Kreis im Bilde wieder als Kreis erscheinen kann. Es ist ja nur nötig, dafs für den projizierenden Kegel der gegebene Kreis der einen Kreis-Schaar, der Kreis in der Bildebene aber der anderen Kreis-Schaar des Kegels angehöre.

Im zweiten Teile, der „Mafsperspektive“ überschrieben ist, erledigt der Verfasser ausführlich die Aufgaben, die sich auf die Ausmessung von Linien und Winkeln beziehen; der dritte Teil endlich bringt „Anwendungen auf Erzeugnisse projektivischer Gebilde im Raume“. Es wird das Hyperboloid

dargestellt als Erzeugnis projektiver Punktreihen, wobei sich für die Bestimmung eines Punktes der „Umrifskurve" eine einfache Konstruktion ergiebt, ferner das hyperbolische Paraboloid und endlich noch die Aufgabe konstruktiv vollständig durchgeführt die Geraden zu zeichnen, welche vier gegebenen Geraden begegnen. Was die Darstellung der Flächen betrifft, so wäre eine gröfsere Anschaulichkeit, Klarheit und Übersichtlichkeit der Figuren zu wünschen. Ein Anhang enthält eine recht nützliche Zusammenstellung von Sätzen über Kegelschnitte, wobei hinsichtlich der Beweise auf Fiedlers „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" nach Salmon verwiesen wird.

Als Leserkreis dachte sich der Verfasser „vor allem Lehrer und Dozenten der höheren Mathematik, dann auch Künstler und Laien von tieferer mathematischer Bildung, am wenigsten Techniker aller Art".

In Bezug auf die Darstellung ist der unbedingte Anschlufs an Steiner in allen Bezeichnungen doch wohl kaum zu rechtfertigen. Dafs der verdienstvolle Redakteur der „Klassiker der exakten Wissenschaften" den grofsen deutschen Geometer nach Gebühr würdigt, wird jeder begreiflich finden. Der Verfasser führt als Grund für die Beibehaltung der Steinerschen Terminologie den an, dafs der Leser, falls er tiefer einzudringen wünsche, sich in Steiners klassischem Werke sofort zurecht finde. Aber die neuere Geometrie hat seit Steiner doch noch Fortschritte gemacht, die niemand ignorieren kann. Sicher ist es doch auch als ein Fortschritt zu betrachten, wenn heutzutage wenigstens im Gebiete der reinen Mathematik die geometrischen Elemente Punkte, Gerade u. s. f. einheitlich bezeichnet werden. Der Fortschritt ist aber noch wichtiger als historisches Verständnis. Steiner selbst würde in der Gegenwart das Doppelverhältnis von vier harmonischen Elementen nicht mehr $= +1$ setzen und es erscheint als ein aussichtsloser Versuch, die ganz veralteten Steinerschen Bezeichnungen zu neuem Leben erwecken zu wollen.

Prinzipieller und wichtiger aber erscheint folgender zweite Punkt. Der Verfasser vertritt sehr richtig und im Widerspruch zu Steiner die Anschauung, dafs die Raumgebilde der neueren Geometrie auch in entsprechender Weise durch mathematisch-exakte Zeichnungen dargestellt und dafs die Raum-Konstruktionen aus wissenschaftlichen und pädagogischen Gründen wirklich durchgeführt werden sollen. Er thut dies in der von ihm entwickelten freien Perspektive und betont deren Vorzüge gegenüber der andern Form der Darstellung (Peschka), bei der blofs die Tafel verwendet wird. Denn „wir sehen die Dinge auf der Erde stehend und nicht an Wände befestigt".

Gerade hierin mufs der Referent sich zu einer anderen Meinung bekennen. Stellt man sich auf den rein theoretischen, abstrakten Standpunkt, so mufs zur Darstellung der *idealen* Gebilde der neueren Geometrie eine Projektionsart gewählt werden, die *möglichst wenig* neue Elemente einführt und die aus der Erfahrung stammenden Begriffe der vertikalen Linien u. s. f. *nicht* benutzt. Dies leistet die freie Perspektive, bei der man blofs die Tafel und das Projektionszentrum verwendet. Die Einführung einer weiteren festen Ebene ist schon eine Konzession an die Praxis. Namentlich die vom Verfasser benutzte Fufsebene dient dem Zwecke, eine gröfsere Anschaulichkeit zu erzielen. Denn durch dieselbe werden ohne weiteres die drei Di-

mensionen des Raumes angedeutet. Deswegen eignet sich diese Darstellung besonders für architektonische Objekte, wie dies ja auch der allgemeinen Übung entspricht.

Verläfst man aber den rein abstrakten Standpunkt und verlangt von den Darstellungen der Gebilde der Raumgeometrie in erster Linie Anschaulichkeit und leichte Herstellbarkeit, so braucht man überhaupt keine Perspektive zu zeichnen, sondern kann Parallelprojektionen benutzen. Diese einfachere Projektionsart wird in den meisten Fällen genügen. Denn bei perspektiven Ansichten mathematischer Objekte wird die gröfsere Tiefenwirkung und die eine Raumvorstellung ausbildende Kraft der Perspektive in der Regel gar nicht voll zur Geltung kommen.

Soll aber der pädagogische Faktor betont werden, der in der Ausbildung des Vorstellungsvermögens liegt, so scheint dem Referenten gerade die angewandte Perspektive, die in der Grundebene gegebene Risse benutzt, also die Darstellung einfacher architektonischer Objekte, einer Pfeilerreihe, einer Treppe u. s. f. am geeignetsten, die Raumanschauung auszubilden. Jede freie Perspektive trägt etwas Abstraktes, Unanschauliches in sich und dürfte nur den *Abschlufs* eines Lehrganges des perspektiven Zeichnens bilden.

München. DOEHLEMANN.

A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig. Bd. I, Einführung in die Mechanik. 2. Aufl. 1900. — Bd. II, Graphische Statik. 1900. — Bd. III, Festigkeitslehre. 2. Aufl. 1900. — Bd. IV, Dynamik. 2. Aufl. 1901.

Graphische Statik und Festigkeitslehre gehören zur technischen Mechanik im engeren Sinne des Wortes, weil ihre methodische Ausbildung im Anschlufs an die Architekten- und Ingenieurpraxis erfolgt ist. Immerhin bildet die allgemeine Mechanik auch die wissenschaftliche Grundlage dieser Disziplinen, und es folgt aus diesem einfachen Sachverhalt, dafs der Studierende an einer technischen Hochschule sich zunächst mit den Elementen der theoretischen Mechanik vertraut macht und dann zu den Anwendungen übergeht. In Wirklichkeit wird dieser natürliche Weg auch heute noch eingeschlagen. Man hält es nur für passend, die systematische Darstellung der allgemeinen mechanischen Grundlehren — in Rücksicht auf die spezifischen Bedürfnisse der Studierenden — ebenfalls als Teile der „technischen Mechanik" zu bezeichnen. Gröfsere zusammenhängende kinetische Probleme wie die Theorie der Kurbelmaschinen, des Regulators, der Fahrzeuge, der Turbinen etc. werden bei dieser Auffassung in das Gebiet der „theoretischen Maschinenlehre" verwiesen.

Das vorliegende Werk geht zwar weit über das hinaus, was die älteren Darstellungen der technischen Mechanik über dynamische (und speziell kinetische) Fragen enthalten, hält sich aber doch im Grofsen und Ganzen an die durch den technischen Unterrichtsgang auferlegte Abgrenzung. Die Zentrifugalregulatoren treten demgemäfs als ideale (reibungsfreie) Systeme auf, die Bewegung der Kurbelmechanismen ist — ohne vollständige Berücksichtigung der wirklichen Kraftfelder — nur in den allgemeinsten Grundzügen angedeutet. Die elastischen Deformationen sowie die Beanspruchung der einzelnen Maschinenteile werden bei dieser Auffassung des Unterrichtsstoffes

ebenfalls nicht behandelt. Wohl aber sind den Grundvorstellungen über Reibung, Luftwiderstand und Stofs einige Ausführungen gewidmet.

Die Hilfsmittel der höheren Analysis hat der Herr Verfasser in allen Teilen des Werkes möglichst beschränkt — und niemand wird ihm deswegen einen Vorwurf machen können. Will man aber bei verwickelteren mechanischen Problemen der Technik, die aus praktischen Gründen eine Lösung verlangen, nicht bei nutzlosen allgemeinen Redensarten stehen bleiben, so ist man genötigt zu passenden *Näherungsmethoden* zu greifen und auf diese Weise eine Lösung zu erzwingen, die als Ersatz für ein streng mathematisches Resultat dienen kann und noch aufserdem die Vorteile der Einfachheit und Kürze vor diesem voraus hat. In diesem Sinne hat schon Poncelet gangbare Wege vorgezeichnet und andere sind ihm gefolgt. Leider haben diese Bestrebungen in dem vorliegenden Werke keine genügende Beachtung gefunden. Der Herr Verfasser mufste sich deshalb öfters entschliefsen, verwickeltere mechanische Vorgänge durch allgemeine Beschreibungen zu skizzieren, wodurch greifbare Resultate, die gerade der Ingenieur so notwendig braucht, nicht gewonnen werden können.

Jedem Leser des vorliegenden Werkes wird der fast vollständige Mangel an Litteraturnachweisen für die Quellen aufgefallen sein, aus denen die hervorragendsten mechanischen Leistungen entsprungen sind — ein Mangel, der übrigens in der Fachlitteratur vielfach empfunden wird. Wir sind überzeugt, dafs der Herr Verfasser in seinen mündlichen Vorträgen den Zuhörern die notwendigsten Mitteilungen über die Entstehung des D'Alembertschen Prinzips und des Prinzips der virtuellen Verschiebungen nicht vorenthält — aber wir sehen nicht ein, weshalb die Leser des Buches von einem Euler, Lagrange, Poisson, Cauchy nicht mehr als den Namen erfahren sollen. Die Lehrbücher von Schell, Somoff und Routh verdanken ihren allgemein anerkannten Wert zum grofsen Teile den historischen Notizen, die ja ohnehin keinen übermäfsigen Raum beanspruchen, aber ausreichen, um manchem Leser einen Fingerzeig zu geben, wo er sein Wissen gelegentlich vertiefen und erweitern kann. Selbstverständlich wird niemand von einem Lehrbuch, welches in erster Linie für solche Studierende bestimmt ist, die auf die Aneignung einer bestimmten Disziplin nur eine kurze Zeit verwenden können, eine encyklopädische Vollständigkeit der historischen Nachweise verlangen — es genügt hier durchaus, auf diejenigen Leistungen aufmerksam zu machen, welche die Grundsteine der heutigen Mechanik bilden. Das eigentliche Studium der geschichtlichen Entwicklung dieser Wissenschaft wird immer eine selbständige Aufgabe bleiben.

Der *erste* Band der Vorlesungen behandelt die elementare Mechanik des materiellen Punktes, des starren Körpers, der elastischen und flüssigen Systeme. Er giebt aufserdem eine kurze Übersicht über die Reibungserscheinungen und andere passive Widerstände.

Eine eigentümliche Stellung hat das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* (§ 15) in dieser „Einführung" erhalten. Da es im methodischen Gange des Unterrichts zunächst für einen einzelnen freien Punkt ausgesprochen wird, so geht bei dieser Auffassung das eigentliche Wesen dieses Grundgesetzes der Mechanik ganz verloren. Denn es tritt dem Studierenden als eine ziemlich nutzlose Formel entgegen, aus welcher er nur den ihm bereits bekannten Satz vom Parallelogramm der Kräfte ableiten kann. Es fehlt eben an dieser

Stelle noch der Begriff des Systems und damit auch die Möglichkeit, über die virtuellen Verschiebungen irgend etwas Bestimmtes auszusagen. In § 18 tritt nun zwar ein mechanisches System in einfachster Form auf, indem hier der Fall eines materiellen Punktes betrachtet wird, der gezwungen ist, auf einer festen Fläche zu bleiben. Allein diese Gelegenheit benutzt der Herr Verfasser nicht, um dem berühmten Prinzip wenigstens etwas Leben einzuflöſsen. Erst im § 21 wird es zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte am starren Körper herangezogen. Es heiſst hier (p. 143):

„Wir hatten ferner bei der Mechanik des materiellen Punktes das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bewiesen und wollen auch dieses auf den starren Körper übertragen. Zu diesem Zwecke denken wir uns dem Körper eine willkürliche (virtuelle) Bewegung ertheilt. Diese Bewegung kann zwar auch von endlicher Grösse sein; gewöhnlich(!) wird aber das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten am starren Körper nur auf unendlich kleine Lagenänderungen angewendet, und wir wollen es daher von vornherein für solche ableiten. Der Uebertragung auf eine Bewegung von endlicher Grösse steht nachher ohnehin nichts im Wege, da sich jede endliche Bewegung auf eine Summe von unendlich kleinen Lagenänderungen zurückführen lässt."

Hier liegt aber offenbar ein Irrtum vor. Denn die Forderung, daſs die Arbeit bei einer unendlich kleinen Bewegung verschwinde, ist notwendig und hinreichend für das Bestehen eines Gleichgewichtszustandes. Die Forderung, daſs auch bei einer endlichen Bewegung die Arbeit verschwinde, geht weiter und entspricht einer Spezialisierung des allgemeinen Gleichgewichtes. Sie giebt nämlich die bekannten Bedingungen des *astatischen* Gleichgewichts:

$$\Sigma P_1 x_1 = 0, \quad \Sigma P_1 x_2 = 0, \quad \Sigma P_1 x_3 = 0,$$
$$\Sigma P_2 x_1 = 0, \quad \Sigma P_2 x_2 = 0, \quad \Sigma P_2 x_3 = 0,$$
$$\Sigma P_3 x_1 = 0, \quad \Sigma P_3 x_2 = 0, \quad \Sigma P_3 x_3 = 0,$$

deren Ableitung offenbar nicht bezweckt ist.

Das D'Alembertsche Prinzip wird in dem ersten Bande der Vorlesungen nur gestreift, da die systematische Darstellung desselben dem letzten Bande vorbehalten ist. Im § 14 der „Einführung" wird es bei Gelegenheit einer sehr ausführlichen Erörterung über Centripetal- und Centrifugalkraft erwähnt.

Diesen Betrachtungen liegt der einfache Fall zu Grunde, daſs ein materieller Punkt mit der Masse m sich mit der konstanten Geschwindigkeit v in einem Kreise vom Halbmesser r bewegt. Die hierbei auftretende Gröſse $C = m\frac{v^2}{r}$ wird als „Centripetalkraft" bezeichnet. Hieran schlieſst sich auf p. 69 die Bemerkung:

„Im Zusammenhang mit ihr (der Centripetalkraft) steht aber noch der Begriff der Centrifugalkraft, der noch eine genauere Erwägung erfordert. Kaum eine andere Betrachtung aus den Elementen der Mechanik hat nämlich schon zu so vielen Unklarheiten und falschen Deutungen Veranlassung gegeben, als die Einführung des Hilfsbegriffes der Centrifugalkraft. Wie mir scheint, ist dies vorwiegend darauf zurückzuführen, dass von diesem Begriffe zu zwei verschiedenen Zwecken Gebrauch gemacht wird, ohne dass diese stets richtig auseinander gehalten würden."

Hierzu wird noch Hertz (Prinzipien der Mechanik) zitiert mit der Bemerkung, daſs auch er in der Auffassung der Centrifugalkraft geirrt habe.

Der Studierende muſs nun entschieden der Ansicht werden, daſs hier einer der dunkelsten Punkte der Mechanik vorliegt, dessen Aufklärung den Bemühungen der gröſsten Autoritäten miſslungen ist. Aus den Erörterungen des Herrn Verfassers erfahren wir, daſs der Druck der Räder eines in einer Kurve fahrenden Wagens gegen die äuſsere Schiene die „*Centrifugalkraft im gewöhnlichen Sinne des Wortes*" ist, und daſs diese Kraft „*physikalisch existiert*". Einen weiteren Aufschluſs erhalten wir auf p. 70:

„An dem Eisenbahnwagen, den wir betrachten, können alle Kräfte, die an ihm wirken, nicht im Gleichgewicht miteinander stehen, sondern wir wissen schon, dass sie eine Resultirende ergeben müssen, die die Richtungsänderung der Bewegung hervorruft. Trotzdem erscheint es aber erwünscht, die Aufgabe auf ein Gleichgewichtsproblem zurückzuführen. Das kann natürlich nur willkürlich oder, wenn man will, gewaltsam geschehen, indem man sich noch eine Kraft hinzudenkt, die in Wirklichkeit gar nicht vorhanden ist, ... sie muss die Resultirende aller übrigen Kräfte, also die Centripetalkraft, gerade aufheben, also gleich gross und entgegengesetzt gerichtet mit ihr sein."

Offenbar ist der Eisenbahnwagen bei dieser Auffassung identisch mit einem materiellen Punkte, welcher sich auf einem festen Kreise mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt. Aus dem Beispiel auf p. 72 (Berechnung der theoretischen Schienenüberhöhung in Kurven) geht unzweideutig hervor, daſs diese „*fingierte*" Centrifugalkraft mit der „*physikalisch existierenden*" identisch ist.

Unterscheidet man konsequent zwischen Massenbeschleunigung, eingeprägter Kraft und Systemreaction — wie es das D'Alembertsche Prinzip verlangt — so fallen von vornherein alle Schwierigkeiten, welche die Gröſse C betreffen, fort, und jede weitere Auseinandersetzung kann eher verwirrend als aufklärend wirken.

Die Statik, welche im ersten Bande auf den materiellen Punkt und das einfache starre System beschränkt ist, findet im *zweiten* Bande eine weitere Ausgestaltung mit Rücksicht auf die Seilpolygone, die Chasles-Möbiussche Kräftereduktion, das ebene und räumliche Fachwerk und die Theorie der Gewölbe. Bei dem groſsen Umfang des Stoffes muſs man dem Geschick, welches der Herr Verfasser in der Auswahl der Probleme und der Durchführung derselben bekundet, unbedingte Anerkennung zollen. Vielleicht hätte das Thema der Initialspannungen — wegen seiner praktischen Bedeutung — eine etwas eingehendere Beachtung verdient, zumal da dieses Gebiet in den letzten Jahren durch mehrere wertvolle Arbeiten[1]) in manchen Punkten gefördert worden ist.

Der *dritte* Band (Festigkeitslehre) hat in zweiter Auflage mehrere gröſsere Zusätze erhalten, welche als besondere numerierte Paragraphen dem Texte der ersten Auflage eingefügt wurden.

§ 22a enthält allgemeine Bemerkungen über Balken aus Guſseisen und Stein, worin die Giltigkeit der gewöhnlichen Biegungsformeln erörtert wird.

---

1) M. vergl. etwa die Abhandl. von F. H. Cilley. Sill. Journ. [4] 11. 1901.

Die §§ 63a und 63b hat bereits Herr Weingarten[1]) einer sachlichen Kritik unterzogen, so dafs wir uns hier einer weiteren Beurteilung enthalten können.

In § 70a wird dem Leser mitgeteilt, dafs Herr Prandtl demnächst auf Grund der mathematischen Elastizitätstheorie eine Untersuchung „über die Biegung eines gekrümmten Stabes, dessen Querschnittsabmessungen von gleicher Gröfsenordnung mit dem Krümmungshalbmesser sind“, veröffentlichen wird.

Der letzte Zusatz-Paragraph 70b berichtet kurz über die Untersuchung der Spannungsverteilung in einer durchlochten Blechtafel des Herrn Kirsch (Ztschr. d. V. D. Ing. 1898).

Eine sachliche Erweiterung hat die zweite Auflage der Festigkeitslehre im Vergleich mit der ersten nicht erhalten, da die eingeschalteten Paragraphen teilweise keinen greifbaren Inhalt besitzen oder wie die §§ 63a und 63b ihren Zweck — die mathematische Sicherstellung der Castiglianoschen Sätze — ganz verfehlen.

Wenn auch der Techniker auf mathematisch strenge Lösungen gern verzichtet und in vielen Fällen, schon wegen der Unzulänglichkeit der analytischen Methoden, darauf verzichten mufs, so kann man doch keineswegs von der Forderung abgehen, dafs in einem Lehrbuch der technischen Mechanik ungenaue oder gar falsche Lösungen eines bestimmten Problems als solche scharf gekennzeichnet werden. Hierhin gehört die Berechnung der Spannungsverteilung in einem rotierenden Schleifsteine. Im § 50 behandelt der Herr Verfasser die Bestimmung der Normal- und Tangentialspannung in einer unendlich langen Röhre, welche einem konstanten Flächendruck auf der Innenseite ausgesetzt ist, während von körperlichen Kräften abgesehen wird. Eine Anmerkung hierzu (p. 327) beginnt mit dem Satze: „Ein Schleifstein, der mit grosser Winkelgeschwindigkeit rotirt, wird in ganz ähnlicher Weise beansprucht, wie ein dickwandiges Rohr[2]) durch einen inneren Ueberdruck.“ Dem Studierenden wird hier eine starke Phantasie zugemutet, um die nahe Verwandtschaft beider Probleme einzusehen. Jedenfalls müssen beim rotierenden Schleifstein sowohl die beiden ebenen Seitenflächen als auch die beiden cylindrischen Begrenzungen entsprechend spannungsfrei sein. Diesen Bedingungen genügt aber die Partikularlösung für das Röhrenproblem keineswegs. Ihre willkürliche Übertragung auf den Schleifstein führt auf eine prinzipiell falsche Formel. Auch der Hinweis auf die Versuchsresultate des Herrn Grübler (Ztschr. d. V. D. Ing. 1897, 1899) trägt hier nicht das Mindeste zur Klarstellung der Frage bei, da auch die in den Arbeiten des Herrn Grübler benutzten theoretischen Gleichungen die Grenzbedingungen nicht einmal annähernd erfüllen. Die einfache Mitteilung an den Leser, dafs das Problem der rotierenden Scheibe, trotz der mannigfachsten Bemühungen, keine befriedigende theoretische Lösung zugelassen hat, wäre hier zweifellos belehrender gewesen, als der oben zitierte Satz und die darauf folgenden Erörterungen des Herrn Verfassers.

Der *vierte* Band (Dynamik) giebt uns Veranlassung, einige Bemerkungen

1) Rezension über „Aug. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik“. Archiv d. Math. u. Physik. 3. Reihe. Bd. 1. p. 342—352. 1901. M. vergl. auch die sich unmittelbar daranschliefsende Polemik zwischen Autor und Rezensent.

2) Der Zusatz „von unendlicher Länge“ fehlt im Texte.

über die in § 11 gegebene Darstellung des D'Alembertschen Prinzips zu machen, da dieselbe von den bisher üblichen mehrfach abweicht.

Indem der Herr Verfasser den Vektor der äufseren Kraft, welche auf einen Punkt des Systems mit der Masse m wirkt durch $\mathfrak{P}$ und die zugehörige Reaktion mit $\Sigma\mathfrak{J}$ bezeichnet, nimmt der dem D'Alembertschen Prinzip eigentümliche Drei-Vektoransatz die Form an:

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J}.$$

Darauf wird ein neuer Buchstabe $\mathfrak{H}$ eingeführt durch die Gleichung

$$\mathfrak{H} = -m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$$

und es folgt die Bemerkung:

„In dem Kunstgriffe, das dynamische Problem durch Zufügung der Trägheitskräfte $\mathfrak{H}$ auf ein statisches zurückzuführen, besteht der Kern des D'Alembertschen Princips. Freilich wird dieses, wie wir alsbald sehen werden, häufig oder gewöhnlich in einer analytischen Form ausgesprochen, die den wirklichen Gehalt des Princips nicht so deutlich hervortreten lässt."

Die obige Drei-Vektorgleichung heifst jetzt:

$$\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J} + \mathfrak{H} = 0.$$

Es ist ganz selbstverständlich, dafs sich die drei Kräfte $\mathfrak{P}$, $\Sigma\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{H}$ am Massenpunkte m des Systems das Gleichgewicht halten. Ebenso selbstverständlich ist es, dafs sich auch alle diese Kräfte am ganzen „Haufen" (System) das Gleichgewicht halten. Ganz unverständlich bleibt es aber, was diese trivialen Wahrheiten mit dem D'Alembertschen Prinzip zu thun haben. Leider erfahren wir dies auch nicht aus dem oben zitierten Satze des Herrn Verfassers, in welchem der *Kern* des D'Alembertschen Prinzips offen gelegt werden soll. Dieser Kern steckt nämlich gar nicht in dem Kunstgriffe der Einführung eines neuen Buchstabens für die negative Massenbeschleunigung, sondern in der schlichten Behauptung, dafs die Reaktionen $\Sigma\mathfrak{J}$ für alle Massenpunkte genommen an dem gegebenen System im Gleichgewicht sind. Diese Bemerkung, welche nur die Reaktionen $\Sigma\mathfrak{J}$ betrifft, hat der Herr Verfasser ganz unterlassen und dadurch den *Kern* des Prinzips vollständig verfehlt.

Im weiteren Verlauf der Entwicklung wird die geometrische Summe über das ganze System gebildet und es ergiebt sich die Gleichung

$$\Sigma m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \Sigma\mathfrak{P},$$

indem $\Sigma\Sigma\mathfrak{J} = 0$ gesetzt wird. Diese Gleichungen sind richtig, wenn das betrachtete System vollständig frei ist, was aber schon in dem ersten Beispiel (Pendel), das der Herr Verfasser in § 12 giebt, nicht zutrifft. Aufserdem sind dieselben — auch für den Fall des freien Systems — kein adäquater Ausdruck des D'Alembertschen Prinzips, sondern führen unmittelbar zu dem Schwerpunktsatze, dessen Ableitung offenbar an dieser Stelle nicht bezweckt ist, da derselbe erst im § 13 betrachtet wird.

Nach dieser mifslungenen Einführung des D'Alembertschen Prinzips heifst es weiter (p. 110):

„In den Lehrbüchern der analytischen Mechanik wird das D'Alem-

bertsche Princip gewöhnlich durch eine Formel ausgedrückt, die aus den vorausgehenden Betrachtungen (?) folgt, wenn man sie in Verbindung mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bringt."

Die Verbindung mit dem Lagrangeschen Prinzip wird dann auf eine ganz ungewöhnliche Art hergestellt, da sie „aus den vorausgehenden Betrachtungen" — wie wir gesehen haben — gar nicht gefolgert werden kann. Der Herr Verfasser sagt nämlich weiter:

„Der Weg, den der ins Auge gefasste materielle Punkt hierbei (d. h. bei der virtuellen Verschiebung) zurücklegt, sei $\delta\mathfrak{s}$; dann ist für jedes willkürliche $\delta\mathfrak{s}$[1])

$$(\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J} + \mathfrak{H})\,\delta\mathfrak{s} = 0,$$

also bei Uebertragung der Betrachtung auf den ganzen Punkthaufen

$$\Sigma(\mathfrak{P} + \mathfrak{H})\,\delta\mathfrak{s} = 0,$$

da sich die Arbeiten der inneren Kräfte im vorliegenden Falle gegeneinander wegheben."

Die erste dieser beiden Formeln ist eine nichtssagende Identität, die zweite für „willkürliche" $\delta\mathfrak{s}$ unrichtig, da unter dieser allgemeinen Voraussetzung über die Variationselemente die Gleichung

$$\Sigma(\Sigma\mathfrak{J})\,\delta\mathfrak{s} = 0$$

keineswegs bestehen kann, sondern ganz wesentlich an die Bedingung gebunden ist, dafs die $\delta\mathfrak{s}$ *mögliche*, d. h. mit der Bewegungsfähigkeit des materiellen Systems verträgliche, unendlich kleine Verschiebungen sind. Auf solche im gegenwärtigen Falle allein brauchbare Variationen wird aber erst in der weiteren Darstellung des Herrn Verfassers aufmerksam gemacht. Er macht nämlich auf p. 111 mit Rücksicht auf die gewöhnlichen Gleichungen der analytischen Mechanik

$$(72)\qquad \Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0$$

die folgende nachträgliche Bemerkung:

„In der analytischen Mechanik denkt man bei der Anwendung von Gleich. (72) gewöhnlich an solche virtuelle Verschiebungen, für die die inneren Kräfte keine Arbeit leisten, obschon Gestaltänderungen dabei nicht ausgeschlossen sein sollen. Man kann dies, weil man die Körper, die das System oder den Punkthaufen ausmachen, nur in solcher Weise miteinander in Verbindung gebracht denkt, dass bei den hierdurch zugelassenen Verschiebungen der Theile gegeneinander in der That keine inneren Arbeiten geleistet werden. Um dies zum Ausdruck zu bringen, pflegt man zu sagen, dass unter den in Gleich. (72) auftretenden Verschiebungskomponenten nur solche zu verstehen seien, die zwar sonst willkürlich, aber dabei *mit den Systembedingungen verträglich* seien. Immer, wenn dieser etwas unbestimmte Ausdruck gebraucht wird, thut man gut, in Gedanken dafür zu setzen, dafs $\Sigma\Sigma\mathfrak{J}\,\delta\mathfrak{s}$ gleich Null sein soll."

Warum hat der Herr Verfasser diese in der analytischen Mechanik

1) Unter $\delta\mathfrak{s}$ ist offenbar immer $\delta\mathfrak{r}$ zu verstehen. Wir haben aber den Text unverändert wiedergegeben.

allein üblichen — mit den Systembedingungen verträglichen — $\delta\mathfrak{s}$, deren Wahl doch keiner *zufälligen Konvention* entstammt, sondern durch das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in bestimmter analytischer Form vollständig gegeben ist, sobald man überhaupt die Reaktionen ($\Sigma\mathfrak{J}$) eliminieren, d. h. zu den *Bewegungsgleichungen* gelangen will, nicht gleich von vornherein dem Leser mitgeteilt? Er wäre dann nicht ganz am Ende der Darstellung, sondern — was einem Lehrbuche doch jedenfalls zum Vorteil gereicht — gleich am Anfange auf den *wahren Kern* des D'Alembertschen Prinzips gestofsen, und dem Studierenden würde nicht zugemutet, sich durch eine ganze Reihe falscher Vorstellungen, welche sich ihm möglicherweise entgegenstellen können, durchzuarbeiten, ehe er zu der „*gewöhnlichen*" und allein richtigen Auffassung hingeführt wird.

D'Alembert selbst kannte — bei der Veröffentlichung seines Traité — das Prinzip der virtuellen Verschiebungen nicht und war deshalb genötigt, die elementaren Gleichgewichtsgesetze anzuwenden, die — wie der Herr Verfasser passend hervorhebt — in den einfacheren Fällen auch noch heute üblich sind.

Für den Techniker ist übrigens das D'Alembertsche Prinzip in der *ersten* Lagrange'schen Form:

$$\text{(A)} \qquad \Sigma\left(\mathfrak{P} - m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)\delta\mathfrak{r} = 0,$$

welche mit der Gleich. (72) übereinstimmt, nicht bequem, da sie die oft mühsame Bildung der zweiten Derivierten $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ verlangt.

Weit handlicher ist die *zweite* ebenfalls von Lagrange (Méc. anal. 2. éd. Bd. 1. p. 305 u. f.) gegebene Formulierung:

$$\text{(B)} \qquad \Sigma\mathfrak{P}\delta\mathfrak{r} = \frac{d}{dt}\Sigma(m\dot{\mathfrak{r}}\delta\mathfrak{r}) - \delta L,$$

worin $\dot{\mathfrak{r}} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ und L die kinetische Energie des Systems bedeutet. Sie wird gewöhnlich nur zur Herleitung des sogenannten Hamiltonschen Prinzips benutzt, ist aber in der vorstehend angegebenen Differentialform weit brauchbarer als das Zeitintegral

$$0 = \int_{t_0}^{t}[\delta L + \Sigma\mathfrak{P}\delta\mathfrak{r}]\,dt$$

mit seinen — für die Mechanik — nutzlosen Minimaleigenschaften, die aufserdem die Existenz eines Potentials der Kräfte $\mathfrak{P}$ voraussetzen. Diese letztere Bedingung ist gerade bei technischen Problemen häufig nicht erfüllt.

Hätte der Herr Verfasser die Form (B) des D'Alembertschen Prinzips in seinem Lehrbuche aufgenommen, so würde die weitere Darstellung der Kinetik an Durchsichtigkeit und Prägnanz ungemein gewonnen haben. Insbesondere hätte sich der ganze dritte Abschnitt, der in ungewöhnlich weitläufiger Form von der *relativen Bewegung* eines Massenpunktes handelt und viele seitenlange Rechnungen erforderte, auf einige Zeilen zusammenziehen lassen. Denn da man schon aus dem ersten Bande (p. 124) die Gröfse

$$2L = (\dot{x}_1 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2)^2 + (\dot{x}_2 + \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3)^2 + (\dot{x}_3 + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1)^2$$

kennt (wir setzen die Masse $m = 1$), so ergiebt die Gleich. (B) nach Ausführung der Differentiationen nach x_1 und $\dot{x}_1$ sofort das Resultat

$$\ddot{x}_1 + 2(\omega_2 \dot{x}_3 - \omega_3 \dot{x}_2) - \omega^2 x_1 + \omega_1(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3) = X_1, \text{ etc.}$$

welches für einen unveränderlichen Wert der Winkelgeschwindigkeit (ω) des rotierenden Bezugssystems die relative Bewegung eines Punktes (x_1, x_2, x_3) darstellt.

Bei Gelegenheit der Ausführungen über das D'Alembertsche Prinzip (p. 109) weist der Herr Verfasser auf ein sehr wichtiges Problem der angewandten Mechanik hin mit den Worten:

„In der Festigkeitslehre werden nämlich die Spannungen und Formänderungen eines elastischen Körpers gewöhnlich nur unter der Voraussetzung untersucht, dass alle daran angreifenden äusseren Kräfte im Gleichgewichte sind und dass der Körper ruht. In der Technik muss man aber öfters auch Festigkeitsaufgaben für bewegte Körper lösen. Hier tritt nun das D'Alembertsche Prinzip als stets bereites Werkzeug auf, diese Aufgaben auf solche an ruhenden Körpern zurückzuführen."

Ein solches Problem — nämlich die Bestimmung der Schwingungen von „schnell umlaufenden Hängespindeln" — ist im § 28 durchgeführt, aber merkwürdigerweise, ohne dafs auf die Grundformeln der Relativbewegung, aus denen doch die Differentialgleichungen (142) auf p. 262 unmittelbar — d. h. ohne jede Rechnung — folgen, Bezug genommen ist. Allerdings beginnen die Entwicklungen über relative Bewegung erst auf p. 289 des vierten Bandes. Aber eine einfache Umstellung der Reihenfolge des Stoffes hätte die mühsame Ableitung der Differentialgleichungen für das elastische Problem erspart.

Im § 32 des vierten Abschnittes (Dynamik zusammengesetzter Systeme) hat der Herr Verfasser versucht, die allgemeinen Bewegungsgleichungen von Lagrange

$$\text{(C)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota} - \frac{\partial L}{\partial q_\iota} = F_\iota$$

auf einem Wege herzuleiten, der von Herrn Weingarten in der oben angeführten Rezension (p. 348—349) eingehend kritisiert ist, und deshalb in der vorliegenden Besprechung als erledigt betrachtet werden kann. Wohl aber werden hier einige Bemerkungen über die Bedeutung der Lagrangeschen Gleichungen am Platze sein, da die Ausführungen des Herrn Verfassers hierzu Anlafs bieten.

Auf p. 347 heifst es: „*Wir haben uns hiermit überzeugt, dass das Hamiltonsche Prinzip und die Lagrangeschen Gleichungen im Grunde genommen dasselbe aussagen.* Selbstverständlich müssen für die Gültigkeit des einen Satzes auch dieselben Bedingungen erfüllt sein, wie für die des anderen."

Diese Behauptungen sind unrichtig, obwohl sie am Schlusse einer längeren Deduktion stehen. Denn in Wirklichkeit besteht zwischen dem sogenannten Hamiltonschen Prinzip

$$\text{(D)} \qquad \delta \int_{t_0}^{t} (L - V)\, dt = 0$$

oder der hiermit gleichwertigen — wenn auch etwas allgemeineren —

Formel (B) und den Lagrangeschen Gleichungen (C) ein ganz *prinzipieller* Unterschied, welcher von Lagrange[1]) selbst klargestellt ist.

Zunächst ist das Bestehen der Gleichungen (C) an die Bedingungen $\delta d q_\iota = d \delta q_\iota$ (p. 344) gebunden, d. h. die Gröfsen q_ι müssen unter allen Umständen *Koordinaten* sein, welche die Lage des zusammengesetzten Systems eindeutig bestimmen. In der That bezeichnet auch der Herr Verfasser auf p. 311 die Gröfsen q_ι als „allgemeine Koordinaten" und hätte nach dieser exakten Bemerkung die auf p. 315 nachträglich mitgeteilte Bedingung: „Vor allem müssen die Körper wirklich als starr betrachtet werden dürfen" weglassen können, da sie leicht Mifsverständnisse hervorruft, zu denen — ohne dieselbe — kein Anlafs vorliegt.

Das sogenannte Hamiltonsche Prinzip (D) sowie auch die Grundgleichung (B) sind jedoch keineswegs an die Bedingung $\delta d q_\iota = d \delta q_\iota$ gebunden und bleiben auch noch für die in der „technischen Mechanik" äufserst wichtigen *Bewegungen mit nicht holonomen Bedingungen* giltig. Ihre Richtigkeit und Brauchbarkeit bleibt ferner bestehen, wenn statt der Gröfsen q_ι passend gewählte *kinematische Gröfsen* — wie etwa die Komponenten $\omega_1 = \frac{d\theta_1}{dt}$, $\omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt}$, $\omega_3 = \frac{d\theta_3}{dt}$ der Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden starren Körpers — genommen werden. Bleiben wir bei dieser speziellen Annahme, so ist natürlich jetzt nicht mehr $\delta d \omega_\iota = d \delta \omega_\iota$, sondern es bestehen die von Lagrange aufgestellten Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\delta d\theta_1 &= d\delta\theta_1 + d\theta_2\delta\theta_3 - d\theta_3\delta\theta_2\\
\delta d\theta_2 &= d\delta\theta_2 + d\theta_3\delta\theta_1 - d\theta_1\delta\theta_3\\
\delta d\theta_3 &= d\delta\theta_3 + d\theta_1\delta\theta_2 - d\theta_2\delta\theta_1,
\end{aligned}$$

deren Benutzung in den Gleich. (D) oder (B) zu der Eulerschen Gleichung für die Rotation eines starren Körpers führt.

Aus diesen Bemerkungen erkennt man ferner, dafs die von dem Herrn Verfasser im § 35 gegebene Ableitung der Gleich. (D) — also des sogenannten Hamiltonschen Prinzips — unzulässig ist, da sie das „Prinzip" einer Beschränkung ($d \delta q_\iota = \delta d q_\iota$) unterwirft, die den wahren Sachverhalt verdunkelt und die Gültigkeitsgrenzen unnützerweise verengt.

Gerade der Umstand, dafs die Formeln (B) und (D) auf weit allgemeinerer Grundlage beruhen als die Lagrangeschen Gleichungen (C) macht sie dem Physiker und Techniker so aufserordentlich wertvoll.

Die vorstehenden Ausführungen zeigen zur Genüge, dafs der Verfasser bei dem gewifs berechtigten Versuche, die allgemeinen Prinzipien von der hergebrachten abstrakten — und häufig allzu schematischen — Herleitungsweise unabhängig zu erfassen und unmittelbarer verständlich zu machen, nicht immer glücklich gewesen ist.

Wir sind aber überzeugt, dafs Herr Föppl es nicht unterlassen wird, die betreffenden Teile seiner „Vorlesungen über technische Mechanik" nach dieser Richtung hin einer gründlichen Umarbeitung zu unterziehen. Alsdann würde auch der anerkannte Wert der mannigfachen anregenden Anwendungen, insbesondere auch der gröfseren Probleme, deren Verständnis eine sichere Kenntnis der allgemeinen Prinzipien voraussetzt, noch wesentlich erhöht erscheinen.

Berlin. K. Heun.

1) Méc. anal. 2. éd. Bd. 2. p. 238.

Heinrich Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemann's Vorlesungen in vierter Auflage neu bearbeitet. Braunschweig 1901, Fr. Vieweg u. Sohn, XI u. 527 S. Preis: geh. 10 Mk., geb. 11,60 Mk.

Über die Gesamtanlage dieses klassischen Werkes der mathematischen Physik ist bereits gelegentlich der Besprechung des ersten Bandes berichtet worden. Der vorliegende zweite Band enthält gleich dem ersten eine rein mathematische Einführung, die sich aber hier wesentlich auf die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen bezieht; die übrigen Bücher, aufser einem ganz neu hinzugekommenen, welches die elektrischen Schwingungen betrifft, sind auf dem durch die drei letzten Abschnitte der Hattendorfschen Ausgabe geschaffenen Boden aufgewachsen. Ein alphabetisches, sich auch auf den ersten Band erstreckendes Sachregister ist am Schlufs des ganzen Werkes angefügt.

Von den fünf Büchern handelt das erste, betitelt: „Hilfsmittel aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen", von den linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Da die neueren funktionentheoretischen Methoden „in der Physik noch keine Anwendung gefunden haben", so stützen sich die mitgeteilten Untersuchungen hauptsächlich auf die älteren Methoden von Euler, Gauss, Kummer, „auf die man zurückgreifen mufs, wenn es sich um wirkliche zur Berechnung geeignete Darstellungen handelt". Die ersten drei Abschnitte dieses Buches sind der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe und den verwandten Gebieten, der Gaufsschen Π-Funktion und der Riemannschen Funktion

$$P\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma & x\\ \alpha', \beta', \gamma' & \end{pmatrix}$$

gewidmet. Der vierte Abschnitt, „Oscillationstheoreme" betitelt, untersucht die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Rücksicht auf die Klassifikation der Integrale nach dem Vorzeichen der Invariante, im besonderen diejenigen Integrale, welche bei positiver Invariante unendlich viele Nullstellen besitzen. Doch ist zu bemerken, dafs dabei auf die Eigenschaften der Invariante selbst, wie sie von H. A. Schwarz und A. Cayley untersucht worden, nicht weiter eingegangen wird.

Das zweite Buch, „Wärmeleitung", zerfällt in drei Abschnitte: „Die Differentialgleichungen der Wärmeleitung", „Probleme der Wärmeleitung, die nur von einer Coordinate abhängig sind", „Wärmeleitung in der Kugel". Es schliefst sich im allgemeinen an die Hattendorfsche Ausgabe der Riemannschen Vorlesung an; von den neu hinzugefügten Kapiteln sei erwähnt das Problem des Vordringens des Frostes, mitgeteilt nach einer Königsberger Vorlesung von Franz Neumann.

Eine wesentliche Erweiterung gegen die früheren Ausgaben hat das dritte Buch, „Elasticitäts-Theorie", erfahren. Während dort nur die Theorie der Schwingungen betrachtet wird, findet der Leser hier in sieben Abschnitten ein Kompendium der Mechanik der elastisch deformierbaren Körper: Allgemeine Elasticitäts-Theorie, statische Probleme, insbesondere die Theorie von Saint-Venant, Druck auf eine elastische Unterlage; im letzten Abschnitt wird das vor einigen Jahren von Herrn Boussinesq untersuchte Problem des Gleichgewichts eines von einer unendlichen Ebene

begrenzten Körpers und eines schweren Körpers auf einer elastischen Unterlage nach der Fourierschen Methode der partikularen Lösungen behandelt. Es folgen drei ausführlicher gehaltene Abschnitte über die Schwingungstheorie, betitelt: Bewegung der gespannten Saiten, die Riemannsche Integrationsmethode, Schwingungen einer Membran. Die hier mitgeteilte Integrationsmethode ist diejenige, welche Riemann in seiner Abhandlung „Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite" angewendet hat, und die später wohl wesentlich durch die Forschungen P. du Bois-Reymonds weiter ausgebaut worden ist. (Man vgl. z. B. G. Darboux, Théorie générale des Surfaces, liv. 4, chap. 4.) Den Beschlufs des Buches bildet ein Abschnitt: Allgemeine Theorie der Differentialgleichung der schwingenden Membran, welcher zunächst die Hauptsätze der Theorie des logarithmischen Potentials, sodann die auf die Integration der Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

bezüglichen Sätze, die harmonischen Funktionen, die Entwickelung nach harmonischen Funktionen giebt.

Das vierte Buch, „elektrische Schwingungen", ist der Natur der Sache entsprechend ganz neu hinzugekommen. Es zerfällt in drei Abschnitte: elektrische Wellen, lineare elektrische Ströme, Reflexion elektrischer Schwingungen. Die auf den Maxwellschen Grundlagen basierten Untersuchungen krystallisieren sich in den beiden ersten Abschnitten um die Integration der sogenannten Telegraphengleichuug

$$c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial U}{\partial t},$$

welche für die Fortpflanzung ebener gedämpfter Wellen in einem unbegrenzten Medium gilt. Im letzten Abschnitt wird zunächst die Reflexion ebener Wellen behandelt, sodann aber die Integration der Maxwellschen Gleichungen in einem beliebigen Felde für periodische Lösungen und unter bestimmten Annahmen über die Leitfähigkeit, die Dielekrizitätskonstante und die Permeabilität durchgeführt.

Im fünften Buch „Hydrodynamik" wird nach einer, die allgemeinen Grundlagen betreffenden Einleitung in zwei Abschnitten die Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit untersucht. Von den zahlreichen Erweiterungen, welcher dieser Teil durch die Neubearbeitung erfahren hat, interessiert besonders die Bewegung eines Ringes mit kreisförmigem Querschnitt; eine Andeutung der Lösung dieses Problems hatte Riemann schon in seinen Vorlesungen 1860/61 gegeben; partikulare Integrale der Differentialgleichung der Aufgabe lassen sich durch die P-Funktion von sieben Argumenten darstellen. Mechanische Probleme aus diesem Teil der Hydrodynamik (gedämpftes Pendel, Geschofsbewegung) werden eingehender erörtert. Nach einem vierten Abschnitt: Unstetige Bewegung von Flüssigkeiten, folgt ein Kapitel über die Fortpflanzung von Stöfsen in einem Gase, in welchem die Riemannsche Theorie der Verdichtungsstöfse mitgeteilt wird; bei dieser Gelegenheit wird auch der von Lord Rayleigh erhobene, die scheinbare Nichterfüllung des Energiegesetzes betreffende Einwand untersucht.

Das Buch beschliefst mit einem Abschnitt über die Luftschwingungen mit endlicher Amplitude. Wie bereits oben erwähnt, ist die Riemannsche

Untersuchung dieses physikalischen Problems der Ausgangspunkt einer wichtigen Methode zur Integration linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung geworden. Riemanns Arbeit selbst scheint weniger bekannt geblieben zu sein; um so mehr ist es zu begrüfsen, dafs ihre Ergebnisse im Zusammenhang mit anderen Untersuchungen Riemanns auf verwandten Gebieten dem mathematischen Leser bequem zugänglich gemacht werden.

Charlottenburg. RUDOLF ROTHE.

F. W. Gedicus. Kinetik, Beiträge zu einer einheitlichen mechanischen Grundanschauung. Wiesbaden 1901.

In der vorliegenden Schrift wird — im Gegensatz zu den bisherigen Begriffsbestimmungen der Mechanik — der Ausdruck Σmv statt $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ als kinetische Energie bezeichnet. Die Gleichung $\Sigma mv =$ const., worin für die v ungerichtete Werte zu nehmen sind, tritt als Grundsatz einer neuen kinetischen Theorie auf. Demnach gilt auch für die Komponentenzerlegung nach rechtwinkligen Achsen die Erhaltungsgleichung

$$\Sigma m v_x + \Sigma m v_y + \Sigma m v_z = \text{const.}$$

Der Hr. Verf. kennzeichnet seine Stellung zur Energetik ferner mit dem Ausspruche: „Es kann gar keine Rede davon sein, dafs $\Sigma mv^2 =$ const. der Ausdruck einer wahren, vollkommenen Erhaltung sei. *Ohne* den Zusammenhang mit dem oben angegebenen Grundgesetz, aus welchem der Ausdruck hergeleitet(?) ist, vermag er überhaupt keinen mechanischen Vorgang eindeutig zu bestimmen.“

Dagegen stellt Σmv „in eindringlichster Weise“ den wahren Wert der Energie dar.

Da der gewählte Ausgangspunkt den ganz eigentümlichen Standpunkt hinreichend kennzeichnet, so kann hier von einem weiteren Eingehen in den Ideengang des Herrn Verfassers abgesehen werden.

Berlin. K. HEUN.

Alois Indra, k. und k. Artillerie-Oberst, **Die wahre Gestalt der Spannungskurve.** Wien, Verlag von R. von Waldheim. 1901.

Unter obigem Titel veröffentlicht Indra den Sonderabdruck einer Reihe von Abhandlungen aus den letzten Jahrgängen der Wiener „Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens“. Er versucht in denselben auf Grund zumeist bekannter Versuche von Uchatius, Sebert, Zabudski u. a. sowie unter Benutzung eigener Ermittelungen Gleichungen herzuleiten, mittels deren es gelingen soll, den wirklichen Verlauf der Gasdruckkurven in Geschützen und Gewehren zur Darstellung zu bringen.

Das Werk besteht hierzu aus zwei Hauptteilen. Der erste will den Nachweis führen, dafs die Gasdruckkurve in Wirklichkeit in periodischen Schwankungen verläuft und als solche mit ihren Ableitungen durch Besselsche (Cylinder-)Funktionen zur Darstellung gebracht werden kann. Der zweite giebt für einen mittleren Verlauf der Druckkurve eine neue Zustandsgleichung der Pulvergase. Eingeschaltet ist noch eine Unter-

suchung über die Zuverlässigkeit der Gasdruckmessungen mit Hilfe des Meifsel- und des Stauchapparates sowie die Entwickelung einer Theorie über die Verbrennung des Pulvers, insbesondere über die Abhängigkeit der Verbrennungsgeschwindigkeit von den verschiedenen sie beeinflussenden Faktoren.

Vom rein theoretischen Standpunkt aus sind die Indraschen Untersuchungen von hohem Interesse, zumal dadurch, dafs sie es zum ersten Male ermöglichen, eine Reihe von Vorgängen beim Schufs auch rechnerisch zu beleuchten. Das Interesse wird dadurch nicht vermindert, dafs es stellenweise fraglich erscheint, ob bei den zur Entwickelung und Prüfung der neuen Theorieen herangezogenen Beispielen die vorhandenen Fehlerquellen des Versuches gebührend berücksichtigt wurden und ob nicht etwa in Anbetracht dieser Fehlerquellen etwas zu weit gehende Berechnungen angestellt worden sind. Dies dürfte auch für eine praktische Verwendung der Herleitungen zu berücksichtigen bleiben, umsomehr, als ja neuerdings für die Praxis zwar nur empirisch, aber doch mit anscheinend völlig ausreichender Zuverlässigkeit ermittelte Darstellungsweisen zur Verfügung stehen, welch letztere allerdings Indra bei der ersten Veröffentlichung seiner Untersuchungen noch nicht alle bekannt sein konnten.

Wenn daher auch das gestellte Problem nur in soweit gelöst erscheint, als „die wahre Gestalt der Spannungskurve“ mit einem gröfseren Grade der Annäherung als bisher zur Darstellung gebracht wird, so bedeuten doch die Indraschen Untersuchungen jedenfalls einen bedeutsamen Schritt vorwärts in der Lösung der Fragen der inneren Ballistik und dürften auch in Bezug auf die Mechanik der Gase von nicht zu unterschätzendem Interesse sein.

Hh.

Neue Bücher.

Analysis.

Landré, Corneille L., Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung. 2. Aufl. gr. 8°. XXIII, 462 S. Jena, Fischer. M. 10.

Müller, E., Aus der Algebra der Logik. II. Das Eliminationsproblem und die Syllogistik. Progr. Tauberbischofsheim. 8°. 22 S.

Schouten, P., Grondbeginselen der levensverzekeringswiskunde. Met een voorword van Corneille L. Landré. Utrecht, Gebr. van der Post. gr. 8°. 8 en 152. F. 1.90.

Astronomie und Geodäsie.

Brathuhn, O., Lehrbuch der praktischen Markscheidekunst unter Berücksichtigung des Wichtigsten aus der allgemeinen Vermessungskunde. 3. Aufl. gr. 8°. XII, 408 S. m. 383 Abb. Leipzig 1902, Veit & Co. M. 10.80; geb. in Leinw. M. 11.80.

Thirion, J., S. J., L'évolution de l'Astronomie chez les Grecs. In-12. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 2.75.

Darstellende Geometrie.

Bernhard, Max, Darstellende Geometrie m. Einschlufs der Schattenkonstruktionen. Als Leitfaden für den Unterricht an techn. Lehranstalten, Oberrealschulen u. Realgymnasien, sowie zum Selbstunterricht hrsg. gr. 8°. VIII, 195 S. m. 229 Fig. Stuttgart, Enderlen. M. 4.60; geb. M. 5.20.

Beyel, Chrn., Darstellende Geometrie. Mit e. Sammlg. v. 1800 Dispositionen zu Aufgaben aus der darstellenden Geometrie. gr. 8°. XII, 189 S. m. 1 Taf. Leipzig, Teubner. Geb. in Leinw. M. 3.60.

Choura, Joh., Lehrbuch der darstellenden Geometrie für die k. u. k. Cadettenschulen u. die k. u. k. Militär-Oberrealschule. gr. 8°. III, 303 S. m. 393 Fig. Wien, Seidel & Sohn. geb. in Leinw. M. 4.

Lebon, Ernest, Traité de géometrie descriptive et de géométrie cotée. 1er vol., à l'usage de la classe de mathématiques élémentaires. 3e édition, entièrement refondue. In-8°. Paris, Delalain. Fr. 5.

Papperitz, Erwin, Über die wissenschaftliche Bedeutung der darstellenden Geometrie u. ihre Entwickelung bis zur systematischen Begründung durch Gaspard Monge. Rektoratsrede. gr. 8°. 24 S. Freiberg, Craz & Gerlach M. 1.

Pillet, J. J., Traité de perspective linéaire, précédé du Tracé des ombres usuelles (rayons à 45 degrés) et du Rendu dans le dessin d'architecture et dans le dessin de machines. 3e édition, revue et considérablement augmentée. In-4°. avec fig. Paris, Librairie des arts du dessin et de la construction, 82, rue de Rennes. Fr. 15.

Steiner, Joach., Studienblätter. Methodisch geordnete Constructions-Aufgaben aus der darstellenden Geometrie. 3. Tl. Lehrstoff der k. u. k. theresian. Militär-Akademie. qu. gr. 4°. 36 Taf. Wien, Seidel & Sohn. M. 6.40. Text gr. 8°. VIII, 200 S. M. 1.20.

Mechanik.

Bahrdt, W., Über die Bewegung eines Punktes auf einer rauhen Fläche, insbesondere auf einem rauhen Kreiscylinder und einem rauhen Kreiskegel. Diss. Kiel. 8°. 47 S.

Cavalli-Lanfredi, Rita, Due casi nuovi di moto di fluidi: nota. Milano, tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C. 8°. p. 8.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. IV. Bd.: Mechanik. 1. Tl. 1. Hft. gr. 8°. S. 1—121. Leipzig, Teubner. M. 3.40.

Finger, Jos., Elemente der reinen Mechanik. Als Vorstudium f. die analyt. u. angewandte Mechanik u. f. die mathemat. Physik an Universitäten u. techn. Hochschulen, sowie zum Selbstunterricht. 2. Aufl. gr. 8°. XIII, 797 S. m. 210 Fig. Wien, Hölder. M. 20.

Гречаниновъ, А., Основанія кинематики. (Grečaninov, A., Grundzüge der Kinematik.) Charkov, Silberberg. 8°. 107 u. 5 Taf.

Korn, Arth., Abhandlungen zur Potentialtheorie. 3. Hft. Über die zweite und dritte Randwertaufgabe u. ihre Lösung. gr. 8°. 56 S. Berlin, Dümmler. M. 1.

— Dasselbe. 4. Hft. Über die Differentialgleichung $\varDelta U + k\varphi^2 U = f$ und die harmonischen Funktionen Poincarés. gr. 8°. 55 S. Ebenda. M. 1.

Langheinecken, P., Das Potential einer materiellen Kugel, deren Dichtigkeit eine ganze rationale Funktion der rechtwinkligen Koordinaten ist. Akad. Preisschrift. gr. 8°. III, 59 S. m. Fig. Leipzig, Engelmann. M. 1.

Reiger, R., Innere Reibung plastischer und fester Körper. Diss. Erlangen. 8°. 55 S.

Zelt, R., Untersuchungen über die Bahncurven eines schweren Punktes auf einem elliptischen oder hyperbolischen Paraboloid mit verticaler Hauptachse. Diss. Halle a. S. 8°. 57 S. u. 4 Fig.-Taf.

Physik und Geophysik. Krystallographie.

Bidlingsmaier, F., Geometrischer Beitrag zur Piëzoelektrizität der Krystalle. Diss. Göttingen. 8°. 60 S. m. 1 Fig.-Taf.

Burgess, Georges-K., Recherche sur la constante de gravitation (thèse). In-8°. Paris, Hermann. Fr. 3.

Classen, J., Mathematische Optik. (Sammlung Schubert Bd. XL.) Mit 52 Fig. X, 207 S. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 6.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1900. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 56. Jahrg. 2. Abt. Physik des Aethers. gr. 8°. LII, 794 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 27.

Hann, Jul., Lehrbuch der Meteorologie. Mit 11 Abbildgn. im Text, 8 Taf. in Lichtdr. u. Autotyp., sowie 15 Karten. gr. 8°. XIV, 805 S. Leipzig, Tauchnitz. M. 30; geb. in Halbfrz. M. 33.

Preston, Thomas, The theory of light. 3d edion, edited by Ch. J. Joly. 8vo. pp. XX, 586. London, Macmillan & Co. 15 s.

Schlüter, W., Schwingungsart u. Weg der Erdbebenwellen. I. Tl.: Neigungen. Diss. gr. 8°. 60 S. m. 1 Taf. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 1.60.

Schütz, E. H., Die Ausnützung des Dampfes in den Lavalturbinen. Diss. Göttingen. 4°. 31 S. m. Tab. im Text.

Smolar, G., Nĕkteré nové úlohy matematické krystalografie. Progr. Jicine. 8°. 42 S. u. 2 Taf.

Stallo, J. B., Die Begriffe und Theorieen der modernen Physik. Nach der 3. Aufl. des engl. Originals übers. u. hrsg. von Hans Kleinpeter. Mit e. Vorwort von Ernst Mach. 8°. XX, 332 S. m. Bildnis. Leipzig, Barth. M. 7.—; geb. in Halbleinw. M. 8.50.

Weinstein, B., Einleitung in die höhere mathematische Physik. gr. 8°. XVI, 399 S. m. 12 Fig. Berlin, Dümmler. geb. in Leinw. M. 7.

Tafeln. Rechenapparate.

Brauer, Ernst A., Springende Logarithmen. Abgekürzte fünfstellige Logarithmentafel mit zunehmenden Grundzahl-Stufen. gr. 4°. 8 S. Karlsruhe, Braun. kart. M. —.90.

Breusing, Arth., Nautische Hülfstafeln. 6. Aufl., 2. Ausg. Hrsg. v. C. Schilling. gr. 8°. III, 282 S. m. 1 farb. Karte. Leipzig, Heinsius Nachf. geb. M. 6.75.

Proell, Reinhold, Rechentafel. gr. 16°. 2 Bl. nebst Gebrauchsanweisung (15 S.). Berlin, Springer. In Leinwand-Futteral M. 2.

Scarpini, Gius., Tavole numeriche di topografia (quadranti centesimali). Torino, Roux e Viarengo. 8° fig. p. 155. L. 3.

Sollier, A., Règle à calcul de grande approximation. Coni, impr. de Pierre Oggero. 16° fig. p. 9. L. —.50.

Zeichnen.

Megede, A. zur, Wie fertigt man technische Zeichnungen? 5. Aufl., hrsg. v. A. Hertwig. 8°. VIII, 96 S. Berlin, Seydel. geb. in Leinw. M. 1.50.

Abhandlungsregister 1900—1901.

Von Prof. Dr. E. WÖLFFING in Stuttgart.

Unter diesem Titel werden die Abhandlungen aus dem Gebiet der angewandten Mathematik verzeichnet, welche in circa 400 der wichtigsten Zeit- und Gesellschaftsschriften enthalten sind. Als Mitarbeiter sind die Herren Prof. Dr. C. Cranz-Stuttgart (Ballistik) und Dr. C. Wagner-Stuttgart (Versicherungsmathematik) gewonnen worden. Die Mitarbeit weiterer Herren für einzelne Gebiete oder auch einzelne Länder wäre sehr erwünscht, um einige noch ganz fehlende Zeitschriften nachtragen und über andere genauer, regelmäſsiger und frühzeitiger berichten zu können. Insbesondere werden die Redaktionen von Zeitschriften, welche die Aufnahme ihrer Abhandlungen aus der angewandten Mathematik in vorliegendes Register wünschen, höflich gebeten, jährlich im April und Oktober die Titel der hierher gehörigen Abhandlungen aus den seither erschienenen Heften dem Verfasser (Stuttgart, Hackländerstr. 38) mitteilen zu wollen. Die Abhandlungen, welche dem Verfasser und seinen Mitarbeitern nicht zugänglich waren, sind mit * bezeichnet.

Abkürzungen.

A.A.B. Annales astronomiques, Bruxelles 1901.
A.A.E.I. Atti dell' associazione elettrotecnica italiana, Milano 3.
A.A.N. Atti della Reale Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli 2 serie 10.
A.A.N.Y. Annals of the Academy of Science of New York 12.
A.A.P. Atti della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Palermo 3 serie 5.
A.A.R. Analele Academiei Romane Bucuresci 22—23.
A.A.T. Atti della R. Accademia di Torino 36.
A.C.N.M. Annaes do club militar naval, Lisboa 1900.
A.D.M. Annali di Matematica pura ed applicata, Milano 3 serie 5.
A.E.N. Annales de l'École normale supérieure, Paris 3 série 5.
A.F. Comptes Rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences, Paris 28.
A.F.G.P. Archiv für die gesamte Physiologie, (Pflüger), Bonn 81—83.
A.F.M. Archiv des Vereins der Freunde der Naturgeschichte von Mecklenburg, Rostock 54.
A.F.S.P. Archiv für systematische Philosophie, Berlin 6.
A.Gr. Archiv der Mathematik und Physik, Leipzig 3. Serie 1.
A.H. Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Hamburg 29.
A.J.B. The Astronomical Journal, Boston 20—21.
A.J.C. The Astrophysical Journal, Chicago 11—13.
A.J.M. American Journal of Mathematics, Baltimore 23.
A.J.S. American Journal of Science 4 series 11.
A.J.W. Assekuranzjahrbuch, Wien 22.
A.M. Acta Mathematica, Stockholm 24.
A.M.T. Archives du Musée Teyler, Haarlem 2 série 7.
A.N. Archives néerlandaises, Haarlem 2 série 4.
A.N.K. Astronomische Nachrichten, Kiel 154—155.
A.ofM. Annals of Mathematics, Cambridge Mass 2 series 2—3.

A.P.C. Annales de Physique et de Chimie, Paris 4 série 23—24.
A.P.L. Annalen der Physik, Leipzig 4. Serie 5—6.
A.P.M. Mémoires der K. K. Akademie zu Petersburg 8. Serie 9—10.
A.P.M.I. Abhandlungen des Preufsischen Meteorologischen Instituts, Berlin 1.
A.S.A. Anales de la Sociedad cientifica Argentina, Buenos Ayres 50—51.
A.S.B. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles 25.
A.S.B.A. Annuaire publié par la Société belge d'astronomie 5.
A.S.G. Archives des sciences physiques et naturelles de Genève 4 série 10—11.
A.T. Annales de la faculté de Toulouse 2 série 2—3.
A.T.P.B. Annales des travaux publiques de Belgique, Bruxelles 5.
A.U.G. Annales de l'Université de Grenoble 13.
A.U.Kh. Annalen der K. K. Universität Charkow 4.
A.U.J. Acta et Commentationes Imp. Universitatis Jurievensis, Juriev 1900 bis 1901.
A.W.P. Archiv für wissenschaftliche Photographie, Halle 2.
B.A. Bulletin astronomique 17 - 18.
B.A.B. Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, Bruxelles 1900.
B.A.C.B. Boletin de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona 3 serie 1.
B.A.Co. Oversigt over de K. Danske Videnskaberner Selskabs Forhandlinger, Kjöbnhavn 1900.
B.A.P. Sitzungsberichte der K. K. tschechischen Akademie, Prag 9.
B.C. Bolletino di matematiche e di scienze fis. e naturali, Bologna 2.
B.D. Bulletin des Sciences mathématiques, Paris 2 série 25.
B.G.C. Bolletino delle sedute dell' Accademia Gioënia di Catania 66.
B.I.C. Bulletin international de Cracovie 1901.
B.M. Bibliotheca mathematica, Leipzig 3. Serie 2.
B.M.R.J. Boletim mensal do observatorio do Rio de Janeiro 1900.
B.R.A.G. Bulletin der Russ. Astronomischen Gesellschaft 8.
B.S.A.F. Bulletin de la Société Astronomique de France, Paris 14.
B.S.B. Bulletin de la Société Scientifique de Boucarest 9.
B.S.B.A. Bulletin de la Société belge d'Astronomie, Bruxelles 5.
B.S.C.P. Bulletin de la Société Chimique de Paris 3 série 26.
B.S.M.F. Bulletin de la Société Minéralogique de France, Paris 1900.
B.S.V. Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles de Lausanne 37.
B.S.W. Bulletin of the Philosophical Society of Washington 14.
B.U.K. Nachrichten der Universität Kiew 1900—1901.
B.V.A.S. Öfversigt af K. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm 57.
C. Časopis, Prag 30.
C.A.A. Verslagen der zittingen der K. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam 9.
C.A.E. Centralblatt für Akkumulatoren- und Elementenkunde, Halle 1.
C.L. La Corrispondenza, Livorno 1900 bis 1901.
C.R. Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Ac. des Sciences, Paris 132—133.
D.M. Der Mechaniker 9.
D.V.M. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Leipzig 10.
D.V.Z. Deutsche Versicherungszeitschrift, Berlin 42.
E.E. L'éclairage électrique, Paris 23 bis 27.
E.M. L'enseignement mathématique, Paris 3.
E.M.W. The English mechanic and world of science, London 72.
E.N. Engineering News 43—44.
E.P. Električestvo, Petersburg 1900 bis 1901.
E.R. Electrical review 1900.
G.M.B. Gaceta matematica Bucuresci 7.
H.H. Hansa, Hamburg 37.
I.L. Publications de l'Institut de Luxembourg 26.
I.M. L'Intermédiaire des Mathématiciens, Paris 8.
J.F.I. Journal of the Franklin Institution, Philadelphia 150.
J.G. Journal des géometres, Paris 6 série 3.
J.H.U.C. John Hopkins University Circulars, Baltimore 20.
J.I.A. Journal of the Institute of actuaries, London 35.
J.I.E.E. Journal of the Institute of electrical engineers, London 30—32.
J.M. Journal de Mathématiques pures et appliquées, Paris.
J.P. Journal de physique, Paris 3 série 10.
J.P.C. The Journal of Physical Chemistry, Ithaca 4—5.
J.R.M.S. Journal of the Royal Microscopical Society, London 1901.

J.R.P.C.G. Journal der Russ. physicochemischen Gesellschaft, Petersburg 32—33.
J.S.M. Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, Porto 14.
J.U.S.A. Journal of the United States Artillery, Fort Munroe, Virg. 1900—1901.
K.L. Kosmos, Lemberg 25.
K.Z. Kriegstechnische Zeitschrift, Berlin 1900—1901.
L.E. L'Elettricista, Roma 9.
M.A. Mathematische Annalen, Leipzig 55.
M.A.B. Abhandlungen der Kais. tschech. Akademie, Prag 1900.
M.A.G. Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens, Wien 1900—1901.
M.A.G.S. Mitteilungen aus dem Gebiete des Seewesens, Pola 28.
M.A.T. Memorie della R. Accademia di Torino 50.
M.C. Mémoires de la Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg 31.
M.G.B. Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft, Bern 1900.
M.H. Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien 12.
M.M. The Messenger of Mathematics 30.
M.M.G.I. Mitteilungen des Militärgeographischen Instituts, Wien 1900.
M.N.A.S. Monthly Notices of the R. Astronomical Society, London 60.
M.P.A. Le matematiche pure ed applicate, Città di Castello 1.
M.P.I.C.E. Minutes of proceedings of the institution of civil engineers, London 1900.
M.P.L. Mathematikai és physikai lapok, Budapest 9.
M.P.N.M. Abhandlungen der physikalischen Klasse von Freunden der Naturwissenschaft, Moskau 1900.
M.P.O. Spaczinskis Bote der Experimentalphysik und elementaren Mathematik 24—26.
M.S.B. Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux 5 série 5.
M.S.G. K. Vetenskaps och Vitterhetssamhälles Handlingar, Göteborg 4 Serie 3.
M.S.L. Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège 3 série 2—3.
M.S.Q. Le Moniteur Scientifique, Paris 1900.
M.S.S.I. Memorie della Società dei Spettroscopisti italiani, Catania 28—29.
M.T.E. Mathematikai és természettudomanyi értesítő, Budapest 17—18.
M.U.K. Denkschriften der Universität Kiew 41.
M.U.Ka. Denkschriften der Universität Kasan 4.
M.U.W. Warschauer Universitätsnachrichten, Warschau 1900.
M.V.A.P. Mitteilungen der Vereinigung der Freunde der Astronomie und kosmischen Physik, Berlin 1900.
M.V.T. Mitteilungen des Verbands der österreich-ungarischen Versicherungstechniker, Wien 1—5.
M.W.R. Monthly Weather Review, Washington 28.
M.y.R.M. Memorias y Revista de la Sociedad Cientifica „Antonio Alzate“, Mejico 15.
M.Z. Meteorologische Zeitschrift, Wien 18.
M.Z.P. Marine-Zeitschrift, Petersburg 297—300.
N. Nature, London 63—64.
N.A. Nouvelles Annales de Mathématiques 4 Série 1.
N.C.P. Il Nuovo Cimento, Pisa 4 serie 11—12; 5 serie 1.
N.J.M. Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie, Stuttgart 1900—1901.
N.L.M. Memorie dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei 16.
N.M.L. Nautical magazine, London 69.
N.M.N. Nyt Magazin for Naturvidenskaberne, Christiania 1900.
N.R. Naturwissenschaftliche Rundschau, Braunschweig 16.
O. The Observatory, London 23.
Ö.M.Ö.B. Österreichische Monatsschrift für den öffentlichen Baudienst 1900.
Ö.V.Z. Österreichische Versicherungszeitung, Wien.
P. Prometheus, Berlin 11.
P.A. Popular Astronomy, Northfield Minn. 8.
P.A.A. Proceedings of the American Association for the advancement of science, Salem 49.
P.A.B. Veröffentlichungen (Glas) der K. Serbischen Akademie, Belgrad 59.
P.A.Bo. Proceedings of the American Academy of Science, Boston 36.
P.E.M.S. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Edinburgh 19.
P.G.M. Petermanns geographische Mitteilungen, Gotha 1900.
P.L.M.S. Proceedings of the London Mathematical Society 32.
P.M. Philosophical Magazine, London 5 series 1.
P.M.J.M. Physiko-mathematisches Jahrbuch, Moskau 1.
P.M.R. Periodico di Matematica, Roma 2 serie 3.

P.O.C. Pubblicazioni dell' Osservatorio privato di Collurania 2.
Pol.M. Il Politecnico, Milano 1900.
P.P.S.E. Proceedings of the Physical Society of Edinburgh 1900.
P.P.S.L. Proceedings of the Physical Society of London 17.
P.R. The Physical Review 10—13.
P.R.S.E. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 23.
P.R.S.L. Proceedings of the Royal Society of London 68.
P.S.B. Procès-verbaux de la Société des Sciences de Bordeaux 1899—1900.
P.Z. Physikalische Zeitschrift, Göttingen 2.
Q.J. The Quarterly Journal of Mathematics, London 31—32.
Q.J.M.S. The Quarterly Journal of the Meteorological Society, London 26.
R.A. Revue d'Artillerie, Paris 1900.
R.A.B. Revue de l'armée belge, Liège 1900.
R.A.G. Rivista di artigleria e genio, Roma 1900—1901.
R.A.J. Russisches Artilleriejournal, St. Petersburg.
R.A.L.R. Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, Roma 5 serie 10.
R.A.N. Rendiconti della Reale Accademia di Napoli.
R.B.A. Reports of the Britisch Association for the advancement of science 70.
R.C.G.S. Annual reports of the superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, Washington 67.
R.C.I.P. Rapports du congrès international de physique, Paris 1—3.
R.C.L. Revista de Ciencias, Lima 4.
R.C.M.P. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 15.
R.F.M. Rivista di Fisica, Matematica e Scienzi naturali, Pavia 3—4.
R.G.M. Revue du génie militaire, Paris 1900.
R.G.O. Revue générale des Sciences, Paris 11—12.
R.I.L. Rendiconti dell' Istituto Lombardo, Milano 33—34.
R.M. Rivista di Matematica, Torino 7.
R.M.B. Revista maritima Brazileira, Rio de Janeiro 36.
R.M.M.P. Revue maritime, Paris 145 bis 146.
R.M.R. Rivista marittima, Roma 1900.
R.T. La rivista tecnica 1.
R.T.C. Rivista topografica e catasto 12—13.
R.T.M. Revista trimestral de Ciencias, Valencia 1.
R.W.L.V. Zeitschrift des Rheinisch-Westphälischen Landmesservereins 1900.
S. Science, New York 2 series 11—13.
S.A.B. Sitzungsberichte der K. Akad., Berlin 1901.
S.A.M. Sitzungsberichte der K. Bayr. Akademie München. Math. Phys. Cl. 1901.
S.A.W. Sitzungsberichte der K. K. Akademie Wien. Math. Nat. Cl. 110.
S.F.P. Société française de physique, Paris 1900.
S.G.B. Sitzungsberichte der K. Böhm. Gesellsch. der Wiss. Prag. Math. Nat. Cl. 1900.
S.G.M. Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften zu Marburg 1900.
S.I.D. Sitzungsberichte der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis zu Dresden 1900.
S.L.P. Sitzungsberichte des Deutschen Naturwissenschaftlichen Vereins „Lotos“ Prag 2 Serie 20.
S.M. Bulletin de la Société Mathématique de France 29.
S.M.Am. Bulletin of the American Mathematical Society, New York 7—8.
S.M.Ka. Bulletin der Physiko-mathematischen Gesellschaft zu Kasan 2 Serie 10.
S.M.M. Sammelschrift der Mathem. Gesellschaft Moskau 22.
S.M.W. Statistische Monatsschrift, Wien 1900.
S.N.G.B. Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde, Bonn 1900.
S.P. Bulletin de la Société Philomatique de Paris 9 série 2.
S.P.M. Memoirs and Proceedings of the Literal and Philosophical Society of Manchester 5 series 5.
S.S.M. Sitzungsberichte des siebenbürgischen Museumsvereins Klausenburg 24.
S.V.K. Sitzungsberichte des naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig, Kiel 12.
S.V.N.W. Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse, Wien 40—41.
T.C.R.S. Transactions of the Canada Royal Society, Ottawa 2 series 6.
T.E. The Electrician, London 44—47.
T.G.C. Arbeiten der topographisch-geodätischen Commission, Moskau.
T.K.L. Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde 1900.
T.M.W. Terrestrial Magnetism, Washington 4.
T.Q. Technological Quarterly 1900.

T.R.S.L. Philosophical Transactions of the Roy. Soc. of London 195.
T.W. Prace matematyznofizyzne, Warschau 12.
U.M.N. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Berlin 7.
V.A.R.I. Veröffentlichungen des astronomischen Recheninstituts, Berlin 1901.
V.E.S. Verhandlungen der physikalisch-medicinischen Societät, Erlangen 32.
W.W. Wszechświat, Warschau 19.
Z.G.V. Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Berlin 2.
Z.H. Zeitschrift für mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht, Leipzig 31—32.
Z.K.F.G. Zeitschrift für komprimierte und flüssige Gase, Weimar 4.
Z.K.M. Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie, Leipzig 32—34.
Z.P. Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht, Berlin 14.
Z.P.C. Zeitschrift für physikalische Chemie, Berlin 32—35.
Z.S. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig 46.
Z.V. Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 30.

A. Allgemeines und Philosophie.

Allgemeines.

1. **H. S. Carslaw.* The use of multiple space in applied mathematics. R.B.A. 644.

Logikkalkul.

2. *A. N. Whitestead.* Memoir on the algebra of symbolic logic. A.J.M. 139; 297.

3. *B. Russell.* Sur la logique des relations. R.M. 115.

4. *P. S. Poretzky.* Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques. S.M.Ka. *A.* 191.

5. *A. Padoa.* Numeri interi relativi. R.M. 73.

6. *J. Rius y Casas.* Teoria formal de los objetos complementarios. R.T.M. 16.

B. Analysis und Algebra.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

7. *P. A. Nekrasow.* Novyja osnovanija učenija o verojatnostjach summ i srednich veličin. (Neue Grundlagen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung der Summen und Mittelwerte.) II. S.M.M. 1.

8. *A. Liapounoff.* Une proposition générale du calcul des probabilités. C.R. 132. 814.

9. **J. C. Wilson.* Inverse of a posteriori probability, James Bernouillis theorem. N. 63. 154; 465.

10. **M. Petrovič.* Über die mathem. Theorie der Wirksamkeit der Ursachen (serb.). P.A.B. 183.

11. *T. Brodén.* Wahrscheinlichkeitsbestimmungen der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung reeller Zahlen. B.V.A.S. 289.

12. *A. Wiman.* Über eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe bei Kettenbruchentwicklungen. B.V.A.S. 829.

13. *E. Landau.* Sur la probabilité que n nombres aient au moins un facteur commun. I.M. 163.

14. *L. Bortkiewicz.* Über den Präcisionsgrad des Divergenzkoefficienten. M.V.T. 5. 1.

15. *G. Ronca.* Probabilità pratiche di colpire nel tiro delle navi. C.L. 1900. 519. 1901. 65.

16. *H. Delannoy, Audibert.* Sur une question de probabilité. I.M. 118.

Siehe auch 276; 283; 549.

Methode der kleinsten Quadrate.

17. **A. F. Ravenshear.* The use of the method of least squares in physics. N. 63. 489.

Fehlerrechnung.

18. *S. v. Kobbe.* Über ein abgekürztes Ausgleichungsverfahren. Z.V. 292.

19. *F. Galton.* Quincunx zur Veranschaulichung des Fehlergesetzes. M. A.G. 1900. 118.

20. *C. Landré.* Ausgleichungsrechnung mittelst der Theorie des Minimums. A.J.W.

21. **J. Boer.* Mechanische vereffening. T.K.L. 3.

22. *G. *de Sandre.* Compensazione degli allineamenti. R.T.C. 13. 113.

23. *H. Koller.* Graphische Fehlerverteilung beim Einketten und bei der Koordinatenumformung. Z.V. 335.

24. **C. v. Steeb*. Die Ausgleichung mehrfach gemessener Höhen bei der Militärmappierung. M.M.G.I. 1900.

Siehe auch 811; 870.

Politische Arithmetik.

25. *K. Wagner*. Sterblichkeitswahrscheinlichkeit und Sterblichkeitskoefficient. D.V.Z. 1.

26. *V. Sersawy*. Über die Darstellung der zusammengesetzten Sterbe- und Lebenswahrscheinlichkeiten für mehrere verbundene Leben durch die einfachen Wahrscheinlichkeiten für einzelne Leben. M.V.T. 1. 11.

27. *H. P. Calderon*. Some notes on Makehams formula for the force of mortality. J.I.A. 157.

28. *E. Blaschke*. Über die Konstruktion einer Absterbeordnung aus den Beobachtungen an österreichischen Versicherten. M.V.T. 21.

29. *J. Altenburger*. Zur Untersuchung der Sterblichkeitsverhältnisse der Versicherten in Österreich-Ungarn. M.V.T. 2. 21.

30. **J. Courau*. Estudio sobre las tarifas diferenciales y su aplicacion en la república. A.S.A. 50. 86.

Siehe auch 36; 47.

Rentenrechnung.

31. *C. Dizler*. Sofort beginnende Leibrenten mit Rückgewähr der Bareinlagen abzüglich der bereits bezogenen Renten. Ö.V.Z. 165.

32. *G. Rosmanith*. Grundzahlen für Invalidenpensionen, Aktivitätsrenten und Witwenpensionen. M.V.T. 4. 6.

33. *A. Riedel*. Ein Beitrag zur Theorie der Waisenpensionen. M.V.T. 5. 20.

Mittelwerte.

34. **O. Zanotti Bianco*. Un teorema sulle medie. R.T.C. 12. 116.

Siehe auch 7, 221.

Statistik.

35. *E. Blaschke*. Über die analytische Darstellung von Regelmässigkeiten bei unverbundenen statistischen Massenerscheinungen. M.V.T. 1. 6.

36. *M. Beeton* and *K. Pearson*. Data for the problem of evolution in man. A first study of the inheritance of longevity and the selective death-rate in man. J.I.A. 112; 458.

37. **K. Pearson*. Mathematical contributions to the theory of evolution. VII. T.R.S.L. 1.

38. **K. Pearson* and *A. Lee*. Mathematical contributions to the theory of evolution. VIII. T.R.S.L. 79.

39. **K. Pearson, E. Warren, A. Lee, A. Fry, C. D. Fawcett*. Mathematical contributions to the theory of evolution. IX. P.R.S.L. 1.

Siehe auch 549; 723.

Versicherungsmathematik.

40. *J. Altenburger*. Die Zeichensprache der Lebensversicherungsmathematik. M.V.T. 1. 18.

41. *E. Czuber*. Zu den theoretischen Grundlagen der Lebensversicherung. M.V.T. 1. 22.

42. *J. Eggenberger*. Zur Frage der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Versicherung. Ö.V.Z. 253.

43. *E. Blaschke*. Die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Versicherungswesen. S.M.W.

44. *V. Sersawy*. Über eine naturgemäfse Bezeichnung der Versicherungswerte. M.V.T. 2. 10.

45. *A. Hauke*. Über Versicherungen, die sich durch Verbindungsrenten ausdrücken lassen. M.V.T. 3. 2.

46. *J. H. Peek*. Über eine rationelle Methode der Bestimmung des Zuschlags. Z.G.V. 8.

47. **T. N. Thiele*. Om dödeligheds-tavlers beregning. B.A.Co. 139.

48. *F. W. Fulford*. On surrender values and the principles which underlie their calculation. J.I.A. 199.

Spiele.

49. *A. Ahrens*. Sur un problème d'échecs. I.M. 88.

50. *E. Landau*. Problème des rois sur l'échiquier. I.M. 140.

51. *C. L. Bouton*. Nim, a game with a complete mathematical theory. A. of M. 3. 35.

Sport.

52. *D. André*. De l'organisation des assauts complets. S.P. 45.

Numerisches Rechnen.

53. **W. Ellis*. Raising figures. O. 95.

54. **A. S. Flint*. Interpolation and raising figures. O. 137.

55. **Dietze*. Über Rechenhilfsmittel. R.W.L.V. 1900. 222. — *Abendroth* 271.

56. *G. Pesci*. Sulla ricerca del „loga-

ritmoseno" e del „logaritmotangente" degli archi piccoli. P.M.R. 1.

57. *H. Minkowski.* Quelques nouveaux théorèmes sur l'approximation des quantités à l'aide des nombres rationnels. B.D. 72.

Siehe auch 59.

Näherungsmethoden, analytische.

58. *M. Koppe.* Über Huygens' Näherungsmethoden bei Kreis- und Logarithmenberechnung. B.M. 224.

59. *G. Pesci.* Sulla ricerca del logaritmoseno e del logaritmotangente degli archi piccoli. C.L. 1901. 209.

60. *W. B. Morton.* Note on algebraic equations in which the terms of higher degrees have small coefficients. Q. J. 31. 247.

61. *F. P. Paternò.* Saggio di una teoria sull' approssimazione naturale o variabile delle radici quadrate. P.M. R. 17.

62. **A. Lodge.* An approximate expression for the value of $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r} = \sigma\left(\frac{1}{r}\right)$. M.M. 103.

63. **M. Nassò.* Sulle formole di approssimazione usate in tacheometria per la misura delle distanze e delle differenze di livello. R.T.C. 12. 41; 59.

Siehe auch 56.

Gleichungen, numerische.

64. *A. Pellet.* Sur la formule d'approximation de Newton. S.M. 139.

65. *W. Heymann.* Über Wurzelgruppen, welche durch Umläufe ausgeschnitten werden. Z.S. 265.

66. **T. Hayashi.* Graphic solutions of the cubics and the quartics. N. 63. 515. — *G. Vacca* 609.

67. *E. Maillet.* Sur les racines des équations transscendantes. C.R. 132. 908.

68. *W. Heymann.* Die Logarithmen negativer Zahlen und ihr Auftreten bei der Auflösung transscendenter Gleichungen. Z.H. 32. 169.

69. *B. Gongrijp.* Über eine graphometrische Lösung der Keplerschen Gleichung. A.N.K. 155. 389.

70. *W. Heymann.* Berechnung der Ellipse aus Umfang und Inhalt. Z.S. 286.

Siehe auch 60; 87—88; 105.

Interpolation.

71. *J. D. Everett.* On a new interpolation formula. J.I.A. 452.

72. **J. D. Everett.* On a central difference interpolation formula. R.B.A. 648.

73. **J. D. Everett.* On Newtons contributions to central difference interpolation. R.B.A. 650.

74. *A. G. Joachimescu.* A supra întrebuințării tablelor de logaritmi. (Über das Interpolieren bei Logaritmentafeln.) G.M.B. 5.

75. *M. Ernst.* O novym wzorze interpolacyjnym dla widma pryzmatycznego. (Über eine neue Interpolationsformel für das Prismenspektrum.) T.W. 220.

Siehe auch 54.

Harmonische Analyse.

76. *L. Hermann.* Über die Zerlegung von Kurven in harmonische Partialschwingungen. A.F.G.P. 83. 33.

Tafeln, numerische.

77. **J. D. Everett.* A compact method of tabulating. N. 63. 346.

78. *H. Sossna.* Über Tafelberichtigungen. Z.V. 325.

79. *J. D. Everett.* On the algebra of difference-tables. Q.J. 31. 357.

80. **J. Tennant.* On factorisation of high numbers. Q.J. 32. 322.

81. **H. O. Goodwin.* Spherical traverse tables and their use. N.M.L. 1.

Siehe auch 285; 694.

Logarithmen.

Siehe 58; 68; 74.

C. Geometrie.

Nomographie.

82. **E. Pasquier.* De la nomographie. A.S.B.A. 133.

83. **G. Pesci.* Abbachi trigonometrici. C.L. 1900. 206.

84. *G. Pesci.* Cenni di nomografia con molte applicazioni alla balistica. R.M.R. Febr.

Siehe auch 262; 284.

Graphischer Calcul.

85. *M. Krause.* Über graphischen Calcul. S.I.D. 13.

86. *G. Arnoux* et *C. A. Laisant.* Applications des principes de l'arithmétique graphique: congruences; propriétés diverses. A.F. 36.

87. *C. Alasia.* A proposito d'una costruzione geometrica dell' equazione cubica. M.P.A. 107.

88. **T. Hayashi.* Graphic solutions of the cubics and the quartics. N. 63. 515. — *G. Vacca* 609.

89. **J. Massau.* Mémoire sur l'intégration graphique des équations partielles. A.T.P.B. 507.

90. *H. Brocard.* Evaluation graphique $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. I.M. 268.

91. *R. A. Lehfeld.* Note on graphical treatment of experimental curves. P.M. 403.

92. *D. M. Y. Sommerville.* Two problems of geometry. N. 64. 526.

93. **Lenner.* Calculo grafico di una distribuzione trifase a stella. L.E. No. 4.

94. *E. Hammer.* Gillmanns Tachymeterdiagramm. Z.V. 267.

Siehe auch 66; 68—69; 451; 596; 698; 721; 749; 793.

Winkelteilung.

Siehe 97.

Kurven.

95. *Arbter.* Über eine einfache Konstruktion der Ellipse und ihrer Fufspunktkurven. M.A.G. 1900. 719.

Siehe auch 91.

Näherungsmethoden, geometrische.

96. *H. Brocard.* Construction approchée des polygones reguliers. I.M. 126.

97. *D. Carrara.* I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. R.F.M. 4. 36; 115; 208.

98. *E. Reichenbacher.* Angenäherte Konstruktion des Kreisumfanges aus dem Durchmesser. Z.H. 32. 275.

99. *E. B. Escott.* Longueur approchée d'un arc de cercle. I.M. 260.

100. *L. Heffter.* Die Quadratur des Kreises. S.N.G.B. A. 18.

101. *G. Peirce.* A curious approximate construction for π. S.M.Am. 7. 426.

Siehe auch 58; 90.

Inhalte.

102. **Gillette.* Rapid earthwork calculation. E.N. 44. 419.

Siehe auch 70.

Quadratur, mechanische.

103. **W. F. Sheppard.* Some quadrature formulae. P.L.M.S. 258.

Siehe auch 738.

Planimeter.

104. **G. B. Maffiotti.* Il planimetro a scure di H. Prytz. R.T.C. 12. 177; 13. 49.

Rechenmaschinen.

105. *G. Pesci.* Di una nuova machina per risolvere le equazioni. C.L. 1900. 309.

106. *Puller.* Rechenscheibe mit Glasläufer und Loupe. Z.V. 296.

107. *P. Weiss.* Sur un nouveau cercle à calcul. J.P. 556.

108. **P. Weiss.* Nouveau cercle à calcul. S.F.P. 158. 4.

Rechenschieber.

109. **Masson.* Règle à calcul donnant la différence entre les hauteurs méridienne et circumméridienne d'un astre. R.M.M.P. 146. 368.

Siehe auch 762.

Geometrischer Calcul.

110. *F. Villareal.* Cálculo geométrico. R.C.L. 189.

111. *G. Bonnet.* Ensayo de goniometria vectorial plana. R.C.L. 159.

Äquipollenzen.

112. *R. Bricard.* Sur la similitude directe dans le plan; application de la méthode des équipollences. N.A. 112.

Vektorenrechnung.

113. **G. Farkas.* Vektorenlehre (ung.). S.G.M. 1900. 25.

114. *W. Voigt.* Über die Parameter der Krystallphysik und über gerichtete Gröfsen höherer Ordnung. A.P.L. 5. 241

115. *A. Macfarlane.* Vector differentiation. B.S.W. 73.

Siehe auch 111.

Ausdehnungslehre.

116. —. Application de la methode de Grassmann à une démonstration de 2 théorèmes de géométrie différentielle. N.A. 1. 414.

Zeichenapparate.

Siehe 171

Zeichnen, geometrisches.

117. *J. Grünwald.* Über das Konstruieren mit imaginären Punkten, Geraden und Ebenen. Z.S. 323.

Darstellende Geometrie.

118. *E. Salfner.* Über Drehungen in der darstellenden Geometrie. Z. S. 300.

119. *A. Adler.* Zur sphärischen Abbildung und ihrer Anwendung in der darstellenden Geometrie. S.A.W. 50.

120. *A. Sucharda.* Kterak lze dokázati větu o osách podobnosti tři kružnic užitim deskriptivní geometrie. (Wie kann man den Satz von den Ähnlichkeitsaxen dreier Kreise mittelst darstellender Geometrie beweisen?) C. 361.

121. *E. Timerding.* Eine Aufgabe aus der darstellenden Geometrie. Z.S. 311.

122. *E. Salfner.* Eine direkte Lösung der Aufgabe, ein Dreikant aus den 3 Flächenwinkeln zu konstruieren. Z.S. 307.

123. *M. d'Ocagne.* Sur la détermination des plans tangents aux héliçoides gauches. M.P.A. 82.

Projektion.

124. **E. v. Fedorov.* Zur Theorie der krystallographischen Projektionen. Z. K.M. 33. 589.

125. *C. E. Stromeyer.* The representation on a conical mantle of the areas on a sphere. S.P.M. No. 11.

126. **H. C. Plummer.* The application of projective geometry to binary star orbits. M.N.A.S. 485.

Siehe auch 118; 141; 426; 687.

Axonometrie.

127. **J. Sobotka.* Zur rechnerischen Behandlung der Axonometrie. S.G.B. No. 32—33.

Perspektive.

128. *F. Schiffner.* Die stereoscopische Reliefperspektive. M.H. 177.

Beleuchtungskunde.

129. *A. Schmidt.* Die Auffindung der Lichtstufen mittels der Rodenbergschen Skale. U.M.N. 85.

Photogrammetrie.

130. *E. Doležal.* Über Photogrammetrie. S.V.N.W. 40.

131. **M. Schwarzmann.* Zur Krystallphotogrammetrie. N.J.M. 1900. 1; 1901. 9.

132. **A. v. Hübl.* Die photogrammetrische Terrainaufnahme. M.M.G.I. 1900.

133. *W. Láska.* Über ein Problem der photogrammetrischen Küstenaufnahme. M.H. 172.

Siehe auch 724.

Krystallographie.

134. **H. Dufet.* Notices cristallographiques. B.S.M.F. 118.

135. *H. M. Goodchild.* Simpler methods in cristallography. I. P.P.S.E. 323.

136. **V. de Souza Brandão.* Über Krystallsysteme. N.J.M. 2. 37.

137. **W. Barlow.* Die Symmetrie der Krystalle. Z.K.M. 34. 1.

138. **E. v. Feodorov.* Beiträge zur zonalen Krystallographie. Z.K.M. 32. 446; 33. 555; 34. 133.

139. **J. Beckenkamp.* Zur Symmetrie der Krystalle. Z.K.M. 33. 606.

140. **C. Viola.* Zur Begründung der Krystallsymmetrien. Z.K.M. 34. 353.

141. **F. J. Levinson-Lessing.* Belehrung über den Entwurf der stereographischen Projektion der Krystalle (russ.). A.U.J. 1900. No. 4.

142. *G. Cesàro.* Perpendiculairement à une axe de symétrie existe-il toujours une face possible, c'est à dire satisfaisant à la loi de rationalité? B. A.B. 162.

Siehe auch 124; 131; 457.

Modelle.

143. *A. Witting.* Fadenmodell zur abwickelbaren Schraubenfläche. S.I.D. 14.

144. **W. H. Blythe.* On models of cubic surfaces. Q J. 32. 266.

Siehe auch 485—486.

D. Mechanik.

Prinzipien der Mechanik.

145. **G. K. Suslov.* Elemente der analytischen Mechanik (russ.). B.U.K. 1900 e 5—7; 9—11; 1901 e 2. 496.

146. *P. Volkmann.* Die gewöhnliche Darstellung der Mechanik und ihre Kritik durch Hertz. Z.P. 14. 266.

147. **W. P. Ermakov.* Die Grundgesetze der Mechanik (russ.). B.U.K. 1900. 5.

148. *G. A. Maggi.* Réflexions sur

l'exposition des principes de la mécanique rationnelle. E.M. 240.

149. *A. Voss.* Bemerkungen über die Prinzipien der Mechanik. S.A.M. 167.

150. *A. Voss.* Über ein energetisches Grundgesetz der Mechanik. S.A.M. 53.

151. **T. J. I'A. Bromwich.* Notes on dynamics. M.M. 127.

152. **A. Vasiliev.* Raum und Bewegung (russ.). P.M.J.M. 1.

153. **H. Kleinpeter.* Zur Formulierung des Trägheitsgesetzes. A.F.S.P. 461.

154. *F. Minding.* De formae, in quam geometra britannicus Hamilton integralia mechanices analyticae redegit, origine genuina. M.A. 119.

155. *H. Cramer.* Über verborgene Bewegung. Z.S. 343.

156. **G. K. Suslov.* Untersuchung der Reaktionen. B.U.K. 1901. b. 1.

157. *A. v. Obermayer.* Zur Behandlung der Begriffe Arbeit, Energie und Effekt im Schulunterricht. Z.P. 14. 207.

Siehe auch 204; 301.

Kinematik.

158. **L. Canalda.* Aplicaciones de la geometria cinematica. B.A.C.B.

159. *P. Saurel.* On a theorem in Kinematics. A of M. 2. 159.

160. *R. Bricard.* Sur une question relative au déplacement fini d'une figure de grandeur invariable. C.R. 132. 947.

161. **K. Zorawski.* Über gewisse Änderungsgeschwindigkeiten von Linienelementen bei der Bewegung eines kontinuirlichen materiellen Systems. B.I.C. 367.

162. *E. Daniele.* Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed estendibili. M.A.T. 25.

163. **W. Förster.* Absolute und relative Bewegung. M.V.A.P. 27; 49; 73.

164. **B. Gern.* Das Gesetz von der Unabhängigkeit der Kraftwirkungen und das Gesetz der relativen Bewegung. M.P.O. 24. 197.

165. *G. Koenigs.* Les systèmes binaires et les couples d'éléments cinématiques. C.R. 133. 483.

166. *G. Koenigs.* Propriétés générales des couples d'éléments cinématiques. C.R. 133. 533.

167. *G. Koenigs.* Sur les chaines secondaires. C.R. 133. 621.

168. *C. Lecornu.* Sur la vis sans fin. S.M. 149.

169. **Belluzzo.* Alcune considerazioni sugli elementi cinematici e geometrici delle turbine assiali. Pol.M. 2 fasc.

170. **Ovazza.* Contributo alla teoria dei freni ad attrito. Pol.M. 10 fasc.

171. **D. Seiliger.* Ein ebener Affinograph (russ.). M.U.Ka. 83.

Siehe auch 194; 880.

Schraubenrechnung.

172. *E. W. Hyde.* On a surface of the 6. order which is touched by the axes of all screws reciprocal to 3 given screws. A. of M. 2. 179.

Mechanismen.

173. *G. Koenigs.* Étude critique sur la théorie générale des mécanismes. C.R. 133. 330.

174. *G. Koenigs.* Esquisse d'une théorie générale des mécanismes. C.R. 133. 432.

175. **P. Somow.* Über einige Anwendungen der Kinematik veränderlicher Körper zu Gelenkmechanismen. M.U.W. Heft 7.

176. *G. Koenigs.* Sur les principes géneraux des mécanismes. C.R. 133. 385.

177. *E. Delassus.* Sur les systèmes articulés gauches. A.E.N. 17. 445.

178. *R. Müller.* Die Koppelkurven mit sechspunktig berührender Tangente. Z.S. 330.

Siehe auch 165—167.

Statik.

179. **C. Stephanos.* Sur les relations entre la géométrie projective et la mécanique. R.B.A. 644.

180. *D. Negreanu.* Determinarea ponduliu specific al unui cord solid. (Bestimmung des specifischen Gewichts eines festen Körpers.) A.A.R. 22. A. 72.

181. *L. Lecornu.* Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoidale soumise à une pression intérieure uniforme. A.E.N. 17. 501.

182. *J. Hněvkovsky.* Uloha z mechaniky. (Aufgabe aus der Mechanik.) C. 364.

Schwerpunkte.

183. *A. Sucharda.* Eine Aufgabe betreffend den Schwerpunkt der Polygone. M.H. 12. 337.

184. *A. Verebrjusov.* 'Elementarnoe dokazatelstvo teorem Gildena. (Elementarer Beweis der Guldin'schen Regeln. M.P.O. 26. 56.

Momente.

185. *K. Bohlin.* Sur l'extension d'une formule d'Euler et sur le calcul des

moments d'inertie principaux d'un système de points matériels. C.R. 133. 580.

186. —. Remarques au sujet des droites de nul moment. N.A. 1. 412.

187. *F. Gräfe.* Zusammenhang zwischen Centralellipse und Trägheitskreis. Z.S. 348.

188. **E. Collignon.* Remarques sur les moments d'inertie des polygones réguliers et des polyèdres réguliers. A.F. 1.

189. *G. Cesàro.* Sur les moments d'inertie des polygones et des polyèdres. B.A.B. 332.

Kettenlinie.

190. *H. Bouasse.* Sur les courbes de déformation des fils. A.T. 2. 431; 3. 85.

Dynamik, Allgemeines.

191. **H. Bisconcini.* Di una classificazione dei problemi dinamici. N.C. P. 11. 253.

Siehe auch 151; 240; 482a.

Dynamik des Punktes.

192. **G. K. Suslov.* Über die Bewegung eines Punktes in einem deformirbaren Mittel (russ.). B.U.K. 1900. c. 12. 71.

193. *O. Reichel.* Bestätigung des Fallgesetzes mittelst einer frei fallenden Stimmgabel. Z.P. 14. 193.

Siehe auch 881.

Centralbewegung.

194. **P. J. Suchar.* Nota asupra legilor unor forte centrale deduse din consideratiunea hodografuliu. (Bemerkung über die Gesetze einer Centralkraft, abgeleitet aus hodographischen Betrachtungen.) B.S.B. 313.

Pendel.

195. *L. Décombe.* Sur le mouvement d'un pendule en milieu résistant. C.R. 133. 147.

196. **N. Piltschikow.* Das Foucaultsche Pendel (russ.). M.P.O. 24; 193.

197. *A. de St. Germain.* Note sur la tension de la tige d'un pendule sphérique. B.D. 89.

198. **O. Zanotti Bianco.* Sulla teoria della flessione del pendolo nelle determinazioni della gravità. R.T.C. 12.74.81.

Siehe auch 791—792; 906.

Dynamik des starren Systems.

199. *V. v. Niesiolowski-Gansu.* Über einen neuen Versuch zur Dynamik. A. P.L. 5. 479.

200. *T. Levi-Cività.* Sopra alcuni criteri di instabilità. A.D.M. 221.

201. **C. S. Slichter.* The mechanics of slow motions. S. 11. 535.

202. *D. Schorr.* O bumerange. (Über den Bumerang.) M.P.O. 26. 35.

Siehe auch 168—169.

Dynamik des deformierbaren Systems.

203. *E. Ferron.* Sur quelques points de doctrine nouveaux de la théorie générale du mouvement d'un système de corps. I.L. 41.

204. *Gallian.* Démonstration du théorème des travaux virtuels. N.A. 20.

205. *D. de Francesco.* Alcuni problemi di meccanica in uno spazio a 3 dimensioni di curvature costante. A.A.N. No. 4; No. 9.

Differentialgleichungen der Mechanik.

206. *P. Appell.* Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la dynamique. J.M. 5.

207. *H. Poincaré.* Novaja forma uravnenij mechaniki. (Neue Form der Differentialgleichungen der Mechanik.) S.M. Ka.B. 57.

208. **E. T. Whittaker.* On the reduction of the order of the differential equations of a dynamical problem, by use of the integral of energy. M.M. 93.

Drehung.

209. **D. Seiliger.* Das Poinsotsche Theorem und seine Verallgemeinerung (russ.). M.U.Ka. 73.

210. **G. del Prato.* Sul moto di rotazione di un corpo composto di una parte solida e di una parte fluida. N. C.P. 1. 41.

211. *P. Duhem.* Sur la stabilité d'un système animé d'un mouvement de rotation. C.R. 132. 1021.

212. *T. Levi-Cività.* Sui moti stazionarî di un corpo rigido nel caso della Kowalewsky. R.A.L.R. 10. A. 338; 429; 461.

Kreisel.

213. **A. Hall.* The motion of a top. S. 13. 948.

214. *C. T. Knipp.* The use of the bicycle wheel in illustrating the principles of the gyroscope. P.R. 12. 43.

215. **G. K. Suslov.* Die pseudoreguläre Präzession (russ.). B.U.K. 1900. c. 12. 103.

Reibung.

216. *N. Petrov.* Frottement dans les machines. A.P.M. 10. No. 4.

217. *G. *Pacher* e *L. Finazzi*. Sull attrito interno dei liquidi isolanti in un campo elettrico costante. N.C.P. 11. 290.

218. *T. Breitenbach*. Über die innere Reibung der Gase und deren Änderung mit der Temperatur. A.P.L. 5. 166.

219. *H. Schultze*. Die innere Reibung von Argon und seine Änderungen mit der Temperatur. A.P.L. 5. 140.

Siehe auch 170.

Potentialtheorie.

220. *H. Petrini*. Allgemeine Existenzbedingungen für die zweiten Differentialquotienten des Potentials. B.V.A.S. 225.

221. *E. R. Neumann*. Zur Integration der Potentialgleichung vermittelst C. Neumanns Methode des arithmetischen Mittels. M.A. 1.

222. *S. Zaremba*. Sur l'intégration de l'équation $\Delta w - \mu^2 w = o$. C.R. 132. 1549.

223. *L. Königsberger*. Über die Poisson'sche Unstetigkeitsgleichung. S.A.B. 118.

224. *F. v. Dalwigk*. Über das Poissonsche Integral. S.G.M. 59.

225. *I. Fredholm*. Sur une nouvelle méthode pour la resolution du problème de Dirichlet. B.V.A.S. 39.

226. **A. Petrowski*. Über die Potentialverteilung im inhomogenen Medium (russ.) J.R.P.C.G. 32. 1.

227. **F. Mancinelli*. Sulle derivate prime delle funzioni potenziali di doppo strato. R.I.L. 34. 370.

228. *R. Marcolongo*. Determinazione della funzione di Green di grado *n* nel caso di una sfera. R.A.L.R. 10. B. 131.

229. *R. Kottenbach*. Das Potential einer homogenen Kugelschale auf einen beliebigen Punkt im Raume. Z.P. 14. 214.

230. *H. Petrini* Étude sur les dérivées premières du potentiel d'une couche simple. B.V.A.S. 867.

231. **O. M. Corbino*. Rappresentazione stereometrica dei potenziali nei circuiti percorsi da correnti trifasiche. N.C.P. 11. 182.

232. *E. Kasner*. On the algebraic potential curves. S.M.Am. 7. 392.

Siehe auch 330; 573—575; 594; 616; 626; 627.

Gravitation.

233. **R. A. Fessenden*. A determination of the nature and velocity of gravitation. S. 12. 740.

234. **W. I. Franklin*. The electrical theory of gravitation. S. 12. 887.

235. **R. A. Fessenden*. The electrical theory of gravitation. S. 13. 28.

236. **R. A. Fessenden*. Inertia and gravitation. S. 12. 325.

Siehe auch 304; 740; 782—786.

Hydrostatik.

237. *L. E. Bertin*. Position d'équilibre des navires sur la houle. M.C. 1.

238. *G. Schülen*. Das Schwimmen. Z.H. 31. 505; 589; 32. 85.

239. *J. Diekmann*. Über Gruppen von Aufgaben aus der Geometrie und Physik. Z.H. 32. 253; 337.

240. *Rabut*. Sur un invariant remarquable de certaines transformations réalisées par des appareils enrégistrateurs. C.R. 132. 1399.

Hydrodynamik.

241. **V. Bjerknes*. Les actions hydrodynamiques à distance d'après la théorie de C. A. Bjerknes. R.C.I.P. 1; 251.

242. *R. A. Harris*. A few questions in hydrodynamics. B.S.W. 93.

243. *T. Levi-Civitá*. Sulla resistenza dei mezzi fluidi. R.A.L.R. 10. B. 3.

244. **E. Fontaneau*. Du mouvement stationnaire des liquides. A.F. 133.

245. *C. Sautreaux*. Mouvement d'un liquide soumis à la pesanteur. Determination des lignes de courant. J.M. 125.

246. *P. Duhem*. Sur les ondes du 2. ordre par rapport aux vitesses que peut présenter un fluide visqueux. C.R. 132. 607.

247. *P. Duhem*. De la propagation des discontinuités dans un fluide visqueux. C.R. 132. 658; 944.

248. *E. Jouguet*. Sur la propagation des discontinuités dans les fluides. C. R. 132. 673.

249. *P. Duhem*. Sur les théorèmes d'Hugoniot, les lemmes de M. Hadamard et la propagation des ondes dans les fluides visqueux. C.R. 132. 1163.

250. *P. Duhem*. Des ondes qui peuvent persister en un fluide visqueux. C.R. 133. 579.

251. *P. Saurel*. Sur un théorème de M. Duhem. J.M. 83.

252. *L. Hauser*. Über den Einfluſs des Druckes auf die Viscosität des Wassers. A.P.L. 5. 597.

253. *E. Maillet*. Sur les lois des montées de Belgrand et les formules du débit d'un cours d'eau. C.R. 132. 1033.

254. *F. R. Waston.* Surface tension at the interface of two liquids determined experimentally by the method of ripple waves. P.R. 12. 252.

Siehe auch 210; 217; 404; 793.

Wirbel.

255*. *K. Zorawski.* Über die Erhaltung der Wirbelbewegung. B.I.C. 335.

256. *de Donder.* Étude sur les invariants intégraux. R.C.M.P. 121.

Siehe auch 812; 814—816.

Hydraulik.

257. *F. Steiner.* Ergiebigkeitsmessung intermittirender Quellen. S.L.P. 202.

258. **F. Stupecky.* Zur graphischen Ermittlung der Geschwindigkeit aus direkten Beobachtungen. Ö.M.Ö.B. 172.

259. *N. Żukowski.* Über den hydraulischen Stofs in Wasserleitungsröhren. A.P.M. 9. No. 5.

260. **E. Maillet.* Sur une méthode d'évaluation du débit d'une crue extraordinaire. Application aux crues de la Garonne à Toulouse en 1855 et 1875. A.F. 223.

Aerodynamik.

Siehe 814; 815; 882; 883.

Ballistik, äufsere.

261. **Boniti.* Giuoco balistico grafico. R.A.G. 1900. 9 fasc.

262. *G. Ronca.* Abbachi della balistica. C.L. 1901. 278.

263. **S. Burileanu.* Le mouvement des projectiles sphériques. B.S.B. 301.

264. —. Über die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses bei Handfeuerwaffen. M.A.G. 1900. 311.

265. *Minarelli-Fitzgerald.* Neue Methoden zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeiten von Gewehrprojektilen in der Nähe der Mündung. M.A.G. 1901. 269.

266. *F. Siacci.* Sulla velocità minima. R.A.G. 1901. März-Juni.

267. *N. Sabudski.* Des propriétés générales de la trajectoire dans l'air. C.L. 1900. 293; 1901. 3; 257.

268. *Rohne.* Der Einflufs der Witterungsverhältnisse auf die Geschofsbahn. K.Z. 1900. 129; 201; 1901. 326.

269. *A. Bassani.* Sulla legge di resistenza dell' aria al moto dei proiettili. C.L. 1900. 299.

270. *A. Bassani.* Sulle forme di testa dei proiettili oblunghi che incontrano da parte dell' aria la minima resistenza al moto. C.L. 1900. 485.

271. *Lefèvre.* Forme théorique de l'ogive de moindre résistance d'après Newton. R.A. Dez.

272. *A. v. Obermayer.* Versuche zur Kreiselbewegung der rotirenden Langgeschosse. Engl. von F. E. Harris. J.U.S.A. 1901. Juli-Aug.

273. **Donny.* Étude des déviations des projectiles cylindro-ogivaux. R.A.B. Sept.-Okt.

274. *A. v. Obermayer.* Über den Einflufs der Erdrotation auf die Bewegung der Geschosse. M.A.G. 1901. 707.

275. *Parst.* Die Tiefenausdehnung der Geschofsgarbe. K.Z. 1901. 330.

276. *Rohne.* Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das gesetzmäfsige Abteilungsschiefsen der Infanterie. K.Z. 1901. 119.

277. *A. Bassani.* Nuove formule per il tiro curvo. C.L. 1900. 275.

278. *—. New formulae for curved fire. J.U.S.A. 1900. Sept.-Okt.

279. **A. G. Greenhill.* Il problema del vento nel tiro. J.U.S.A. 1900. Jan.-Febr.

280. —. Die Wirkung schnellfliegender Geschosse. K.Z. 1900. 279.

281. *A. Beliczay.* Wirkungsfähigkeit kleinkalibriger Gewehre. M.A.G. 1900. 147.

282. *A. Indra.* Das Schiefsen aus Küstengeschützen. M.A.G. 1901. 91; 189.

283. *B. Schöffler.* Gesetz der zufälligen Abweichungen, Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Anwendung auf die Theorie des Schiefsens. M.A.G. 1900. 429.

284. *v. Portenschlag-Ledermayr.* Graphische Schiefstafeln für Festungsgeschütze. M.A.G. 1900. 796.

285. *de Sparre.* Sur l'emploi des tables de Siacci pour résoudre les problèmes du tir dans le cas des grands angles de projection, et lorsque la vitesse est supérieure à 300 mètres. A.S.B. 204.

286. *F. Siacci.* Sur un problème d' Alembert. C.R. 132. 1175; 133. 381.

287. *E. Strnad.* Die Verwendung goniometrischer Apparate zur indirekten Erteilung der ersten Seitenrichtung bei Geschützen. M.A.G. 1900. 169.

288. *F. Bashforth.* Testing on some ballistic experiments. N. 64. 445.

Siehe auch 15; 84; 672; 903.

Ballistik, innere.

289. *G. V.* Sur le tracé des rayures dans les bouches à feu. C.L. 1900. 408.

290. **Mattei*. Dell' influenza delle caratteristiche del grano di polvere sulle velocità iniziale e sulle pressioni. R.A. G. 1900. 3 fasc.

291. *E. Vallier*. Sur la loi des pressions dans les bouches à feu. C.R. 133. 203; 319.

292. *E. Elmer*. Die Gesetze der Drucke in den Feuerwaffen. M.A.G. 1900. 113.

293. *Heydenreich*. Neue Methoden zur Berechnung des Verlaufs der Gasdruckkurven in Geschützrohren. K.Z. 1900. 287; 334; 1901. 292.

294. **G. Vicentini* e *G. Pacher*. Esperienze sui proiettili gazosi. N.C.P. 11. 133.

295. *—. Über den Einfluſs von Verbiegungen der Schildzapfenaxe auf die Seitenrichtung des Geschützes. R.A.J.

296. *Bianchi*. L'azione degli esplosivi nelle armi. R.A.G. 1901. Jan.-März.

297. **Delacourt*. Étude mathématique des effets des fourneaux de mine basée sur l'influence de la cohésion des terres. R.G.M. April-Jan.

298. *P. Heſs*. Zur Theorie der Sicherheitssprengstoffe. M.A.G. 1900. 26.

Siehe auch 309.

E. Mathematische Physik.

Prinzipien der mathematischen Physik.

299. **H. Poincaré*. Les relations entre la physique expérimentale et la physique mathématique. R.G.O. 11. 1163.

300. **J. H. Poynting*. Considérations sur les lois de la physique. A.S.G. 11. 48.

301. *W. Wien*. Über die Möglichkeit einer elektromagnetischen Begründung der Mechanik. A.P.L. 5. 501.

302. *M. Smoluchowski*. O nowszych postępach na polu teoryj kinetycznych materyi. (Über neue Fortschritte im Gebiet der kinetischen Theorien der Materie.) T.W. 112.

303. **A. T. Lincoln*. Physical reactions and the mass law. J.P.C. 4. 161.

304. **W. S. Franklin*. The electrical theory of gravitation. S. 12. 887.

305. **W. Michelson*. On Dopplers principle. A.J.C. 13. 192.

306. **R. A. Fessenden*. A determination of the nature of the electric and magnetic quantities and of the density and elasticity of the Ether. P.R. 10. 1; 83.

307. *E. Sarrau*. Sur l'application du principe de l'énergie aux phénomènes électrodynamiques et électromagnétiques. C.R. 133. 402.

308. **O. M. Corbino*. Sulle conseguenze del principio della conservazione dell' elettricità. N.C.P. 11. 136.

309. **Trowbridge*. Elektrizitätstheorien. E.P. 1901. 72.

310. *E. Lecher*. An den Grenzen unseres Erkennens. S.L.P. 225.

Siehe auch 113; 234; 235; 453.

Messen.

311. **P. Crüger*. Die dezimale Kreis- und Zeiteinteilung. P. 305. — *Dziobek* 491.

Siehe auch 775; 776.

Maſssystem, absolutes.

312. **H. Abraham*. Les mesures de la vitesse. v. R.C.I.P. 2. 247.

313. *H. T. Barnes*. Note on the relation of the electrical and mechanical units. T.C.R.S. 6. C. 71.

Molekularphysik.

314. **A. Speranski*. Molekularbewegung in festen Körpern (russ.). P.M.J. M. 220.

315. **W. Spring*. Propriétés des solides sous pressions; diffusion de la matière solide; mouvements internes de la matière solide. R.C.I.P. 1. 402.

316. *G. Dillner*. Sur le mouvement des éléments d'une molecule de matière ponderable d'après la loi de Newton. B.V.A.S. 1145.

317. *Carvallo*. Réscaux moléculaires et dispersion. S.F.P. 168. 2; J.P. 543.

318. *J. d. van der Waals jun*. Over het verband tusschen straling en molekulaire attractie. C.A.A. 47.

319. *H. Rodewald*. Über Quellungs- und Benetzungserscheinungen. Z.P.C. 33. 593.

320. *R. Schenck*. Die Dynamik der Krystalle. S.G.M. 120.

Siehe auch 114; 297; 646.

Elastizität.

321. *G. Bakker*. Théorie de l'élasticité. J.P. 558.

322. *R. Liouville*. Sur l'équilibre des corps élastiques. C.R. 133. 434.

323. **W. S. Franklin*. Some lecture room methods in the elementary theory of elasticity. P.R. 11. 75.

324. **Jorino*. Sui metodi pratici per calcolare alcune strutture elastiche. Pol. M. 3 fasc.

825. *F. H. Cilley.* Some fundamental propositions in the theory of elasticity. A.J.S. 269.

826. *G. Bakker.* Bijdrage tot de theorie der elastische stoffen. C.A.A. 520.

827. *J. Coulon.* Sur les caractéristiques de quelques équations, aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants. P.S.B. 1899—1900. 24.

828. **O. Tedone.* Sulle formole che rappresentano lo spostamento di un punto di un corpo elastico in equilibrio. N.C.P. 11. 161.

829. *A. Viterbi.* Sui casi di equilibrio d'un corpo elastico isotropo che ammettono sistemi isostatici di superficie. R.A.L.R. 10 I. 408.

830. *E.* et *F. Cosserat.* Sur une application des fonctions potentielles à la théorie de l'élasticité. C.R. 133. 210.

831. *E.* et *F. Cosserat.* Sur la solution des équations de l'élasticité dans le cas où les valeurs des inconnues à la frontière sont données. C.R. 133. 145.

832. *E.* et *F. Cosserat.* Sur un point critique particulier de la solution des équations de l'élasticité dans le cas ou les efforts sur la frontière sont donnés. C.R. 133. 382.

833. *C. J. Kriemler.* Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Baurat Kübler über Knick-Elasticität und -Festigkeit. Z.S. 355. — *L. Pilgrim* 362. — *J. Kübler* 370.

834. *F. Pockels.* Über die durch elastische Deformationen bewirkten Änderungen des Brechungsvermögens von schwerem Flintglas. P.Z. 693.

835. *E. Almansi.* Sopra la deformazione dei cilindri sollecitati lateralmente. R.A.L.R. 10 I. 333; 400.

836. **R. Feret.* Déformations et tensions rémanentes pendant le déchargement d'un prisme fléchi imparfaitement élastique. Application aux poutres de ciment armé. A.F. 214.

837. **A. Mesnager.* La déformation des solides. R.C.I.P. 1. 348.

838. **C. E. Guillaume.* Les déformations passagères des solides. R.C.I.P. 1. 432.

839. *E. Lenoble.* Contribution à l'étude des déformations permanentes des fils métalliques. M.S.B. 261.

840. *G. Pennacchietti.* Sugli invarianti nelle deformazioni infinitesime delle superficie elastiche. B.G.C. 26.

841. *E.* et *F. Cosserat.* Sur la déformation infiniment petit d'un corps élastique soumis à des forces données. C.R. 133. 271.

842. *A. Lafay.* Recherches expérimentales sur les déformations de contact des corps élastiques. A.P.C. 23. 241.

843. *H. Bouasse.* Sur la théorie des déformations permanentes de Coulomb. Son application à la traction, la torsion et le passage à la filière. A.P.C. 23. 199.

844. *J. H. Michell.* The stress in an aeolotropic elastic solid with an infinite plane boundary. P.L.M.S. 247.

845. *A. Davidoglou.* Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques. A.E.N. 17. 359; 433.

846. **T. Boggio.* Sull' equilibrio delle membrane elastiche piane. N.C.P. 11. 161; 12. 170.

847. *J. H. Michell.* Stress in the web of a plate girder. Q.J. 31. 377.

848. **J. H. Michell.* The theory of uniformly loaded beams. Q.J. 32. 28.

849. *K. Pearson* and *L. N. G. Filon.* On the flexure of heavy beams subjected to continuous systems of load. Q.J. 31. 66.

850. *M. Panetti.* Sul calcolo delle vibrazioni transversali di una trave elastica urtata. A.A.T. 6.

851. *Mesnager.* Sur l'application de la théorie de l'élasticité au calcul des pièces rectangulaires fléchies. C.R. 132. 1475.

852. **W. S. Franklin.* The problem of the stresses and strains in a long, elastic, hollow cylinder, subjected to internal and external pressure. P.R. 11. 176.

853. *E.* et *F. Cosserat.* Sur la déformation infiniment petite d'une enveloppe sphérique élastique. C.R. 133. 326.

854. **L. Lecornu.* Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoidale soumise à une pression intérieure uniforme. A.E.N. 541.

855. *E.* et *F. Cosserat.* Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoide élastique, soumis à des efforts donnés sur la frontière. C.R. 133. 361.

856. **Lord Kelvin.* On the motion produced in an infinite elastic solid by the motion through the space occupied by it of a body acting on it by attraction or repulsion. P.R.S.E. 218.

857. **Lord Kelvin.* Rapport sur le mouvement d'un solide élastique traversé par un corps agissant sur lui par attraction on par repulsion. R.C.I.P. 2. 1.

858. *W. Voigt.* L'État actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux. R.C.I.P. I. 271.

Siehe auch 162; 373; 647; 861.

Elastische Linie.

859. *de Martino.* La linea elastica e la sua applicazione alla trave continua su più sostegni. R.A.G. 1900. Apr.-Juni.

360. *H. Amstein.* Courbes d'égale longueur. B.S.V. 1.

361. *B. Elie.* Étude d'une élastique gauche. Hélice soumise à l'action d'une couple. N.A. 1. 292.

Festigkeitslehre.

362. *F. Villareal.* Resistencia de materiales. R.C.L. 97; 215.

363. *C. Guidi.* Prove sui materiali da costruzione. M.A.T. 215.

364. **Houdaille.* Formules simplifiées applicables à la résistance des matériaux. R.G.M. April-Juni.

365. *J. R. Benton.* Dependence of the modulus of torsion on tension. P.R. 12. 100.

366. **J. R. Benton.* Note on the effect of tension on a permanent torsion of a wire. P.R. 13. 53.

367. *T. Gray.* Strength of columns under eccentric loads. P.A.A. 135.

368. **C. H. Cordeiro.* Formule pratique pour les murs de grands remblais. A.F. 281.

369. *O. Dziobek.* Die Beanspruchung der Kanonenrohre nach der dynamischen Theorie. M.A.G. 1900. 33.

Siehe auch 333.

Krystallstruktur.

370. *R. Schenck.* Die Dynamik der Krystalle. S.G.M. 120.

370a. *Wallerant.* Sur les variations d'aimantation dans un cristal cubique. C.R. 133. 630.

Siehe auch 114; 320; 358; 439.

Schwingungen.

371. *H. Burkhardt.* Die Entwicklung nach oscillirenden Funktionen. D.V.M. 10 II.

372. *J. Zenneck.* Die physikalische Interpretation von Ausdrücken aus der Theorie unendlich kleiner Schwingungen. A.P.L. 5. 707.

373. *Ribière.* Sur les vibrations des poutres encastrées. C.R. 132. 668.

374. *F. Kiebitz.* Über die elektrischen Schwingungen eines stabförmigen Leiters. A.P.L. 5. 872.

375. *M. Planck.* Vereinfachte Ableitung der Schwingungsgesetze eines linearen Resonators im stationär durchstrahlten Felde. P.Z. 530.

376. *H. Pellat.* Sur un phénomène d'oscillation électrique. J.P. 471.

377. *L. Décombe.* Sur la mesure de la période des oscillations électriques par le miroir tournant. C.R. 132. 1037.

Siehe auch 76; 151; 345; 350; 380; 455; 570; 621; 632.

Wellenlehre.

378. *H. S. Carslaw.* Oblique incidence of a train of plane waves on a semi-infinite plane. P.E.M.S. 71.

379. **C. Barus.* Certain stroboscopic phenomena in the End-on projection of a single wave. S. 13. 128.

380. **H. Lamb.* On a pecularity of the wave system due to the free vibrations of a nucleus in an extended medium. P.L.M.S. 199.

381. **C. Barus.* The projection of ripples by a grating. S. 13. 297.

382. **A. Righi.* Le onde hertziane. N.C.P. 1. 50.

383. **A. Righi.* Les ondes hertziennes. R.C.I.P. 2. 301.

384. **H. M. Macdonald.* The energy function of a continuous medium transmitting transverse waves. P.L.M.S. 311.

385. **E. Branly.* Absorption des radiations hertziennes par les liquides. S.F.P. 1900. 2.

386. **A. E. H. Love.* The integration of the equations of propagation of electric waves. P.R.S.L. 19.

387. **J. A. Fleming.* Electrical oscillations and electrical waves. T.E. 46. 514; 551; 588; 659; 728; 47. 57. 226; 382; 446.

388. *G. Pierce.* Note on the double refraction of electric waves. P.M 548.

389. **E. H. Barton* and *L. Lownds.* Reflexion and transmission by condensers of electric waves along wires. P.P.S.L. 273.

390. **J. C. Bose.* Changement moléculaire produit dans la matière par les ondes électriques. E.R. 449.

391. *C. G. Barkla.* The velocity of electric waves along wires. P.M. 652.

392. **Combet.* Essai de représentation des phénomènes magnétiques et électriques et de la génération des ondes électriques. S.F.P. 1900. 1.

393. *G. Pierce.* Elektrische Brechungsexponenten, gemessen mit einem abgeänderten Radiomikrometer. P.Z. 405.

Siehe auch 246; 250; 254; 419; 623; 661; 874.

Strahlen.

394. *F. Leininger.* Notiz über Energiemessungen der Roentgenstrahlen. P.Z. 691.

395. *W. Seitz*. Beiträge zur Kenntnis der Kathodenstrahlen. A.P.L. 6. 1.

396. *J. J. Thomson*. On a kind of easily absorbed radiation produced by the impact of slowly moving cathode rays. P.M. 361.

397. **A. Turpain*. Essai critique sur les théories de la radioconduction. E. E. 26. 56.

398. **A. Righi*. Sur les théories de la radioconduction. E.E. 27. 373.

Siehe auch 385.

Kapillarität.

399. *G. Bakker*. Zur Theorie der Kapillarität. Z.P.C. 33. 477.

400. *G. Bakker*. Bemerkung zur thermodynamischen Theorie der Kapillarität von van der Waals. Z.P.C. 34. 168.

401. **G. von der Mensbrugghe*. Sur les phénomènes capillaires. R.C.I.P. 1. 487.

402. *P. A. Guye* et *A. Baud*. Constantes capillaires de liquides organiques. C.R. 132. 1481; 1553.

403. **A. Guye* et *F. L. Perrot*. Étude critique sur l'emploi du compte-gouttes pour la mesure des tensions superficielles. A.S.G. 11. 225; 345.

404. *C. Christiansen*. Versuche über den Einfluſs der Capillarität auf die Ausfluſsgeschwindigkeit der Flüssigkeiten. A.P.L. 5. 436.

405. *G. Bakker*. Theorie der Capillarschicht zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes. Z. P.C. 35. 598.

406. *S. W. J. Smith*. Über die Natur der elektrocapillaren Phänomene. Z.P. C. 32. 433.

407. *Gouy*. Sur l'action électrocapillaire des molécules non dissociés en ions. C.R. 133. 284.

Siehe auch 573; 898.

Diffusion.

408. *A. Winkelmann*. Über die Diffusion von Wasserstoff durch Palladium. A.P.L. 6. 104.

409. **M. Brillouin*. La diffusion des gaz sans paroi poreuse dépend-elle de la concentration? R.C.I.P. 1. 512.

Siehe auch 315.

Osmose.

410. **J. Perrin*. Osmose. Parois semiperméables. R.C.I.P. 1. 531.

411. *K. Ikeda*. Einfache Ableitung des vant Hoff'schen Gesetzes vom osmotischen Drucke. Z.P.C. 33. 280.

412. *A. A. Noyes*. The exact relation between osmotic pressure and vapour pressure. P.R. 12. 84.

413. **W. R. Cooper*. The osmotic pressure theory of primary cells. T.E. 44. 852; 896.

Siehe auch 493; 586; 587; 635.

Viscosität.

414. **C. H. Lees*. On the viscosities of mixtures of liquids and solutions. P.P.S.L. 460.

Siehe auch 562.

Akustik.

415. **J. Violle*. Sur la vitesse de propagation du son. R.C.I.P. 1. 228.

416. **M. Brillouin*. Théorie de la propagation du son dans un gros tuyau. R.C.I.P. 246.

417. *O. d'Alencar Silva*. De l'action d'une force accélératrice sur la propagation du son. J.S.M. 97.

418. *E. W. Scripture*. On the nature of vowels. A.J.S. 302.

419. *B. Davis*. On a newly discovered phenomenon produced by stationary sound waves. P.R. 13. 31.

420. *T. Thomasine*. Sur un électroradiophone à sons très intenses et sur la cause qui les produit. C.R. 132. 627.

Siehe auch 193; 375.

Optik, geometrische.

421. *G. Monnet*. Sur les caustiques par réflexion. N.A. 120.

422. **J. Macé de Lépinay*. Über die Form der ordentlichen Wellenfläche im Quarz. Z.K.M. 34. 280. — *C. Viola* 281.

423. *L. Matthiessen*. Beiträge zur Theorie der geschweiften Strahlenbüschel und ihrer Wellenflächen. A.P.L. 5. 659.

424. *A. Cornu*. Construction géométrique des deux images d'un point lumineux produit par réfraction oblique sur une surface sphérique. J.P. 607.

425. **G. Quesneville*. Nouvelle dioptrique des rayons visuelles. M.S.Q. 573.

426. *F. Klein*. Räumliche Collineationen bei optischen Instrumenten. Z. S. 376.

427. *Izarn*. Démonstration élémentaire du minimum de déviation dans le prisme en partant de la construction de Huyghens. J.P. 494.

428. **A. Kerber*. Formeln zur Berechnung verkitteter Doppellinsen. D.M. 157.

429. *T. H. Blakesley.* On some improved formulae and methods connected with lenses. P.P.S.L. 91.

430. **S. P. Thompson.* On obliquely crossed cylindrical lenses. P.P.S.L. 81.

431. *J. D. van der Plaats.* Über die subjektiven Bilder von Cylinderlinsen und astigmatischen Linsen. A.P.L. 5. 772.

432. *G. Lippmann.* Mire méridienne à miroir cylindrique. C.R. 132. 507; J.P. 415.

433. *A. Cornu.* Sur la compensation mécanique de la rotation du champ optique fourni par le sidérostat et l'héliostat. C.R. 132. 1013.

434. *F. Klein.* Über das Bruns'sche Eikonal. Z.S. 372.

Optik, physikalische.

435. *E. v. Oppolzer.* Zur Theorie der Lichtemission. S.L.P. 305.

436. *D. A. Goldhammer.* O davlenii svetovych lučej. (Über den Druck der Lichtstrahlen.) S.M.Ka.A. 231.

437. **A. Cornu.* Sur la vitesse de la lumière. R.C.I.P. 2. 225.

438. **Sagnac.* Exposition nouvelle de la propagation de la lumière à travers des milieux doués d'une absorption élective. S.F.P. 1900. 3.

439. *A. Cornu.* Détermination des 3 paramètres optiques principaux d'un cristal en grandeur et en direction par le réfractomètre. C.R. 133. 125.

440. **J. G. Coffin.* The reflection of light in the neighbourhoud of the critical angle. T.Q. 139.

441. *K. Schwarzschild.* Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt. M.A. 177.

442. **J. W. Gordon.* An Examination of the Abbe diffraction theory of the microscope. J.R.M.S.

443. **N. N. Schiller.* Note über die Methodologie der Doppelbrechung (russ.). B.U.K. 1901. b. 1.

444. *M. Planck.* Über irreversible Strahlungsvorgänge. S.A.B. 544.

445. *B. Navrátil.* Příspěvek k interferenci světla v deskách tlustých. (Beitrag zur Interferenz des Lichts in dicken Platten.) C. 293.

446. **J. R. Benton.* Determination of Poissons ratio by means of an interference apparatus. P.R. 12. 36.

447. *L. Zehnder.* Über Gitterbeobachtungen. A.P.L. 5. 685.

448. **J. C. Shedd.* On the forces of curves presented by the Michelson interferometer. P.R. 11. 304.

449. **P. Drude.* Théorie de la dispersion dans les métaux fondée sur la considération des éléments. R.C.I.P. 34.

450. **E. Carvallo.* Sur les théories et formules de dispersion. R.C.I.P. 2. 175.

451. **A. de Gramont.* A graphical study of refraction and dispersion. A. J.C. 13. 208.

452. *H. Trommsdorff.* Die Dispersion Jenaer Gläser im ultravioletten Strahlengebiet. P.Z. 576.

453. **A. Belopolsky.* On an apparatus for the laboratory demonstration of the Doppler-Fizeau principle. A.J.C. 13. 15.

454. **C. Godfrey.* On the application of Fouriers double integrals to optical problems. T.R.S.L. 329.

455. *L. Genovesi.* Relazione fra i numeri delle vibrazioni dei colori derivati e dei loro componenti. B.C. 214.

456. *D. B. Brace.* The observation of resolution of light into its circular components in the Faraday effect. P. M. 464.

457. **A. Sachs.* Krystallographisch-optische Studien an synthetisch dargestellten Verbindungen. Z.K.M. 34. 158.

458. *O. Schönrock.* Über die Abhängigkeit der specifischen Drehung des Zuckers von der Temperatur. Z.P.C. 34. 87.

459. *H. Pellat.* Mesure du pouvoir rotatoire du sucre. Sa variation avec la température et la longueur d'onde. A.P.C. 23. 289.

Siehe auch 75; 305; 334; 578; 730; 794; 848; 884.

Elektrooptik.

460. **A. J. Sadovsky.* Über die Grenzbedingungen in der Frage der ponderomotorischen Wirkungen der elektromagnetischen Lichtwellen auf die Krystalle (russ.). A.U.J. 1900. Nr. 2.

461. *G. Moreau.* De l'effet Hall dans les lames métalliques infiniment minces. J.P. 478.

Siehe auch 582; 885—888.

Magnetoptik.

462. **H. A. Lorentz.* Sur la théorie des phénomènes magnétoptiques récemment découverts. R.C.I.P. 3. 1.

463. *N. A. Kent.* Notes on the Zeeman effect. J.H.U.C. 82.

464. *H. M. Reese.* An investigation on the Zeeman effect. A.J.C. 11. 120.

465. **A. Righi.* Sul fenomeno di Zeeman nel caso generale di un raggio luminoso comunque inclinato sulla direzzione della forza magnetica. N.C.P. 11. 177.

Photometrie.

466. **J. Violle.* Photométrie. E.E. 24. 420.

467. *C. W. Wirtz.* Photographisch-photometrische Untersuchungen. A.N.K. 154. 317.

468. *K. Bohlin.* Sur l'emploi de la loi de Lambert dans les problèmes photométriques. B.A. 17. 289.

Wärmelehre.

469. *J. Dougall.* Note on the application of conduction of heat with special reference to Dr. Peddie's problem. P.E.M.S. 50.

470. **E. Mathias.* Das Gesetz des geradlinigen Durchmessers und die Gesetze der korrespondirenden Zustände. Z.K.F.G. 97.

471. *J. Dougall.* Note on the application of complex integration to the equation of conduction of heat with special reference to Dr. Peddie's problem. P.E.M.S. 50.

472. *J. Boussinesq.* Problème de la dissipation en tout sens de la chaleur dans un mur épais à face rayonnante. C.R. 133. 497.

473. *E. Cotton.* Mouvement de la chaleur sur la surface d'un tétraèdre dont les arrêtes opposées sont égales. A.T. 2. 305.

474. *G. Recknagel.* Über Erwärmung geschlossener Lufträume. S.A.M. 96.

475. *W. Peddie.* Note on the cooling of a sphere in a mass of well stirred liquid. P.E.M.S. 34.

476. *G. Recknagel.* Über Abkühlung geschlossener Lufträume durch Wärmeleitung. S.A.M. 79.

477. *J. Boussinesq.* Sur le pouvoir refroidissant d'un courant liquide ou gazeux. C.R. 133. 257.

478. *J. Boussinesq.* Mise en équation des phénomènes de convection calorifique et aperçu sur le pouvoir refroidissant des fluides. C.R. 132. 1382.

479. *J. Dewar.* The boiling points of liquid hydrogen. A.J.S. 291.

480. *A. Ponsot.* Chaleur spécifique d'un mélange gazeux de corps en équilibre chimique. C.R. 132. 759.

481. *B. Kučer.* O fysikálnich vlastnostech hmoty za velmi nizkých teplot. (Über die physikalischen Eigenschaften der Stoffe bei sehr niedriger Temperatur.) C. 245.

Siehe auch 219; 792; 892; 893.

Thermodynamik.

482. **J. E. Trevor.* Relationships between thermodynamic fundamental functions. J.P.C. 4. 570.

482a. *G. H. Burrows.* A class of relations between thermal and dynamic coefficients. J.P.C. 5. 233.

483. *A. Seligmann-Sui.* Sur une interprétation mécanique des principes de la thermodynamique. C.R. 133. 30.

484. **O. Chwolson.* Über eine Formulirung zweier Sätze der Thermodynamik (russ.). P.M.J.M. 37.

485. **W. P. Boynton.* Gibbs thermodynamical model. P.R. 10. 228.

486. **W. P. Boynton.* Gibbs thermodynamical model for a substance following van der Waals' equation. P.R. 11. 291.

487. **N. N. Schiller.* Experimentelle Daten und Bestimmungen, welche dem 2. Gesetze der Thermodynamik zu Grunde liegen (russ.). J.R.P.C.G. 32. 37.

488. **R. Mewes.* Der erste und zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Z.K.F.G. 171; 182.

489. *O. Wiedeburg.* Zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. A.P.L. 5. 514.

490. *Lorenz.* De theorie der straling en de tweede wet der thermodynamica. C.A.A. 418.

491. *N. Schiller.* Der Begriff des thermischen Verkehrs als Grundlage des 2. thermodynamischen Hauptsatzes. A.P.L. 5. 313.

492. *G. N. Lewis.* Eine neue Auffassung vom thermischen Drucke und eine Theorie der Lösungen. Z.P.C. 35. 343.

493. *A. A. Noyes.* Die genaue Beziehung zwischen osmotischem Druck und Dampfdruck. Z.P.C. 35. 707.

494. *S. Pagliani.* Sul volume specifico dei liquidi a pressione infinitamente grande. R.A.L.R. 10 B. 69.

495. **N. H. Williams.* The verification of Boyle's law. P.R. 11. 254.

496. **A. Battelli.* Sulla legge di Boyle a pressioni molto bassi. N.C.P. 1. 5.

497. **P. Saurel.* On a property of a pressure volum diagram. J.P.C. 5. 179.

498. *C. M. Goldberg.* Das Volum der Molekel. Z.P.C. 32. 116.

499. **J. E. Trevor.* An exposition of the entropy theory. J.P.C. 4. 514.

500. **J. E. Trevor.* Entropy and heat capacity. J.P.C. 4. 529.

501. *P. Duhem.* Die dauernden Änderungen und die Thermodynamik. V—VII. Z.P.C. 33. 641; 34. 312; 683.

502. *O. *Neuhoff*. Adiabatische Zustandsänderungen feuchter Luft und deren rechnerische und graphische Bestimmung. A.P.M.J.

503. **Arnold*. The adiabatic expansion of wet steam. M.P.C.I.E. 140.

504. *L. Marches*. Sur le diagramme entropique. C.R. 132. 671.

505. *Kamerlingh Onnes*. Over dichtheidsverschillen in de nabijheid von den kritischen toestand tengevolge van temperatuurverschillen. C.A.A. 746.

506. *C. Dieterici*. Zur Berechnung der Isothermen. P.Z. 472.

507. *H. H. F. Hyndman*. Isothermen van tweeatomige gassen en hunne binaire mengsels. C.A.A. 668.

508. *J. C. Schalkwijk*. Nauwkeurige isothermen. I. C.A.A. 462; 512.

509. *J. S. Ames*. Rapport sur l'équivalent mécanique de la chaleur. J.H.U.C. 18.

510. *W. P. Boynton*. The two specific heats of gases. P.R. 12. 353.

511. *H. Mache*. Eine Beziehung zwischen der specifischen Wärme einer Flüssigkeit und ihres Dampfes. S.A.W. 176.

512. *Ponsot*. Actions chimiques dans les systèmes dissous ou gazeux: tension de vapeur. Hypothèse d'Avogadro. C.R. 132. 155.

513. *B. Woringer*. Über Dampfspannungen einer Reihe von Benzolkörpern. Z.P.C. 34. 257.

514. *A. Smits*. Eenige opmerkingen over de resultaten verkregen bij de bepaling der dampspanningsvermindering en vriespuntverlaging van nict-zeer verdunde oplossingen. C.A.A. 504.

515. *J. v. Zawidzki*. Über die Dampfdrucke binärer Flüssigkeitsgemische. Z.P.C. 35. 129. — *Duhem* 483.

516. *K. Meyer-Bjerrum*. Über korrespondirende Zustände der Stoffe. Z.P.C. 32. 1.

517. *E. Mathias*. La loi du diamètre rectiligne et les lois des états correspondants. M.S.L. 2. Nr. 1.

518. *O. *Neuhoff*. Adiabatische Zustandsänderungen feuchter Luft und deren rechnerische und graphische Bestimmung. A.P.M.I. 273.

519. *A. Ponsot*. Lois de Gay-Lussac et dissociation des composés gazeux. C.R. 132. 1401.

520. *N. Schiller*. Die Thermodynamik gesättigter Lösungen. A.P.L. 5. 326.

521. *P. *Saurel*. On a theorem of van der Waals. J.P.C 5. 137.

522. *F. Slate*. Force due to „continuous impact". P.R. 12. 363.

523. *E. Cohen*. Thermodynamica der Normalelementen. C.A.A. 116.

524. **H. S. Carhart*. Thermodynamics of the voltaire cell. P.R. 11. 1.

525. *P. *Saurel*. On Clapeyrons equation. J.P.C. 5. 256.

526. *P. *Saurel*. On the theorem of Roozeboom. J.P.C. 5. 281.

527. *P. *Saurel*. On the theorem of Le Chatelier. J.P.C. 5. 277.

Siehe auch 252; 293; 400; 412; 528; 578; 812; 813; 820; 839; 850; 867.

Lösungen.

528. *G. N. Lewis*. A new conception of thermal pressure and a theory of solutions. P.A.Bo. Nr. 9.

529. *A. Campetti*. Sulla relazione fra la solubilità e il calore di soluzione. R.A.L.R. 10 B. 99.

530. *W. F. Magie*. The formule for the depression of the freezing temperature of solutions. P.R. 12. 240.

531. *J. G. Mac Gregor*. On the depression of the freezing point in aqueous solutions of electrolytes. T.C.R.S.C. 3.

532. **W. D. Bancroft*. Isohydric solutions. J.P.C. 4. 274.

Siehe auch 492; 520; 541; 851.

Zustandsgleichung.

533. *H. Hilton*. A note on van der Waals equation. P.M. 579.

534. *van der Waals*. De toestandvergelijking en de theorie der cyclische beweging. C.A.A. 499; 586.

535. *J. D. van der Waals*. L'équation d'état et la théorie du mouvement cyclique. A.N. 231.

536. *R. Hollmann* und *G. Tammann*. Zwei Zustandsdiagramme. A.P.L. 6. 74.

537. **J. E. Verschaffelt*. Beiträge zur Kenntniss der van der Waals'schen Fläche Ψ. Z.K.F.G. 178.

538. *Kamerlingh Onnes*. Bijdragen tot de Kennis van het ψ-vlak van van der Wals I—II. C.A.A. 199; 213.

539. *G. Tammann*. Über Tripelpunkte. A.P.L. 6. 65.

540. *J. J. van Laar*. Sur l'influence des corrections à la grandeur *b* dans l'équation d'état de M. van der Waals sur les dates critiques d'un corps simple. A.M.T. 185.

541. *N. J. van der Lee*. Der Einfluss des Druckes auf den kritischen Lösungspunkt. Z.P.C. 33. 622.

542. *C. M. A. Hartman.* Over de condensatie verschijnselen bij mengsels in de nabijheid van den kritischen toestand. C.A.A. 60.

543. *C. Dieterici.* Die Berechnung der Isothermen. A.P.L. 5. 51.

544. **O. Tumlirz.* L'equazione caratteristica del vapor dell' acqua. N.C.P. 11. 5.

545. **J. D. van der Waals.* Statique des fluides (Mélanges). R.C.I.P. 1. 583.

546. **A. H. Amagat.* Statique experimentale des fluides. R.C.I.P. 1. 551.

Siehe auch 405; 506; 516—518.

Gastheorie, kinetische.

547. **G. Lippmann.* La théorie cinétique des gaz et le principe de Carnot. R.C.I.P. 1. 546.

548. **N. D. C. Hodges.* Note on the law of distribution of velocities among gas molecules. P.R. 10. 253.

549. *J. D. van der Waals jr.* Statistische Strahlungstheorie. P.Z 461.

550. *E. Pringsheim.* Über die Strahlung der Gase. A.Gr. 289.

551. **G. W. Walker.* On the distribution of a gas in an electrical field. P.P.S.L. 171.

Siehe auch 218.

Strahlung.

552. **W. Wien.* Die theoretischen Gesetze der Strahlung. A.W.P. 205.

553. **W. Wien.* Les lois théoriques du rayonnement. R.C.I.P. 2. 23.

554. *H. A. Lorentz.* De stralings wetten van Boltzmann en Wien. C.A.A. 572.

555. *C. E. Mendenhall* and *F. A. Sounders.* The radiation of a black body. A.J.C. 13. 25.

556. *O. Lummer* und *E. Pringsheim.* Kritisches zur schwarzen Strahlung. A.P.L. 6. 192.

557. **O. Lummer.* Le rayonnement des corps noires. R.C.I.P. 2. 41.

558. **D. Goldhammer.* Über das Gesetz der Energieverteilung im Spektrum von blankem Platin (russ.). M.U.Ka. 71.

559. **P. Lebedew.* Les forces de Maxwell-Bartoli dues à la pression de la lumière. R.C.I.P. 133.

560. *E. Warburg.* Über die Wirkung der Strahlung auf die Funkenentladung. A.P.L. 5. 811.

561. **E. Pringsheim.* Sur l'émission des gaz. R.C.I.P. 2. 100.

Siehe auch 490; 549; 550.

Elektrostatik.

562. **N. Hesechus.* Berührungselektricität und Härte (russ.). J.R.P.C.G. 33. 1.

563. **P. Sacerdote.* Sur les déformations des diélectriques dans un champs électrostatique. E.E. 26. 332.

564. **E. Bouty.* Cohésion diélectrique des gaz. S.F.P. 158. 5.

565. *F. Beaulard.* Sur l'hystéresis diélectrique. A.U.G. 191.

566. **F. J. Rogers.* A method of studying electrostatic lines of force. P.R. 11. 56.

567. *A. Garbasso.* Quelques expériences sur la décharge électrique dans les gaz. A.S.G. 11. 282; 329.

568. **K. R. Johnson.* Sur les conditions de formation des décharges disruptives. E.E. 26. 393.

569. *J. H. Jeans.* The striated electrical discharge. P.M. 521.

570. *K. E. Guthe.* Über die Funkenentladung bei schnellen Oscillationen. A.P.L. 5. 818.

571. *W. Wien.* Untersuchungen über die elektrische Entladung in verdünnten Gasen. A.P.L. 5. 421.

572. **E. Riecke.* Über charakteristische Kurven bei der elektrischen Entladung durch verdünnte Gase. N.R. 240.

573. **N. A. Hesechus.* Die gemeinsame Dimensionalität des elektrischen Potentials und der Oberflächenspannung (russ.). J.R.P.C.G. 32. 115.

574. *F. Beaulard.* Sur la différence de potentiel et l'amortissement de l'étincelle électrique à caractère oscillatoire. C.R. 133. 336.

575. *K. R. Johnson.* Konstanz oder Inkonstanz des Funkenpotentials. A.P.L. 5. 121.

576. **Artom.* Rotazioni elettrostatiche dei dielettrici liquidi. L.E. Nr. 6.

577. *B. B. Turner.* Über die Dielektricitätskonstanten reiner Flüssigkeiten. Z.P.C. 35. 385.

578. *J. Königsberger.* Über die Abhängigkeit der Dielektricitäts-, der Magnetisirungskonstante und des Brechungsindex von Druck und Temperatur. A.P.L. 5. 113.

579. *D. Negreanu.* O cestione de dreptate relativ la relaţiunea $\frac{K-1}{(K+2)d} = \text{const}$ între constanta dielectrică K şi densitatea d. (Über die Frage der Richtigkeit betreffend die Beziehung $\frac{K-1}{(K+2)d} = \text{const}$ zwischen der Dielektricitätskonstanten K und der Dichtigkeit d.) A.A.R. 22. A. 69.

580. **A. Schuster*. On electric inertia and the inertia of electric convection. T.E. 46. 892.

581. *S. C. M. Cantone* e *F. Sozzani*. Nuove ricerche intorno alla deformazione dei condensori. R.I.L. 33. 1051.

582. *J. de Kowalski* et *J. de Modzelewski*. Sur les indices de réfraction des liquides. C.R. 133. 33.

583. **E. Villari*. Dell' azione dell' elettricità sulla virtù scaricatrice dell' aria ixata. N.C.P. 11. 17.

584. *Q. Majorana*. Sur l'effet Volta au contact de deux métaux différents. A.S.G. 11. 266.

Siehe auch 217; 406; 407; 551; 563; 817.

Elektrodynamik.

585. **A. Batschinski*. Zur dynamischen Theorie der Elektricität. M.P.N.M. 10.

586. *R. A. Lehfeld*. Elektromotorische Kraft und osmotischer Druck. Z.P.C. 35. 257.

587. *R. A. Lehfeld*. Electromotive force and osmotic pressure. P.M. 377.

588. *P. S. Wedell-Wedellsborg*. Widerlegung eines sehr allgemeinen und wichtigen Satzes der modernen Elektricitätslehre. Z.P.C. 33. 631.

589. *G. Mie*. Ein Beispiel zum Poynting'schen Theorem. Z.P.C. 34. 522. — *P. B. Wedell-Wedellsborg* 35. 604.

590. *J. Stark*. Bemerkungen über das Ohm'sche Gesetz. A.P.L. 5. 793.

591. *A. Petot*. Sur l'état variable des courants. C.R. 133. 510.

592. *T. Des Coudres*. Umwandlung von Wechselstrom in Gleichstrom mittelst des Hall'schen Phänomens. P.Z. 586.

593. **W. Ignatowski*. Über die Wirkung von Wechselströmen auf das Elektrodynamometer. J.R.P.C.G. 32. 85.

594. **A. G. Rossi*. Studio teorico di una coppia di circuiti induttivi in parallelo su corrente alternativa a potenziale costante. N.C.P. 11. 321; 393.

595. **Buffa*. Trasformazione della corrente alternata in continua. R.A.G. 1900. 8 fasc.

596. *A. S. Langsdorf*. A graphical method for analyzing distorted alternating current waves. P.R. 12. 184.

597. **R. Malagoli*. Sulla polarizzazione colle correnti alternanti. N.C.P. 11. 209. — *F. Oliveri*. 211; 12. 141.

598. *Bermbach*. Elementare Ableitung einiger wichtiger Formeln über den Wechselstrom. Z.P. 14. 79.

599. **W. A. Peters*. Über die Berechnung der Leitungen bei Verteilung elektrischer Wechselstromenergie. E.P. 1900. 241.

600. **G. Grassi*. Su alcune proprietá delle correnti alternate. R.T. 145.

601. **W. Duddel*. On rapid variations in the current through the direct current arc. J.I.E.E. 30. 232.

602. **S. Marcucci*. Azione esercitata da una corrente a basso potenziale sopra alcuni coherer quando questi abbiano acquistata la conducibilità. N.C.P. 11. 173.

603. *W. B. Morton*. On the propagation of polyphase currents along a number of parallel wires. P.M. 563.

604. **Grassi*. Studi ed esperienze sulla trasformazione del corrente trifase in mono fase. A.A.E.J.

605. *E. Bose*. Untersuchungen über die elektromotorische Wirksamkeit der elementaren Gase. Z.P.C. 35. 701.

606. *J. Stark*. Bemerkungen zu J. J. Thomsons Theorie der elektrischen Strömung in Gasen. P.Z. 664.

607. *J. Stark*. Beitrag zur Theorie der elektrischen Strömung in Gasen. A.P.L. 5. 89.

608. *V. Crémieu*. Convection électrique et courants ouverts. J.P. 453.

609. **R. Salvadori*. Sopra la forza elettromotrice di alcuni sistemi di pile a concentrazione e di pile ramezinco con solventi organici. N.C.P. 12. 314.

610. **A. Russell*. How condenser and choking coil currents vary with the shape of the wave of the applied E.M.F. J.I.E.E. 32. 504.

611. *D. Negreanu*. O metodă nouă de mesură a resistenței electrice a unui galvanometru. (Über eine neue Methode der Messung des elektrischen Widerstands eines Galvanometers.) A.A.R. 22 A. 523.

612. *D. Negreanu*. O nouă metodă de mĕsură a resistenței interióre a unui element galvanic. (Über eine neue Methode der Messung des innern Widerstands eines galvanischen Elements.) A.A.R. 22 A. 526.

613. *D. Negreanu*. Observațiuni asupra metodei lui Thomson, relativă la determinarea resistenței interióre a unui element galvanic. (Bemerkungen über die Methode von Thomson zur Bestimmung des inneren Widerstandes eines galvanischen Elements.) A.A.R. 22 A. 531.

614. **C. D. Child*. A dissociation theory of the electric arc. P.R. 10. 451.

615. **W. Duddell*. Über schnelle Stromveränderungen in einem Gleichstromflammenbogen. T.E. 46. 269; 310; 358.

616. *N. T. M. Wilsmore.* Über Elektrodenpotentiale. Z.P.C. 35. 251.

617. *A. Bartorelli.* Über das Verhalten des Aluminiums als Elektrode. P.Z. 469.

618. **A. Bartorelli.* Sul comportimento dell' alluminio come elettrodo. N.C.P. 1. 112.

619. **O. Lodge.* On the controversity concerning Volta's contact force. P.P. S.L. 369.

620. *W. Kaufmann.* Über eine Analogie zwischen dem elektrischen Verhalten Nernst'scher Glühkörper und demjenigen leitender Gase. A.P.L. 5. 757.

621. *K. R. Johnson.* Quelques remarques sur les oscillations dans l'excitateur-Hertz. J.P. 365.

622. **A. Turpain.* Fonctionnement du résonateur de Hertz et du résonateur à coupure. — Observation de la résonance électrique dans l'air rarifié. J.P. 425.

623. **T. Felix.* Über die elektrischen Wellen (tschech.). M.A.B. Nr. 29.

624. *E. Warburg.* Über die Polarisationscapacität des blanken Platins. A. P.L. 6. 125.

625. *P. af Bjerkén.* En förändring af kompensationsmetoden för Kapacitets mättningar. B.V.A.S. 57.

626. **S. H. Burbury.* On the vector potential of electric currents in a field where disturbances are propagated with finite velocity. R.B.A. 635.

627. *C. E. Guye.* Sur la valeur absolue du potentiel dans les réseaux isolés de conducteurs présentant de la capacité. C.R. 133. 388.

628. *M. D. Atkins.* Polarization and internal resistance of electrolytic cells. P.R. 13. 102.

629. *E. Kohl.* Über die Stefan'sche Entwicklung der Maxwell'schen Gleichungen für gleichartige Mittel und ihre Voraussetzungen. M.H. 239.

630. *A. Garbasso.* Supre il valore massimo della funzione *Tme* di Maxwell. A.A.T. 489.

631. **A. Garbasso.* Sopre il valore massimo e il significato fisico della funzione *Tme* di Maxwell. N.C.P. 11. 401.

Siehe auch 93; 231; 234; 235; 307—309; 374; 376; 377; 382; 383; 386—392; 524; 894—904.

Thermoelektrizität.

632. *F. Harms.* Über die Verwendung des Calorimeters zu Messungen mit schnellen elektrischen Schwingungen. A.P.L. 5. 565.

633. *H. Chevallier.* Sur les variations permanentes de résistance électrique des fils d'alliage platin-argent soumis à des variations de température. M.S.B. 385.

Ionentheorie.

634. *E. Rothé.* Sur les forces électromotrices de contact et la théorie des ions. C.R. 132. 1478; J.P. 546.

635. *V. v. Türin.* Über den Betrag, um welchen die Wechselwirkungen der Ionenladungen den osmotischen Druck vermindern. Z.P.C. 34. 403.

636. *G. Vaillant.* Sur la couleur des ions. C.R. 133. 366.

637. *C. D. Child.* The velocity of ions drawn from a flame. P.R. 12. 65.

638. *C. D. Child.* The velocity of ions drawn from the electric arc. P.R. 12. 137.

639. **G. Carrara* e *M. Levi.* Sopra l'elettrostrizione degli ioni in solventi organici. N.C.P. 12. 284.

640. *J. S. Townsend.* Conductivity produced in hydrogen and carbonic acid gas by the motion of negatively charged ions. P.M. 630.

641. *J. S. Townsend.* Über Leitfähigkeit in Gasen, erzeugt durch die Bewegung negativ geladener Ionen. P.Z. 483.

Siehe auch 818.

Magnetismus.

642. **H. S. Hele-Shaw* and *A. Hay.* Lines of induction in a magnetic field. T.R.S.L. 303.

643. **W. Wien.* La polarisation rotatoire magnétique et l'axiome de Clausius. E.E. 23. 114.

644. **M. Brillouin.* Sur la polarisation rotatoire magnétique et l'axiome de Clausius. E.E. 26. 164.

645. **Dina.* Sulla isteresi magnetica in un corpo o in un campo rotante. Pol. M. fasc. 5; 8.

646. *K. Tangl.* Wirkung der Magnetisirung auf den Dehnungsmodul. A.P. L. 6. 34.

647. **J. S. Stevens.* The effect of magnetization on the elasticity of rods. P. R. 10. 161.

648. *E. van Everdingen jr.* Over het verschijnsel van Hall en den weerstand in een buiten het magneetfeld bij bismuthkristallen. C.A.A. 277; 448.

649. *A. de Hemptinne.* Le magnétisme exerce-t-il une influence sur les réactions chimiques? B.A.B. 521.

650. *A. de Hemptinne.* Beeinflusst der Magnetismus chemische Reaktionen? Z. P.C. 34. 669.

651. *Richardson.* The magnetic properties of the alloys of cast-iron and aluminium II. P.M. 601.

652. *O. M. Corbino.* Dispersione rotatoria magnetica dei vapori di sodio nell' interno della riga di assorbimento. R.A.L.R. 10 B. 137.

653. *R. T. Glazebrook.* Notes on the practical application of the theory of magnetic disturbance by earth currents. P.M. 432.

654. *F. H. Bigelow.* The magnetic theory of the solar corona. A.J.S. 253.

Siehe auch 370; 392; 508; 785; 786; 794.

Elektromagnetismus.

655. *O. Heaviside.* Electromagnetic theory. T.E. 44. 772; 920; 45. 245; 445; 635; 881; 46. 206; 456; 865; 47. 83.

656. **A. P. Grusincov.* Die elektromagnetische Theorie der Konduktoren (russ.). A.U.Kh. 1.

657. **E. Hagenbach-Bischof.* L'expérience de la rotation électromagnétique et l'induction unipolaire. A.S.G. 11. 5; 128.

658. *L. Graetz.* Über eine mechanische Darstellung der elektromagnetischen Erscheinungen in ruhenden Körpern. A.P.L. 5. 375.

659. **Thompson.* Intorno alle immagini magnetiche ed alla loro applicazione alla teoria dei motori a campo rotante. A.A.E.I.

660. *Crémieu.* Recherches sur le champ électrique produit par des variations magnétiques. A.P.C. 24. 85.

661. *G. W. Walker.* The scattering of electromagnetic waves by a sphere. Q.J. 31. 36; 252.

662. **R. A. Fessenden.* Electromagnetic mechanism with special reference to telegraphic work. J.F.I. 62; 106.

663. *A. W. Rücker.* On the magnetic field produced by electric tramways. P.M. 423.

Siehe auch 301; 304; 307; 377.

F. Geodäsie.

Geodäsie, niedere.

664. **N. Jadanza.* La celerimensura. R.T.C. 12. 129; 145; 161.

665. **E. Galli.* Sopra un nuovo problema di geometria pratica. R.T.C. 12. 1.

666. **Serdobinski.* Sadača Potenota. T.G.C. 1. — *Skricki* 4.

667. *Hatt.* Utilisation des points de Collins pour la détermination d'un quadrilatère. C.R. 132. 597.

668. *P. E. Daussy.* Partage des terrains. J.G. 182.

669. **Fergusson.* New method of dividing surveying circles. M.P.I.C.E. 142.

670. *H. Loschner.* Über eine Erweiterung des Rückwärtseinschneidens. Z.V. 30. 485.

671. *Hafferl.* Absteckung von Kreisbögen aus dem Tangentenschnitt. Z.V. 384.

672. **Loperfido.* Determinazioni geodetiche per il tiro dell artigleria. R.A.G. 1900. 4 fasc.

673. *P. Hatt.* Jonction d'un réseau ferme de triangulation. C.R. 133. 607.

674. **A. Weixler.* Bearbeitung des trigonometrischen Gradmessungsnetzes für Zwecke der Landesvermessung. M.M.G.I. 1901.

Siehe auch 22—24; 63; 73; 83; 94.

Geodäsie, höhere.

675. *J. F. Hayford.* Recent progress in geodesy. B.S.W. 1; 139.

676. *N. Jadanza.* Sul calcolo della convergenza dei meridiani. A.A.T. 887.

677. *P. Pizzetti.* Un principio fondamentale nello studio delle superficie di livello terrestri. R.A.L.R. 10 B. 35.

678. **W. Prince.* L'hypothèse de la déformation tétraédrique de la Terre de W.L. Green et de ses successeurs. A.A.B.

679. *C. Lagrange.* Sur le problème actuel de la physique du globe et les lois de Brück. B.A.B. 1029.

680. **G. H. Darwin.* The theory of the figure of the earth carried to the 2. order of small quantities. M.N.A.S. 82.

681. **H. Cerri.* Un teorema di Dalby. R.T.C. 13. 17.

Siehe auch 783.

Topographie.

Siehe 132. 133.

Kartenprojektionen.

682. **G. B. Maffiotti.* I sistemi di proiezione nei rilevamenti catastali moderni. R.T.C. 12. 184; 13. 1; 23; 37; 57; 75; 97; 138; 151; 161.

683. **Soler.* Sopra una certa deformata della sfera. A.A.P.

684. *G. Holzmüller.* Elementare Behandlung der Mercatorkarte. Z.H. 31. 337.

685. **E. Hammer.* Unechtcylindrische

und unechtkonische flächengleiche Abbildung. P.G.M. 42.

686. *Soler. Sulla rapprentazione geodetica di taluni superficie. A.A.P.

687. *J. H. Franke.* Koordinaten und Projektionen. Z.V. 517.

G. Astronomie.

Astronomie, theoretische.

688. *T. J. J. See.* Recent progress in theoretical astronomy. B.S.W. 17.

689. *H. Wronski.* Reforma de la mecánica celeste. (Span. von F. Villareal.) R.C.L. 177. 197.

690. *C. V. L. Charlier.* On periodic orbits. B.V.A.S. 1059.

691. *S. S. Hough.* On certain discontinuities connected with periodic orbits. A.M. 257.

692. *Salet.* Détermination des orbites au moyen d'observations éloignées. B. A. 18. 97.

693. *H. Poincaré.* Sur le déterminant de Hill. B.A. 17. 134.

694. *O. Callandreau.* Sur les tables auxiliaires de A. Marth pour la résolution de la relation de Lambert. B.A. 18. 127.

695. *H. Bourget.* Sur une formule de Lagrange et le théorème de Lambert. A.T. 3. 67.

696. **G. W. Hill.* Ptolemys problem. A.J.B. 21. 33.

697. **A. Maron.* Problèmes relatifs aux éclipses de soleil. B.S.A.F. 225.

698. **F. C. Penrose.* Graphical method for the determination of the local times of contact in a solar eclipse. M.N.A.S. 483.

699. *L. Schulhoff.* Sur le calcul des limites des latitudes entre lesquelles une occultation est visible. B.A. 17. 11.

700. *A. Claude.* Démonstration géométrique des conclusions de M. Schulhoff. B.A. 17. 15.

701. *E. F. van de Sande Bakhuyzen.* De beweging der aardpool volgens de waarnemingen van de laatste jaren. C. A.A. 159.

702. *C. J. L. Charlier.* Sur les points singuliers des inégalités séculaires des petites planètes. B.A. 17. 209.

703. *C. V. L. Charlier.* Einige Fälle von Librationsbewegung in dem Planetensystem. I. B.V.A.S. 165.

704. **G. Boccardi.* Esposizione del metodo di Tietjen per la correzione degli elementi dell' orbita di un pianeta. P.O.C. 37.

705. *A. Schülke.* Berechnung der Planetenerscheinungen. Z.H. 31. 4.

706. *O. Backlund.* Sur la question des lacunes des petits planètes. B.A. 17. 81.

707. **S. Newcomb.* On the distribution of mean motions of the minor planets. A.J.B. 20. 165.

708. **C. Moser.* Über eine mit der Umlaufszeit der Planeten zusammenhängende Relation. M.G.B. 1.

709. *H. Poincaré.* Sur le mouvement du périgée de la lune. B.A. 17. 87.

710. **E. W. Brown.* Note on the values of the coefficients of the terms of 3. order in the new lunar theory. M.N.A.S. 124.

711. *F. Folie.* Simple recherche trigonométrique de la nutation eulérienne de l'axe instantané. A.S.B. 252.

712. *F. Folie.* Sur des termes nouveaux de l'accélération séculaire de la lune. B.A.B. 42.

713. *F. Folie.* Sur les nutations eulérienne d'apıès les latitudes déterminées à Poulkovo. B.A.B. 270.

714. *F. Folie.* Formules correctes de la nutation eulérienne de l'axe instantané, suivies des expressions complètes de la nutation de l'écorce solide du globe. B.A.B. 616.

715. *F. Folie.* Mon dernier mot sur l'incorrection des formules rapportées à l'axe instantané. B A.B. 693.

716. *F. Folie.* Sur un mode de détermination de la constante de la précession, indépendant du mouvement systématique. B.A.B. 811.

717. **K. Graff.* Formen und Hilfstafeln zur Reduktion von Mondbeobachtungen und Mondphotographien. V.A.R.I.

718. **W. W. Campbell.* The determination of the moons theoretical spectrographie velocity. A.JC. 11. 141.

719. *H. Poincaré.* Sur les équations du mouvement de la lune. B.A. 17. 167.

720. *F. Villareal.* El cometa. R.C.L. 150.

721. *V. Alberti.* Su la determinazione de'radianti. R.A.N. 240.

722. **H. Chrétien.* Le tracé graphique des trajectoires des étoiles filantes et la détermination des radiants. B.S.A.F.376.

723. **M. Ernst.* O redukcyach niezbednych w statystycznych badaniach gwiazd spadających. (Über notwendige Reduktion bei statistischen Erforschungen der Meteoriten.) K.L. 367.

724. *W. C. Kretz.* The positions and proper motions of the principal stars in the duster of coma Berenices as deduced from measurement of the Rutherford photographs. A.A.N.Y. 341.

725. **W. W. Campbell.* A preliminary determination of the motion of the solar system. A.J.C. 13. 80.

726. **E. J. Yowell.* Note on a method of determining the solar apex. A.J.B. 20. 187.

727. **A. Marique.* Vitesse des étoiles dans l'espace. B.S.B.A. 235.

728. *H. Seeliger.* Bemerkungen über veränderliche Eigenbewegung. A.N.K. 154. 55.

729. *R. v. Kövesligethi.* Az allócsillagok tengelyforgásárol. (Über Axendrehung der Fixsterne.) M.T.E. 17. 573.

730. *J. E. Kapteyn.* Over de lichtkracht der vaste sterren. C.A.A. 713.

731. *A. W. Roberts.* Density and figure of close binary stars. N. 64. 468.

Siehe auch 69; 93; 126; 215; 654.

Störungen.

732. **J. Morrison.* General perturbations and the perturbative function. P.A. 309.

733. *A. Weiler.* Die primordialen Störungen. A.N.K. 154. 17.

734. *A. Weiler.* Die externen Störungen. A.N.K. 154. 97.

735. *C. V. L. Charlier.* Zur Theorie der säkularen Störungen. B.V.A.S. 1083.

736. *H. W. Hill.* Secular perturbations of the planets. A.J.M. 317.

737. *A. Idman.* Bemerkungen über einen Satz von Leverrier, die säkularen Störungen der kleinen Planeten betreffend. B.V.A.S. 977.

Vielkörperproblem.

738. *E. Strömgren,* Über mechanische Integration und deren Verwendung für numerische Rechnungen auf dem Gebiet des Dreikörperproblems. B.V.A.S. 443.

Kosmologie.

739. **F. R. Moulton.* An attempt to test the nebular hypothesis by an appeal to the laws of dynamies. A.J.C. 11. 103.

740. —. On the clustering of gravitational matter in any part of the universe. N. 64. 626.

741. **R. v. Kövesligethi.* Az égi testek fejlödése ei a föld kora. (Entwicklung der Himmelskörper und Alter der Erde.) M.T.E. 18. 361.

742. **A. Flamache.* Les énergies cosmiques. B.S.B.A. 239.

743. *J. Wilsing.* Über die Erhaltung der Energie der Sonnenstrahlen. A.N.K. 154. 429.

744. *A. Hustek.* Die Entstehung des Planetensystems. N.W. 553.

Astronomie, sphärische.

745. **H. H. Turner.* Some suggestions for the explicit use of direction cosines or rectangular coordinates in astronomical computations. M.N.A.S. 201.

746. —. Deduçao das formulas de Mr. Guyou para executator os calculos nauticos usando unicamente as tabuas de latitudes crescidas. A.C.M.N. Jan.-Febr.

747. *C. W. Wirtz.* Über ein Problem der sphärischen Astronomie und seine Bedeutung für die Nautik. A.H. 323. 467. — *E. Wendt* 408.

748. **A. Vital.* Ein Diagramm zur graphischen Lösung der astronomischen Schiffahrtsprobleme. M.A.G.S. 201.

749. **A. Vital.* Graphische Methode für die astronomischen Ortsbestimmungen in See. M.A.G.S. 267.

750. **A. v. Triulzi.* Astronomische Ortsbestimmungen zur See. M.A.G.S. 439.

751. **D. Florian.* Astronomische Ortsbestimmungen zur See ohne Rechnung und Tafeln. M.A.G.S. 598.

752. **W. Ivanowski.* Zvezdnija nabljudenija na more. (Sternbeobachtungen zur See.) M.Z.P. 297. 67; 131.

753. **J. F. Hayford.* Determination of time, longitude, latitude and azimuth. R.C.G.S.

754. **Post.* Methods of determination of latitude, longitude and solar time in reconnaissance surveys. E.N. 43. 158.

755. **J. Maurice.* Longitude by the right ascension of the moon. N.M.L. 379.

756. **Radler de Aquino.* O methodo de Marcq. Saint-Hilaire. R.M.B. 8.

757. **H. Heyenga.* Ergänzungen zur Neuen Methode der Ortsbestimmung und der Douweschen Standlinie. H.H. 545.

758. **H. Heyenga.* Neue Methode zur Bestimmung des Beobachtungsorts aus 2 Höhen. H.H. 162.

759. **E. Wendt.* Gleiche Sonnenhöhen. H.H. 186; 198.

760. **T. Lüning.* Das Zweihöhenproblem in elementarer Darstellung. H.H. 280; 291.

761. **H. Heyenga.* Kritische Prüfung

der beobachteten Gestirnshöhen auf offener See. H.H. 330.

762. *G. Pesci.* Su di un regolo calculatore della differenza fra l'altezza meridiana e circummeridiana di un astro. C.L. 1900. 679.

763. **Jeuneu.* Critique de la méthode de Foerster pour déterminer le point par deux hauteurs d'astres. R.M.M.P. 145. 312.

764. *C. W. Wirtz.* Zeitbestimmung und Chronometerkontrolle durch eine Höhendifferenz. A.H. 342. — *A. Wedemeyer* 468.

765. *E. Guyou.* Sur l'emploi des circumméridiennes à la mer, C.R. 132. 657.

766. **J. M. Pernter.* Die scheinbare Gröfse des Himmelsgewölbes und die scheinbare Gröfse der Gestirne. S.V.N.W. 41.

767. **M. Ernst.* O kszlatcie pojorneciego sklepienia niebieskiego. (Über die Gestalt der scheinbaren Himmelskugel.) W. W. 242.

768. *„Arcturus.“ Rising and setting of the moon. E.M.W. 64.

769. *A. Cornu.* Sur la loi de rotation diurne du champ optique fourni par le sidérostat et l'héliostat. B.A. 17. 49.

Siehe auch 109.

Aberration.

770. *C. Le Paige.* Sur la réduction au lieu apparent. Termes dus à l'aberration. M.S.L. 3 Nr. 3.

771. **P. H. Cowell.* Note on the formulae for star corrections. M.N.A.S. 607.

Siehe auch 875.

Chronologie.

772. *G. Holzmüller.* Das Problem der wahren und mittleren Zeit. Z.H. 31. 340.

773. **C. T. de Quarenghi.* L'unification des calendriers Grégorien et Julien. R.G.O. 12. 175.

774. **Abetti.* Il numero assoluto dell' era volgare nel periodo giuliano. M.S.S.I. 29. Nr. 1.

775. **F. Körfer.* Die Frage der Ausdehnung dezimaler Zeiteinteilung auf das Winkelmafs. N.W. 261.

776. **V. Strouhal.* Die Frage der Dezimalteilung der Zeit und des Winkels (tschech.). B.A.P. Nr. 3. 157.

Siehe auch 811.

Gnomonik.

777. **Marzocchi.* Alcune regole pratiche per tracciare le orologie solari. R.A.G. 1900. Fasc. 1.

H. Geophysik.

Geophysik.

778. *W. A. Stekloff,* Mémoire sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré. A.T. 2. 273.

779. *C. Lagrange.* Sur le problème actuel de la physique du globe et les lois de Brück. B.A.B. 1900. 1029.

780. *A. Nippoldt jun.* Ein Satz über Fouriersche Reihen und seine Anwendung in der Geophysik. P.Z. 363.

781. **A. Geršun.* O predelenie srednej plotnosti zemli. (Über die Methode, die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen.) B.R.A.G. 15.

782. *F. R. Helmert.* Der normale Teil der Schwerkraft im Meeresniveau. S.A.B. 328.

783. *H. Poincaré.* Les mesures de gravité et la géodésie. B.A. 18. 1.

784. **A. Venturi.* Sulla compensazione dei risultati nelle misure di gravità relativa terrestre. N.C.P. 11. 83.

785. **R. v. Eötvös.* A nehézség és a mágneses erö nivotelüteteinek és valtozàsainak meghatarozaśáról. (Über Bestimmung der Niveauflächen und der Variationen der Schwer- und erdmagn. Kraft.) M.P.L. 361.

786. **R. Eötvos.* Étude sur les surfaces de niveau et la variation de la pesanteur et du champ magnétique, R.C.I.P. 2. 371.

787. *J. Knett.* Über die Erregungsart von Erdbeben und andere die Propagation betreffende Faktoren. S.L.P. 263.

788. *M. H. Nagaoka.* Tremblements de la terre. A.S.G. 10. 604.

789. *E. Wiechert.* Prinzipien für die Wirksamkeit von Seismographen. P.Z. 593; 605.

790. *J. Collet.* Les corrections topographiques des observations pendulaires. A.U.G. 13. 1.

791. **N. Piltschikow.* Das Foucaultsche Pendel (russ.). M.P.O. 24. 193.

792. *J. Schubert.* Zur Theorie der Wärmeleitung im Erdboden. M.Z. 377.

793. *V. Bjerknes* u. *J. W. Sandström.* Über die Darstellung des hydrographischen Beobachtungsmaterials durch Schnitte, die als Grundlage der theoretischen Diskussion der Meerescirkulation

und ihrer Ursachen dienen können. M.S.G. Nr. 4.

794. *D. Negreanu.* Formulele carĭ represintă legea distribuţiuneĭ componenteĭ orizontale a forţeĭ magnetice terrestre în România. (Formeln, welche die Gesetze der Verteilung der erdmagnetischen Horizontalkomponente darstellen.) A.A.R. 23 A. 114.

Siehe auch 189; 643; 895.

Meteorologie, mathematische.

795. *L. Weber.* Versuch einer neuen Methode der Wetterprognose. S.V.K. 28.

796. **B. J. Sresnevsky.* Möglichkeit der genauen Vorhersage des Wetters vom wissenschaftlichen und sozialen Standpunkt. A.U.J. 1901. Nr. 1.

797. **Dechevrens.* Méthode simplifiée dite des facteurs pour le calcul des séries de Fourier et de Bessel appliquées à la météorologie. N.L.M.

798. **F. H. Bigelow.* Line integrals in the atmosphere. M.W.R. 535.

799. **P. Ribkin.* Über die Periodizität der atmosphärischen Erscheinungen. J.R.P.C.G. 32. 67.

800. *H. König.* Mittägige Helligkeit in Mecklenburg. A.F.M. 365.

801. **W. Schramm.* Über die Verteilung des Lichts in der Atmosphäre. S.V.K. 81.

802. *J. Maurer.* Frank Verys Experimentaluntersuchung über die atmosphärische Strahlung. M.Z. 223.

803. *N. E. Dorsey.* The colour and polarisation of blue skye light. N. 64. 138.

804. *B. Peter.* Über den Einfluſs der atmosphärischen Dispersion auf die Messung von Distanzen. A.N.K. 155. 289.

805. *G. B. M. Zerr.* Atmospheric refraction. M.M.F. 8. 192.

806. —. Una formula semplice per il calcolo delle rifrazioni astronomiche. C.L. 1900. 372.

807. **Comstock.* A new method of correcting the suns declination for refraction. E.N. 43. 366.

808. **A. Loperfido.* Contributo allo studio del coefficiente di rifrazione in Italia. R.T.C. 13. 119; 145.

809. **L. Cruls.* Da refracção astronomica. B.M.R.J. 20.

810. **G. Saija.* Sulle variazioni della rifrazione astronomica. M.S.S.I. 28. 245.

811. *M. Morero y Anda.* Correciones que deben aplicarse a la media diurna de la temperatura deducida de pocas observaciones. M.y.R.M. 5.

812. **H. Shaw.* Vertical Circulation of the atmosphere. Q.J.M.S. 163.

813. *Kunse.* Zur barometrischen Höhenmessung. Z.V. 545.

814. **V. Bjerknes.* The dynamic principle of the circulatory movements in the atmosphere. M.W.R. 434.

815. **V. Bjerknes.* The circulatory movements in the atmosphere. M.W.R. 532.

816. *H. Brocard.* Théorie mathématique des cyclones. I.M. 240.

817. **L. Danilow.* Eine neue Theorie der atmosphärischen Elektrizität (russ.). M.P.O. 24. 291.

818. **J. Elster* und *H. Geitel.* Über die Existenz elektrischer Zonen in der Atmosphäre. T.M.W. 4. 213.

819. *S. Arrhenius.* Über die Ursache des Nordlichtes. B.V.A.S. 545.

820. *F. Pockels.* Über die Kondensation an Gebirgen. M.Z. 300.

821. **Artom.* La formazione della grandine dovuta a movimenti rotatori. L.E. Nr. 12.

Ebbe und Flut.

822. **Moxli.* Teorija prilivov i otlivov. (Versuch einer Vervollkommnung der Theorie der Gezeiten.) M.Z.P. 299. 43; 300. 93.

823. **J. F. Ruthven.* The new theory of the tides. N.M.L. 286; 579. — *J. H. G. Moxly.* 466; 612; 756. — *Plumstead.* 549; 691.

824. *E. Ferron.* Mémoire analytique sur la théorie de Laplace relative au phénomène du flux et du reflux de la mer. I.L. 1.

Nautik.

825. **W. Allingham.* Great circle sailing. N.M.L. 51.

Siehe auch 746—748.

I. Naturwissenschaften, mathematische.

Chemie, mathematische.

826. *P. Gordan* und *W. Alexejew.* Übereinstimmung der Formeln der Chemie und der Invariantentheorie. Z.P.C. 35. 610; V.E.S. 107.

827. *W. G. Alexejew.* Grundlagen einer symbolischen Invariantentheorie (russ.). J.R.P.C.G. 33 Beilage.

828. **V. G. Alexeev.* Graphische Aufstellung des simultanen Systems einer

kubischen und einer biquadratischen Form, wodurch die Übereinstimmung der atomistischen Theorie und der symbolischen Invariantentheorie dargestellt ist. A.U.J. 1900. Nr. 3.

829. *G. Helm.* Über Mathematik und Chemie. S.I.D. 29.

830. **P. T. Müller.* La méthode des volumes moléculaires. B.S.C.P. (3) 23. 325.

831. **O. Boudouard.* Lois numériques des équilibres chimiques. B.S.C.P. (3) 23. 137.

832. **P. Saurel.* On the equilibrium of chemical systems. J.P.C. 5. 21.

833. **W. D. Bancroft.* Reaction velocity and equilibrium. J.P.C. 4. 705.

834. **O. Boudouard.* Influence de la pression dans les phénomènes d'équilibres chimiques. B.S.C.P. 26. 227.

835. *G. N. Lewis.* Entwicklung und Anwendung einer allgemeinen Gleichung für die freie Energie und das physikochemische Gleichgewicht. Z.P.C. 32. 364.

836. *Le Marchis.* Sur les fausses équilibres chimiques. J.P. 525.

837. **T. W. Richards.* The driving energy of physico-chemical reaction and its temperature-coefficient. J.P.C. 4. 383.

838. *F. A. H. Schreinemakers.* Gleichgewicht im System: Wasser, Phenol und Aceton. Z.P.C. 33. 78.

839. *F. A. H. Schreinemakers.* Dampfdrucke binärer und ternärer Gemische. Z.P.C. 35. 959.

840. *H. Pélabon.* Sur la vérification expérimentale d'une loi de mécanique chimique. C.R. 132. 1411.

841. *H. Danneel.* Chemische Kinetik und freie Energie der Reaktion $2\,HJ + 2\,Ag = 2\,AgJ + H_2$. Z.PC. 33. 415.

842. *R. Wegscheider.* Über die allgemeinste Form der Gesetze der chemischen Kinetik homogener Systeme. Z.P.C. 35. 513.

843. *K. Ikeda.* Ableitung der Reaktionsisotherme und Reaktionsisochore für Dissociationsgemische. Z.P.C. 33. 287.

844. *F. A. H. Schreinemakers.* Iets over evenichten in ternaire stelsels. C.A.A. 675.

845. *F. Haber.* Über die Autoxydation. Z.P.C. 34. 513.

846. *F. Haber.* Über die elektrische Reduktion von Nichtelektrolyten. Z.P.C. 32. 193.

847. *M. Delépine.* Recherches sur les acétales. A.P.C. 23. 378. 482.

848. *Yŭkichi Ōsaka.* Über die Birotation der d-Glukose. Z.P.C. 35. 661.

849. *W. Duane.* On the velocity of chemical reactions. A.J.S. 349.

Siehe auch 480; 511; 649; 650.

Thermochemie.

850. *R. Gahl.* Studien zur Theorie der Dampfdrucke. Z.P.C. 33. 178.

851. *J. J. van Laar.* Die Beziehungen zwischen Lösungswärme und Löslichkeit bei Elektrolyten. Z.P.C. 35. 11.

Elektrochemie.

852. *E. Straneo.* I fondamenti scientifici dell' elettrochimica. R.T. 158.

Elektrolyse.

853. *R. R. Ramsay.* The effect of gravity and pressure on electrolytic action. P.R. 13. 1.

854. **G. di Ciommo.* Sulla polarizzazione elettrolittica di speciali elettrodi. N.C.P. 12. 258.

855. *H. Jahn.* Über den Dissociationsgrad und das Dissociationsgleichgewicht stark dissociirter Elektrolyte. Z.P.C. 33. 545; 35. 1.

Siehe auch 531; 846; 851.

Biologie, mathematische.

856. **K. Pearson.* Mathematics and Biology. N. 63. 274.

857. *A. Gallardo.* Las matemáticas y la biologia. A.S.A. 51. 112.

858. *A. Gallardo.* Matematika i biologija. (Mathematik und Biologie.) M.P.O. 26. 1.

K. Technik.

Mechanik, technische.

859. *F. Villareal.* Flekso da l'traboj. (Biegung des Balkens.) R.C.L. 101.

Fachwerk.

860. *A. Schülke.* Die Behandlung von Dach- und Brückenkonstruktionen im Unterricht. Z.P. 14. 18.

Gewölbe.

861. *G. Poisson.* Sur la voute élastique. C.R. 133. 470.

862. **C. H. Cordeiro.* Formule rationnelle pour la détermination de l'épaisseur des voutes circulaires. A.F. 260.

Erddruck.

863. **Baratta*. Sulla stabilità delle dighe. R.A.G. 1900. 10 fasc.
864. *F. Auerbach*. Die Gleichgewichtsfiguren pulverförmiger Massen. A.P.L. 5. 170.

Maschinenlehre.

865. **Grassi*. Sul calcolo delle dimensioni dell' indotto nelle dinamo. L.E. Nr. 7.
866. *Bordier*. Théorie de la machine de Wimshurst sans recteurs. C.R. 132. 761.
867. *G. Wilson* and *H. Noble*. On the construction of entropy diagrams from steam engine indicator diagrams. S.P.M. Nr. 10.
868. *A. Petot*. Sur le mode de fonctionnement des freins dans les automobiles. C.R. 133. 410.
869. **A Brancher*. Tracé du profil des encoches d'encliquetages à galets cylindriques. A.F. 247.

Uhrmacherkunst.

870. *C. E. Guillaume*. Procédé pratique pour la correction de l'erreur secondaire des chronomètres. C.R. 132. 1105.

Strafsenbau.

871. *J. Pyro*. Calcul de la valeur des réductions de pente des chemins. I.L. 103.

Eisenbahnwesen.

872. **C. H. Cordeiro*. Distribution des rails courts et longs dans les courbes. A.F. 292.
873. **Glover*. Transition curves for railways. M.P.I.C.E. 140.

Siehe auch 663; 879.

Telegraphenwesen.

874. *A. C. Crehore*. Currents and potentials on submarine cables produced by sinewave electromotive forces. P.R. 12. 341.

Siehe auch 662.

Photographie.

875. **M. v. Rohr*. Über graphische Darstellung von sphärischen Aberrationen. A.W.P. 78.
876. *Ö. Bergstrand*. Sur la déformation des couches sensibles des plaques photographiques. B.V.A.S. 187.

Siehe auch 467.

Elektrotechnik.

877. **Preece*. The relations between electricity and engineering. M.P.I.C.E. 142.
878. **Ponzio*. Una trasmissione per piccoli motori elettrici. Pol. M. fasc. 11.
879. *L. Marini*. Effetti dannosi prodotti dalle correnti delle tramvie elettriche. R.F.M. 3. 508.

Instrumentenkunde.

880. **Brown*. The viagraph. E.N. 43. 271.
881. **R. Malagoli*. Le macchina di Atwood e la sua applicazione alla determinazione di *g*. N.C.P. 11. 33.
882. *A. Smits*. Über einen Manostat. Z.P.C. 33. 39.
883. —. Gasspannungsmesser von Holden-Woolwich. M.A.G. 1900. 214.
884. *W. Elsässer*. Ein Apparat zur Erläuterung des Dopplerschen Princips. Z.P. 14. 16.
885. **N. Jadanza*. Il teleobiettivo e la sua storia. R.T.C. 12. 17; 33.
886. *A. Claude*. Sur l'emploi d'un prisme de reflexion dans les lunettes. B.A. 17. 19.
887. **Young*. Note on theory of the anallatic telescope. M.P.I.C.E. 139.
888. *M. Updegraff*. On the errors of a transit instrument due to ellipticity of pivots. A.N.K. 155. 241.
889. *G. Lippmann*. Sur un appareil destiné à entrainer la plaque photographique qui reçoit l'image fournie par un sidérostat. C.R. 132. 931.
890. **M. A. Cornu*. On the law of diurnal rotation of the optical field of the siderostat and heliostat. A.J.C. 11. 148.
891. **A. Mewes*. Grundformel für das Kohlrauschsche Petroläther- und für das Quecksilberthermometer. D.M. 73.
892. *A. W. Kapp*. Studien über das Luftthermometer. A.P.L. 5. 905.
893. *L. Holborn* und *F. Kurlbaum*. Über ein neues optisches Pyrometer. S.A.B. 712.
894. *E. Perreau*. Étude géométrique du condensateur transformateur. E.E. 27. 185.
895. **W. Jäger*. Über Normalelemente. C.A.E. 3; 28; 51; 73; 89.
896. *G. Lippmann*. Sur un galvanomètre a statique. J.P. 476.
897. *P. Weiss*. Sur un nouveau système d'ampèremètres et de voltmètres. C.R. 132. 957.

898. **L. Hermann* u. *M. Gildemeister*. Untersuchung über die Eigenschaft und die Theorie des Kapillarelektrometers. A.F.G.P. 81. 491.

899. *G. Léon*. Sur un grisoumètre électrique C.R. 132. 1408.

900. *C. Pollak*. Sur un voltamètre disjoncteur des courants. C.R. 132. 1405.

901. *Lippmann*. Sur un galvanomètre parfaitement astatique. C.R. 132. 1161.

902. *V. Crémieu*. Sur une balance très sensible pouvant servir de galvanomètre, d'electrodynamomètre et d'electromètre absolu. C.R. 132. 1267.

903. **D. Robertson*. The apparent resistance of a ballistic galvanometer of the moving coil type and a method of allowing for the damping current. T.E. 46. 901; 47. 17.

904. **V. W. Ekman*. On an new current-meter invented bei F. Nansen. N.M.N.

905. *H. Haller*. Schichtensucher. Z.V. 373.

906. *C. Viola*. Über den Vertikalpendelseismograph. N.J.M. 1. 145.

Siehe auch 240; 442; 446; 448; 611; 669; 789.

Nachtrag zu dem Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik, welche im Jahre 1900 in technischen Zeitschriften erschienen sind.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

Abkürzungen:

Ann.M. Annales des Mines 9ᵉ série 17—18.

B.S.E. Bulletin de la Société pour l'encouragement de l'industrie nationale, Paris 5ᵉ série 6.

E. The Engineer 89—90.

E.Z. Elektrotechnische Zeitschrift 21.

N.A.C. Nouvelles Annales de la Construction 46.

Z.I. Zeitschrift für Instrumentenkunde 20.

Z.V. Zeitschrift für Vermessungswesen 29.

Abbildungen.

1. *A. Schreiber*. Zur konformen Doppelprojektion der Preufsischen Landesaufnahme. Z.V. 29. 257; 289.

Aerodynamik.

2. *H. S. Greenough*. Note on soaring flight. E. 90. 499.

Dynamik.

3. *L. Lecornu*. Sur le volant élastique. B.S.E. 6. 231.

4. *J. Heubach*. Zur Theorie der Asynchronmotoren. E.Z. 21. 73; 97.

5. *E. Lefer*. Étude du fonctionnement des moteurs à plusieurs cylindres. B.S.E. 5. 58.

6. *R. H. Smith*. A new measure of good quality in governors. E. 89. 529.

7. *F. Niethammer*. Beiträge zur Berechnung und Beurteilung von Dynamomaschinen und Motoren. E.Z. 21. 528; 549.

8. *A. Grau*. Ein elektrisches Bremsdynamometer. E.Z. 21. 265.

9. *H. Görges*. Über das Verhalten parallel geschalteter Wechselstrommaschinen. E.Z. 21. 188.

10. *J. Hervieu*. Le chemin de fer métropolitain de Paris. N.A.C. 46. 103; 121; 141; 151.

11. *A. Mallock*. Measurement of the attractive force, resistance and acceleration of trains. E. 90. 323.

12. *L. Bochet*. Les automobiles à pétrole. Ann.M. 17. 5.

13. *R. Mansel*. On the mechanical theory of steamship propulsion. E. 89. 243; 90. 179.

Elastizität und Festigkeitslehre.

14. *J. Paterson*. Testing cement by the modulus of rupture for transverse strain. E. 90. 127. — *C. L. Smith* 162.

15. —. The strength of spars and rigging of sailing vessels. E. 89. 2; 30; 56.

16. *A. Lafay.* Sur les déformations de contact des corps élastiques. B. S. E. 6. 413.

17. *A. S. Younger.* On the corrosion and failure of propellar shafts. E. 89. 415

18. *A. Bachellery.* L'attelage automatique des véhicules sur les chemins de fer américains. Ann. M. 17. 315.

19. *L. Champy.* La ventilation des tunnels et le système Saccardo. Ann. M. 17. 167.

Siehe auch 3.

Elektrizität.

20. *E. Dick.* Neuer selbstthätiger Spannungsregulator. E. Z. 21. 80.

21. *C. A. Rossander* und *E. A. Forsberg.* Über die Vorausbestimmung der erforderlichen Kapazität von Akkumulatorenbatterien. E. Z. 21. 881.

22. *A. Löwit.* Berechnung des Drahtdurchmessers bei gegebener Zahl der Ampèrewindungen, der Spulendimensionen und der Spannung. E. Z. 21. 881. — *F. Claussen* 1055.

23. *E. Ölschläger.* Die Berechnung von Widerständen, Motoren und dergl. für aussetzende Betriebe. E. Z. 21. 1058.

24. *J. Herzog* und *C. P. Feldmann.* Über widerstandstreue Umgestaltung elektrischer Leitungsnetze. E. Z. 21. 167.

25. *A. Sengel.* Spannungsteilung an Gleichstrommaschinen mittels Drosselspulen. E. Z. 21. 387; 410.

26. *M. Vogelsang.* Über die Steuerung elektrischer Gleichstromkrahne. E. Z. 21. 635.

27. *R. Krause.* Die Stufung von Anlassern für Gleichstrommotoren. E. Z. 21. 328.

28. *J. Fischer-Hinnen.* Elektrische Bremse für Wechselströme. E. Z. 21. 767. — *A. Kolben* 854.

29. *F. Breisig.* Über die graphische Darstellung des Verlaufs von Wechselströmen längs langer Leitungen. E. Z. 21. 87.

30. *H. Görges.* Über den Parallelbetrieb mit Wechselstrommaschinen. E. Z. 21. 29.

31. *C. Feldmann* und *J. Herzog.* Über den Widerstand eiserner Wechselstromleiter. E. Z. 21. 844.

32. *F. Des Coudres.* Eine direkte Methode für Wechselstromanalyse. E. Z. 21. 752; 770.

33. *O. S. Bragstad.* Über die Wellenform des Drehstroms. E. Z. 21. 252.

34. *R. Goldschmidt.* Über den Leerlauf von Drehstromtransformatoren. E. Z. 21. 991.

35. *J. A. Möllinger.* Über Drehstromzähler. E. Z. 21. 573. — *J. Stern* 666.

36. *W. Reichel.* Versuche über Verwendung des hochgespannten Drehstroms für den Betrieb elektrischer Bahnen. E. Z. 21. 453.

37. *M. Breslauer.* Über Entwürfe und Prüfung von Drehstrommotoren mit Hilfe des Diagramms der Mehrphasenmotoren. E. Z. 21. 469.

38. *F. Eichberg.* Über die Zerlegung des oscillierenden Feldes des Einphasenmotors in Drehfelder. E. Z. 21. 484.

39. *G. Osanna.* Theorie der asynchronen Mehrphasenmotoren. E. Z. 21. 712. — *F. Emde* 782; 854; 941. — *J. Heubach* 815; 1089. — *R. Kuhlmann* 895. — *B. A. Behrend* 875; 1090. — *J. K. Sumec* 1008. — *S. W. Schmidt* 1031.

40. *J. Wg.* Günstigste Verteilung der Verluste in Transformatoren. E. Z. 21. 745.

41. *W. Thiermann.* Spiegelgalvanometer mit weitem Messbereich. E. Z. 21. 211.

42. *F. Spielmann.* Kupferersparnis bei Kraftübertragungen. E. Z. 21. 1007.

43. *C. Michalke* und *O. Martienssen.* Fernstromzeiger. E. Z. 21. 461.

44. *J. Edler.* Untersuchungen des Einflusses der vagabundierenden Ströme elektrischer Strassenbahnen auf erdmagnetische Messungen. E. Z. 21. 193.

45. *C. Liebenow.* Über tellurische Elektrizität. E. Z. 21. 962.

46. *K. Richter.* Beiträge zur Fehlerbestimmung in Dynamomaschinen. E. Z. 21. 38.

47. *R. Goldschmidt.* Diagramme für Induktionsmotoren. E. Z. 21. 693.

48. *E. Stadelmann.* Beitrag zur Berechnung von Lichtleitungsregulatoren. E. Z. 21. 285.

49. *G. Dettmar.* Die günstigste Dimensionierung der Stromabnehmer bei Schleifringen und Kollektoren. E. Z. 21. 429.

50. *K. Wilkens.* Über die Erwärmung unterirdischer elektrischer Leitungen. E. Z. 21. 413.

51. *G. Rasch.* Über Stromversorgung längerer Bahnlinien. E. Z. 21. 1063; 1080.

52. *G. Kapp.* Zugkraftmesser für elektrische Bahnwagen. E. Z. 21. 579.

53. *W. Kummer.* Formeln zur Berechnung und Prüfung von Automobilen. E. Z. 21. 346.

54. *F. Breysig.* Über die Darstellung des Verlaufs telegraphischer Zeichen in langen Kabeln. E. Z. 21. 1046.

Siehe auch 8—9; 61; 62; 70; 76—78; 80; 93; 98—99.

Fehlerrechnung.

55. *E. Hammer*. Beitrag zur Geschichte der Ausgleichungsrechnung. Z. V. 29. 613.

56. *W. Laska*. Über den Einfluss der Ungenauigkeit gegebener Punkte auf das Resultat des Voreinschneidens. Z. V. 29. 557.

Geodäsie.

57. *O. Eggert*. Vergleichung der Ergebnisse des geometrischen und des trigonometrischen Nivellements nach den durch von Bauernfeind im Jahre 1881 ausgeführten Beobachtungen. Z. V. 29. 113.

Siehe auch 56; 59; 60; 81; 82; 91.

Graphisches Rechnen.

58. *Puller*. Zur Quadratur des Kreises. Z. V. 29. 588.

59. *C. Runge*. Graphische Ausgleichung beim Rückwärtseinschneiden. Z. V. 29. 581.

60. *A. Klingatsch*. Zur graphischen Ausgleichung von Polygonzügen. Z. V. 29. 540.

61. *E. Hunke*. Über graphische Berechnung von Widerstandsregulatoren. E. Z. 21. 801.

62. *F. Blanc*. Eine graphische Methode zur Bestimmung der Strom- und Spannungswerte in verketteten Mehrphasensystemen. E. Z. 21. 733; 749.

Hydrodynamik.

63. *H. S. Hele-Shaw*. The distribution of pressure due to flow round submerged surfaces with special reference to balanced rudders. E. 89. 413.

64. *G. Russo*. The rolling of ships on waves. E. 89. 353.

65. —. The speed of transports. E. 89. 109.

66. *Rateau*. Théorie des hélices propulsives. B. S. E. 5. 497.

Interpolation.

67. *W. Láska*. Über das arithmetische Mittel. Z. V. 29. 593.

Kinematik.

68. *E. Vicaire*. Note sur la représentation de l'effet des freins à l'aide d'un frein fictive à serrage instantané et à force retardatrice constante. Ann. M. 18. 104.

Kurven.

69. *K. Sieber*. Übergangskurven bei elektrischen Straſsenbahnen. E. Z. 21. 863.

70. *G. Benischke*. Über den sogenannten Formfaktor der Wechselstromkurven. E. Z. 21. 674; 765. — *R. Richter* 746.

71. *E. Hammer*. Über den aus zwei Kreisbögen bestehenden Korbbogen zur Verbindung zweier gegebenen Tangentialpunkte. Z. V. 29. 236.

Siehe auch 10.

Magnetismus.

72. *K. Krogh*. Über magnetische Trägheit. E. Z. 21. 1083.

73. *C. Feldmann* und *J. Herzog*. Über die Schirmwirkung von Eisenröhren. E. Z. 21. 861.

74. *A. Cornu*. Action du champ magnétique terrestre sur le marché d'un chronomètre aimanté. B. S. E. 6. 880.

75. *H. du Bois*. Magnetische Präcisionswage. Z. I. 20. 97; 129.

76. *C. Westphal*. Die Gesetze der Kraftlinienverteilung über den Umfang der Dynamomaschinen. E. Z. 21. 747.

77. *G. Dettmar*. Die Verteilung der Kraftlinien bei Nuthenankern, von Gleich- und Wechselstrommaschinen. E. Z. 21. 944.

78. *C. Westphal*. Die Gesetze der Kraftlinienverteilung über den Umfang der Wechselstrommaschinen. E. Z. 21. 878.

Meſsapparate.

79. *H. Kellner*. Über einige Methoden und Apparate zur Bestimmung der Konstanten des Fernrohrs. Z. I. 20. 1; 33.

80. *J. Kollert*. Elektrodynamometer mit Spiegelablesung für technische Zwecke. E. Z. 21. 788.

81. *A. Schreiber*. Besondere Centrirungsverhältnisse. Z. V. 29. 321.

82. *J. Schnoeckel*. Die Flächenberechnung mittelst eines neuen antilogarithmischen Grundsteuer-Kartenmaſsstabes. Z. V. 29. 413.

Nautik.

83. *B. Wanach*. Eine Methode Schtschotkins von gleichzeitiger Zeit- und Breitebestimmung aus Beobachtungen von Sternpaaren in gleichen Höhen. Z. V. 29. 209.

Optik.

84. *R. Strehl*. Zonenfehler und Wellenflächen. Z. I. 20. 266.

85. *B. Wanach*. Über L. v. Seidels Formeln zur Durchrechnung von Strahlen durch ein centrirtes Linsensystem nebst Anwendung auf photographische Ob-

jekte. Z. I. 20. 161. — *H. Harting* 234.

86. *R. Ulbricht.* Die Bestimmung der mittleren räumlichen Lichtintensität durch nur eine Messung. E. Z. 21. 595.

87. *J. Hartmann.* Bemerkungen über den Bau und die Justirung von Spektrographen. Z. I. 20. 17; 47.

88. *H. Lehmann.* Über Spektralapparate mit drehbarem Gitter. Z. I. 20. 193.

Siehe auch 79.

Planimeter.

89. —. Le planimètre Lippincott. B. S. E. 5. 126.

Siehe auch 82.

Rechenapparate.

90. *J. Carpentier.* Rapport sur la règle dactyliographique universelle de M. Bessat. B. S. E. 5. 525.

91. *F. Schuster.* Vereinfachung der Methode zur Berechnung des Messungsliniennetzes mittelst Rechenmaschine. Z. V. 29. 488.

92. *C. Lallemand.* Zweiteiliger logarithmischer Rechenschieber. Z. V. 29. 233.

Reibung.

93. *F. Blanc.* Über die Leerlaufreibung bei Induktionsmotoren. E. Z. 21. 131.

Statik.

94. *J. D. Morgan.* The efficiency of Weston pulley blocks. E. 89. 154.

Tafeln, graphische.

95. *A. Schleusinger.* Graphische Parametertafeln zur Bestimmung von $s = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta o^2} = \Delta a + p$. Z. V. 29. 561.

Wärme.

96. *E. H. Amagat.* Sur les lois des chaleurs spécifiques des fluides. B. S. E. 5. 939.

97. *J. K. Grindley.* An experimental investigation of the thermodynamical properties of superheated steam. E. 89. 291.

98. *R. Apt.* Über Erwärmung unterirdisch verlegter Kabel. E. Z. 21. 613.

99. *J. Herzog* und *C. Feldmann.* Über die Erwärmung elektrischer Leitungskabel. E. Z. 21. 783.

100. *E. Odagiri.* Navy boilers. E. 89. 623.

Siehe auch 50.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:
D. Bobylew, A. Börsch, L. Burmester, K. Doehlemann, E. Doležal, O. Fischer, A. Francke, Th. Friesendorff, K. Heun, J. Horn, F. Klein, L. Krüger, J. Kübler, W. Fr. Meyer, C. Rodenberg, R. Rothe, F. Rudio, R. Skutsch, P. Stäckel, H. E. Timerding, E. Wölffing, E. Zermelo.

Title page...

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE IN STUTTGART. UND C. RUNGE IN HANNOVER.

47. BAND. 3. u. 4. (DOPPEL-)HEFT.

MIT 27 FIGUREN IM TEXT UND 1 DOPPELTAFEL.

Ausgegeben am 27. Juni 1902.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißsenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Hannover-Kirchrode, Kaiser Wilhelmstr. 9, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 32 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPELHEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:
A. Börsch, A. Föppl, A. Francke, R. Gans, H. Grassmann, A. Grünwald, H. Heimann, K. Heun, F. Jung, L. Kann, R. Müller, M. Radaković, R. Rothe, P. Stäckel, E. Wölffing.

Die Bernoullische Wertetheorie.

Von H. E. Timerding in Strafsburg.

I.

In den ersten Anfängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der Begriff der Wahrscheinlichkeit eng verschmolzen mit einem verwandten Begriffe, der ursprünglich als Chance (mensura sortis) und später, nicht gerade glücklich als mathematische Hoffnung bezeichnet wurde. Seine Festlegung ist bei den Glücksspielen sehr einfach, und da sich auf diese die Wahrscheinlichkeitsrechnung in den ersten Zeiten ausschliefslich beschränkte, wurde zu Beginn sogar der Begriff der Wahrscheinlichkeit auf den Begriff der mathematischen Hoffnung gegründet. Denken wir uns, da ein Beispiel typisch für alle ähnlichen Fälle ist, dafs ein Unternehmer eine Lotterie veranstaltet, in der er n Lose zu dem gleichen Preise verausgabt und dafür einen einzigen Gewinn von dem Betrage G aussetzt. Beansprucht er dann für sich keinen Nutzen aus der Lotterie, so wird er für jedes einzelne Los den Betrag $\frac{1}{n}G$ einfordern, und soviel darf jeder Spieler auf sein Los wagen, ohne dem Unternehmer etwas zuzuwenden. Schliefslich wird ja ein Spieler gewinnen und die anderen werden alle verlieren, aber vor der Ziehung kann, wenn es lediglich vom Zufalle abhängt, wen das Los trifft, keiner als begünstigt gelten. Die Aussicht zu gewinnen ist für alle dieselbe, sie kann in bestimmter Weise gewertet werden und ist eben durch die Zahl

$$\frac{1}{n}G$$

gegeben. Dies ist die mathematische Hoffnung für einen Spieler, und würde derselbe nicht blofs ein, sondern m Lose genommen haben, so wäre sie

$$\frac{m}{n}G.$$

Der Faktor $w = \frac{m}{n}$, mit dem in diesem Ausdrucke der Gewinn G multipliziert erscheint, ist ein echter Bruch, der nur dann der Einheit

gleich wird, wenn der Gewinn vollkommen sicher, und gleich Null ist, wenn der Gewinn unmöglich. Je gröfser er ist, um so näher kommt die Aussicht auf diesen Gewinn der Gewifsheit, und deshalb ist dieser Bruch als die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes bezeichnet worden, obwohl der landläufige Sprachgebrauch dieses Wort nur dann rechtfertigt, wenn der Bruch w von der Einheit nicht sehr abweicht. Nachdem die Lehre von der Wahrscheinlichkeit weiter entwickelt war, hat man umgekehrt den Begriff der mathematischen Hoffnung aus dem Begriff der Wahrscheinlichkeit abgeleitet und als das Produkt aus einem zu erhoffenden Gewinne und der Wahrscheinlichkeit, mit der er zu erwarten steht, definiert. Entsprechend ist der Begriff der mathematischen Befürchtung, der sich auf einen möglichen Verlust bezieht, festgelegt worden.

Ist so der Begriff der mathematischen Hoffnung vorläufig nur für die Glücksspiele bestimmt, bei denen sich die Chancen der einzelnen Spieler genau gegen einander abwägen lassen, so läfst sich für seine Erweiterung gewifs geltend machen, dafs so gut wie diese Spielgewinne alle künftigen Einnahmen mehr oder weniger ungewifs sind. Aber wir haben deswegen doch fast in keinem einzigen Falle eine genaue Schätzung dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieselben zu erwarten sind, ja wir können nicht einmal sagen, ob wir ihnen überhaupt eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuschreiben dürfen. Es will uns vielmehr scheinen, als ob dieser Begriff der Wahrscheinlichkeit für alle jene Fälle des wirklichen Lebens seine Bedeutung verliert, und wenn wir ein künftiges Ereignis als mehr oder minder wahrscheinlich bezeichnen, so ist dies der Ausdruck eines subjektiven Ermessens und von der objektiven zahlenmäfsigen Festlegung nach einer bestimmten Methode durchaus verschieden. Es ist nun interessant, dafs, wenn auch nicht die Ansicht einer einzelnen Person, doch von einer gröfseren Menge die Durchschnittsansicht betreffs Sicherheit oder Unsicherheit eines künftigen Gewinnes in gewissen Fällen sich aus ihrer vagen Verschwommenheit zu einer genauen Fixierung des vermeintlichen Grades der Sicherheit oder Unsicherheit verdichten kann, sofern sich diese Ansicht nämlich in dem Kurse der Wertpapiere, die eine in Aussicht gestellte bestimmte Zahlung repräsentieren, kundgiebt. Zu jeder Zeit läfst sich ein gewisser Zinsfufs, der in Prozenten z_0 betrage, als Zinsfufs der vollkommen sicheren Kapitalanlagen ziemlich genau feststellen. Es habe nun ein Papier, das einen bestimmten anderen Zinsfufs z liefert oder verspricht, zu einer gewissen Zeit den Kurs c, indem die durch das Papier nominell vorgestellte Summe s in Wirklichkeit zu dem Betrage cs gewertet wird. Hierdurch wird dann ausgedrückt, dafs

die z Prozent der Summe s nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit w fortdauernd zu erwarten und infolge dessen nur ebensoviel wert sind wie die sicher zur Auszahlung gelangenden z_0 Prozent der Summe cs. Es wird also sein müssen

$$w \cdot z = c \cdot z_0,$$

und mithin ist

$$w = c \cdot \frac{z_0}{z},$$

so dafs die Sicherheit eines Papieres dem Kurse direkt, dem versprochenen Zinsfufse umgekehrt proportional wäre, wie es auch glaubhaft scheint. Da w nicht gröfser als 1 sein kann, so mufs immer $z > cz_0$ sein. Dies leuchtet aus der Natur der Sache ein, denn wäre $z < cz_0$, so wäre die sichere Anlage des zum Ankauf des Papieres verwendeten Kapitals auf jeden Fall vorzuziehen, indem der Zinsertrag gröfser wird als er überhaupt durch das Papier, noch dazu mit einer gewissen Unsicherheit, in Aussicht gestellt wird.

Man hat es hier aber mit einer ganz rohen Schätzung der Sicherheit einer Kapitalanlage zu thun, denn nicht blofs sind die Befürchtungen und Erwartungen, welche den Kurs bestimmen, äufserst schwankend und unsicher, es ist auch eine solche Einführung des Begriffes der Wahrscheinlichkeit von mathematischer Strenge und Genauigkeit weit entfernt. Man nimmt nämlich die Auszahlungen aller Jahre als gleich wahrscheinlich an, während doch der Zinsbezug an einem näher gelegenen Termine gegenüber den späteren Bezügen eine gröfsere Wahrscheinlichkeit für sich hat. Es giebt nun aber andere, einmalige oder wiederholte, Zahlungen, deren Wahrscheinlichkeit in gewissem Sinne sich aus statistischen Erhebungen empirisch festlegen läfst. Hierzu gehören die wichtigsten Arten der Versicherung und vor allem die sogenannte Lebensversicherung in ihren verschiedenen Formen. Fassen wir, um ein Beispiel zu haben, eine jährliche Leibrente von dem Betrage s ins Auge, so wird der Wert derselben für eine Person des Alters a dadurch fixiert, dafs man unter der Voraussetzung einer unverändert bleibenden Sterblichkeit aus den Sterblichkeitstabellen die Wahrscheinlichkeit $\lambda_{a,x}$ dafür zu ermitteln sucht, dafs diese Person nach x Jahren noch lebt. w sei das höchste vorkommende Alter. Nimmt man ferner an, dafs ein Kapital s_0 durch Zinsbildung in x Jahren zu $s_0 \cdot e^{kx}$ anwächst, dann ist der gesuchte Ankaufswert der Leibrente

$$s \cdot R_a = \sum_{x=1}^{w-a} \lambda_{a,x} s e^{-kx}.$$

Dies wäre also der Betrag, zu dem die a Jahre alte Person die Leib-

rente unter ihren Aktiven in Rechnung stellen dürfte. Es hat aber schon Condorcet[1]) darauf aufmerksam gemacht, dafs der Wert einer solchen von allerhand Zufällen abhängenden Zahlung mit einem sicheren Besitz keineswegs, auch nicht bei entsprechender Reduktion, zu identifizieren ist. Ein Gläubiger wird eine bestimmte Forderung durchaus nicht immer durch eine an das Leben des Schuldners geknüpfte Leibrente, deren Ankaufswert der Höhe dieser Forderung entsprechen würde, ablösen lassen, indem er sich sagt, dafs, wenn sein Schuldner in der allernächsten Zeit stirbt, er der ganzen geschuldeten Summe verlustig gehen würde, und dieser Verlust für ihn durch die Möglichkeit, bei langem Leben des Schuldners mehr zu erhalten, als er zu beanspruchen hat, nicht aufgewogen wird. Ein solcher Ausgleich würde erst eintreten, wenn der Gläubiger von einer grofsen Anzahl Schuldner auf die gleiche Weise entschädigt würde, und demgemäfs setzen die Versicherungsgesellschaften die Prämieneinnahmen, die eine solche, von der Lebensdauer der Versicherten abhängige Einnahme repräsentieren, wie einen festen jährlichen Bezug in Rechnung. Die mathematische Hoffnung, meint Condorcet, stellt einen Durchschnittswert dar, der erst dann eine bestimmte Bedeutung erlangt, wenn von einem Durchschnitte die Rede sein kann, nämlich dann, wenn bei genügender Häufung der Einzelfälle die Abweichung von dem in Rechnung gestellten Gesamtbetrage voraussichtlich einen gewissen kleinen Bruchteil des letzteren nicht überschreiten wird.

II.

Wenn nun die mathematische Hoffnung einen Durchschnittswert darstellt, der sich erst bei sehr häufiger Wiederholung desselben gewinnbringenden Ereignisses ergiebt, so frägt es sich, wie in einem einzelnen Falle die Aussicht einer Person auf einen gewissen Gewinn zu werten ist. Handelt es sich lediglich darum, zu entscheiden, ob die Person für eine bestimmte Gewinnaussicht den richtigen Preis gezahlt hat, ob sie beispielsweise ein Lotterielos oder eine Versicherung nicht zu teuer erkauft hat, so kann hierfür nur die mathematische Hoffnung den richtigen Mafsstab abgeben. Etwas ganz anderes ist es aber, wenn es sich, wie Daniel Bernoulli sagt, nicht um ein Urteil, sondern um einen Rat handelt, wenn die Frage lautet, ob für die betreffende Person nach Mafsgabe ihrer besonderen Verhältnisse die eine oder andere Möglichkeit eines Gewinnes die günstigere ist. Die Gesamtheit

1) Réflexions sur la règle générale etc. Histoire de l'Académie de Paris, Année 1781.

aller besonderen Verhältnisse einer Person läſst sich nicht in Rechnung ziehen, es giebt für dieselben nur einen zahlmäſsigen Ausdruck, nämlich das Vermögen, und wenigstens dieses kann man zu berücksichtigen suchen. Dies hat zuerst D. Bernoulli gethan, und er hat der achtzig Jahre vorher erschienenen Schrift von Huyghens De Ratiociniis in Ludo Aleae, in der die Lehre von der mathematischen Hoffnung entwickelt ist, eine Theoria nova de mensura sortis[1]) gegenübergestellt, diese giebt statt der objektiven diejenige subjektive Wertung einer bestimmten Gewinnaussicht, für welche später die Bezeichnung als moralische Hoffnung allgemein üblich geworden ist. Bernoulli geht aus von dem Gedanken, auf den auch Buffon[2]) unabhängig von ihm gekommen sein will, daſs eine bestimmte Ausgabe oder Einnahme von jemandem um so weniger empfunden wird, je mehr er besitzt, und macht demgemäſs folgenden Ansatz. Ist dv der Wert, den eine kleine Geldsumme dx für eine Person mit dem Vermögen x besitzt, so wird

$$dv = k\frac{dx}{x}$$

gesetzt, also dem Vermögen umgekehrt proportional. Gewinne sind hierbei positiv, Verluste negativ zu rechnen, wenn der Wert dv sich auf eine Vermögensänderung vom absoluten Betrage dx beziehen soll. Ein positives dv bedeutet demgemäſs einen Vorteil, ein negatives einen Nachteil.

Wollte man einen analogen Ansatz nun auch für eine beliebige endliche Zunahme z des Vermögens x machen, so würde man den Wert v dieser Zunahme folgendermaſsen auszudrücken haben:

$$v = k\frac{z}{x+z},$$

indem man ihn der Zunahme z direkt, dem Vermögen hingegen, das sich mit Hinzurechnung dieser Zunahme ergiebt, umgekehrt proportional setzt. Denkt man sich nun aber die ganze Zunahme z in zwei Teile z_1 und z_2 zerlegt und sind v_1 und v_2 die Werte dieser Teilgewinne, so müſste

$$v = v_1 + v_2$$

sein. Andererseits ist aber

$$v_1 = \frac{z_1}{x+z_1}, \quad v_2 = \frac{z_2}{x+z_1+z_2},$$

1) Commentarii Academiae Petropolitanae, Vol. V. 1738. Deutsch mit Anmerkungen hrsg. von A. Pringsheim 1896.

2) Essai d'Arithmétique Morale.

indem man annimmt, daſs erst die Summe z_1 und dann die Summe z_2 vereinnahmt wird. Da nun

$$v = \frac{z}{x+z} = \frac{z_1}{x+z_1+z_2} + \frac{z_2}{x+z_1+z_2},$$

mithin

$$v < \frac{z_1}{x+z_1} + \frac{z_2}{x+z_1+z_2}$$

ist, müſste notwendig

$$v < v_1 + v_2$$

sein, was mit der vorigen Gleichung in Widerspruch steht. In der That kann der Wert einer Einnahme nicht dadurch erhöht werden, daſs man sich die Geldsumme statt in Zwanzigmarkstücken in einzelnen Pfennigen auszahlen läſst. Der Bernoullische Ansatz gilt also notwendigerweise nur für sehr kleine Gewinne oder Verluste, welche das Vermögen der betreffenden Person nicht merkbar verändern, und der Wert v einer beträchtlicheren Vermögensänderung z kann nur so gefunden werden, daſs man diese Vermögensänderung in sehr viele, sehr kleine Teile $d\zeta$ zerlegt und die Werte dieser einzelnen Teiländerungen addiert. Man wird mit anderen Worten zu einer Integration geführt, und zwar ergiebt sich

$$v = \int_x^{x+z} k \frac{d\zeta}{\zeta}$$

oder

$$v = k \log \frac{x+z}{x}.$$

Es scheint sehr überflüssig, über alles das viel Worte zu machen. Indessen ist teils durch Nachlässigkeit, teils durch Irrtum die Meinung entstanden, als ob auſser der Bernoullischen noch eine andere, verwandte Wertung der Vermögensänderungen existierte, die auf den oben angegebenen, unmittelbaren Ansatz für endliche Änderungen hinausläuft.

Diese Ansicht läſst sich bis auf eine allerdings sehr flüchtige Bemerkung Buffons zurückverfolgen, die in das bekannte Lehrbuch von Lacroix[1]) übergegangen ist. Genauer formuliert haben sie fast gleichzeitig Fries[2]) und Oettinger.[3]) Beide kommen daneben auch

1) Traité élémentaire du calcul des probabilités. 1806 u. ö.

2) Versuch einer Kritik der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1842.

3) Die Wahrscheinlichkeitslehre. 1852. Auch im 36. Bande des Journals für Mathematik. Es ist zu beachten, daſs Oettinger, wie Lacroix, für einen Verlust einen anderen Ansatz macht als für einen Gewinn, indem er seine Empfindlichkeit dem *vorherigen* Vermögen umgekehrt proportional setzt.

auf das Bernoullische Verfahren zu sprechen, Fries allerdings nur, um diese ganze Lehre von der moralischen Hoffnung als unhaltbar zu verwerfen. Er sowohl wie Oettinger scheint aber eigentümlicherweise zu glauben, die Anwendung der Buffonschen oder Bernoullischen Methode hänge davon ab, ob die Änderung des Vermögens plötzlich oder allmählich erfolge. Nach diesen Vorgängern hat ein neuerer, sehr angesehener Autor über die Wahrscheinlichkeitsrechnung den Buffonschen Ansatz vor dem Bernoullischen als den einfacheren und naturgemäfseren empfohlen.

Den Widerspruch, den wir oben in dieser Annahme fanden, indem sich nach ihr der Wert eines Gewinnes um so gröfser ergiebt, in je zahlreicheren und je kleineren Raten er ausgezahlt wird, kann man nun versuchen dadurch zu heben, dafs man den Bruch

$$\frac{z}{x+z}$$

in dem Buffonschen Ansatze nicht als unmittelbaren Ausdruck des subjektiven Wertes ansieht, sondern nur als eine Gröfse, aus welcher derselbe sich ergiebt. Noch allgemeiner kann man für den subjektiven Wert einer bestimmten Einnahme zunächst nur die Voraussetzung einführen, dafs er durch den Betrag des Vermögens vor und nach dieser Einnahme gegeben wird, ihn also in der allgemeinen Form annehmen

$$v = f(x+z,\ x),$$

indem f eine noch unbekannte Funktion der beiden eingeklammerten Gröfsen bedeutet. Zur Festlegung dieser Funktion *kann* man die weitere Annahme benutzen, dafs eine bestimmte Summe z für eine Person, deren Vermögen x beträgt, ebensoviel wert sein soll, wie die Summe rz für eine andere Person, deren Vermögen rx ist. Es mufs dann die identische Relation bestehen

$$f(r(x+z),\ rx) = f(x+z,\ x).$$

Aus derselben folgt aber, indem man $r = \frac{1}{x}$ voraussetzt,

$$f(x+z,\ x) = f\left(\frac{x+z}{x},\ 1\right).$$

Das $f(x+z,\ x)$ ist demnach eine Funktion der einen Gröfse

$$\frac{x+z}{x}.$$

Dieser Bruch reicht also in der That unter der gemachten Annahme zur Festlegung des subjektiven Wertes aus und kann als die charakteristische Zahl für diesen Wert bezeichnet werden.

Zerlegt man nun die Summe z in zwei Teile z_1 und z_2, so wird die charakteristische Zahl für den Wert dieser Summe

$$\frac{x+z}{x} = \frac{x+z_1}{x} \cdot \frac{x+z_1+z_2}{x+z_1},$$

man findet sie also aus den charakteristischen Zahlen für die beiden Teile durch Multipkkation. Da aber der Wert der ganzen Summe selbst sich aus den Werten der Teile durch Addition ergeben mufs, so wird man von den charakteristischen Zahlen zu den Werten selbst übergehen, indem man von ihnen den Logarithmus nimmt und diesen noch mit einer konstanten Zahl k multipliziert, welche die von vorneherein willkürlich bleibende Werteinheit bestimmt, indem diese Werteinheit dann der charakteristischen Zahl

$$\frac{x+z}{x} = e^k$$

entspricht.

So gelangt man wieder zu der Bernoullischen Annahme, dafs der subjektive Wert v einer Summe z für eine Person, deren Vermögen ohne diese Summe x ist, durch die Gleichung

$$v = k \log \frac{x+z}{x}$$

bestimmt wird. Hieraus ergiebt sich dann leicht der Wert einer ungewissen Vermögensänderung, wenn deren Wahrscheinlichkeit w bekannt ist. Man mufs nur die einfache Hypothese zu Hülfe ziehen, dafs eine Änderung in dem Vermögen mehrerer Personen für diese zusammengenommen denselben Wert besitzt, als wenn man die Werte, welche die Änderungen im Vermögen der einzelnen Personen für diese getrennt besitzen, zusammenfügt. Ist nun $w = \frac{m}{n}$ die Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Gewinnes z, so denke man sich wieder n Personen, die alle dieselbe Aussicht auf einen solchen Gewinn haben. Man denke sich nämlich an die n Personen n Lose verteilt, dann liegt die Sache genau so, als ob m unter diesen n Personen den Gewinn z sicher, die übrigen hingegen nichts zu erwarten hätten. Die moralische Hoffnung der n Personen zusammen ist demnach, wenn alle das gleiche Vermögen x besitzen,

$$m \cdot k \log \frac{x+z}{x}.$$

Da andererseits die Gewinnaussicht für alle Personen dieselbe ist und sie demgemäfs, infolge der Gleichheit ihres Vermögens, auch alle dieselbe moralische Hoffnung E haben, so mufs der soeben angeschriebene Ausdruck auch

$$= n \cdot E$$

sein, woraus

$$E = w \cdot k \log \frac{x+z}{x} = w \cdot v$$

folgt, oder auch

$$E = k \cdot \log \left(\frac{x+z}{x}\right)^w,$$

so daſs

$$\left(\frac{x+z}{x}\right)^w$$

als die charakteristische Zahl für den Wert des ungewissen Gewinnes anzusehen ist. Dieser Gewinn ist einem Gewinne z', welchem die Wahrscheinlichkeit w' zukommt, vorzuziehen, wenn

$$\left(\frac{x+z}{x}\right)^w > \left(\frac{x+z'}{x}\right)^{w'}$$

ist, weil dann auch

$$w \cdot k \log \frac{x+z}{x} > w' \cdot k \log \frac{x+z'}{x}$$

wird. Umgekehrt ist ein Verlust $-z$, der die Wahrscheinlichkeit w besitzt, einem Verluste $-z'$ von der Wahrscheinlichkeit w' vorzuziehen, wenn

$$\left(\frac{x-z}{x}\right)^w > \left(\frac{x-z'}{x}\right)^{w'}.$$

Eine charakteristische Zahl, die > 1, bedeutet einen Vorteil, eine Zahl < 1 einen Nachteil.

Nach diesen Prinzipien lassen sich in einer Reihe von Fällen Vorteil und Nachteil beurteilen und so einige interessante Folgerungen aus dem Bernoullischen Ansatze ziehen. Zum Teile rühren dieselben schon von Bernoulli selbst her, mit gröſserer Ausführlichkeit und Strenge hat sie Laplace gegeben.[1]) Die Hülfsmittel, deren er sich bedient, sind aber so verwickelt und schwierig, daſs es geboten scheint, diese Sätze auch in einfacherer Weise auf Grund ganz elementarer Formeln herzuleiten.[2])

III.

Wir gehen aus von der Ungleichung:

$$\left(1 + \frac{u}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{u}{m+1}\right)^{m+1}, \qquad u \text{ positiv,}$$

deren Richtigkeit leicht nachzuweisen ist, indem man die Potenzen auf der linken und rechten Seite nach dem binomischen Lehrsatze ent-

1) Théorie analytique des Probabilités. Chapitre X.

2) Eine Vereinfachung der Laplaceschen Beweismethoden hat schon Crofton in dem Artikel Probability der Encyclopaedia Britannica gegeben.

wickelt und in den beiden Entwickelungen die Glieder vergleicht, die gleich weit vom ersten entfernt sind. Die rechte Seite enthält ein Glied mehr als die linke Seite, welches die Ungleichheit noch verstärkt, wenn nachgewiesen ist, daſs jedes Glied auf der linken Seite kleiner ist als das ebensovielte Glied auf der rechten Seite. Nun ist allgemein das μte Glied der linken Seite

$$\frac{m\cdot(m-1)\cdots(m-\mu+1)}{1\cdot 2\cdots\mu}\,\frac{z^\mu}{m^\mu}$$

und das μte Glied der rechten Seite

$$\frac{(m+1)\cdot m\cdots(m-\mu+2)}{1\cdot 2\cdots\mu}\,\frac{z^\mu}{(m+1)^\mu}.$$

Soll jenes also kleiner als dieses sein, so muſs

$$(m+1)^{\mu-1} < m^\mu(m-\mu+1)$$

oder

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\mu-1} < m(m-\mu+1)$$

sein. Nun ist jedenfalls $\mu < m+1$, die vorstehende Ungleichung wird also sicher allgemein erfüllt sein, wenn

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < m$$

ist, denn indem man von dieser zu der vorigen Ungleichung übergeht, verkleinert man die linke Seite und vergröſsert man die rechte Seite. Die neue Ungleichung ist aber deswegen immer erfüllt, weil auf ihrer linken Seite die Summe von m Gröſsen steht, die alle kleiner als Eins sind, bis auf die erste, die $=1$ ist. Die somit nachgewiesene Ungleichung

$$\left(1+\frac{u}{m}\right)^m < \left(1+\frac{u}{m+1}\right)^{m+1}$$

zieht sofort die allgemeine nach sich

(1) $$\left(1+\frac{u}{m}\right)^m < \left(1+\frac{u}{n}\right)^n,$$

wenn

$$m < n.$$

Setzt man $u = mnt$ und nimmt von der linken und rechten Seite dieser Ungleichung die mnte Wurzel, so findet man

(2) $$(1+nt)^{\frac{1}{n}} < (1+mt)^{\frac{1}{m}} \quad (m < n).$$

Schreibt man ferner die selbstverständliche Ungleichung

$$(1-mt)(1+mt) < 1$$

in der Form

$$(1-mt)^{\frac{1}{m}}(1+mt)^{\frac{1}{m}} < 1,$$

so kann man, indem immer $m < n$ sein soll, an die Stelle von $(1+mt)^{\frac{1}{m}}$ den kleineren Wert $(1+nt)^{\frac{1}{n}}$ setzen und erhält so:

(3) $$(1-mt)^{\frac{1}{m}}(1+nt)^{\frac{1}{n}} < 1 \qquad (m<n).$$

Der Ungleichung (1) läfst sich die Gestalt geben

$$\left(\frac{m+u}{m}\right)^m < \left(\frac{n+u}{n}\right)^n$$

oder

$$\left(\frac{m}{m+u}\right)^m < \left(\frac{n}{n+u}\right)^n.$$

Hierfür kann man weiter, indem man die linke und die rechte Seite in die $l$te Potenz erhebt, setzen:

$$\left(\frac{lm}{l(m+u)}\right)^{lm} < \left(\frac{ln}{l(n+u)}\right)^{ln}.$$

Nun schreibe man

$$m \text{ für } l(m+u), \quad n \text{ für } l(n+u), \quad u \text{ für } lu,$$

so wird

$$\left(\frac{m-u}{m}\right)^m > \left(\frac{n-u}{n}\right)^n$$

oder

(4) $$\left(1-\frac{u}{m}\right)^m < \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \qquad (m<n).$$

Hieraus ergiebt sich, analog wie (2) und (3) aus (1) folgte:

(5) $$(1-nt)^{\frac{1}{n}} < (1-mt)^{\frac{1}{m}} \qquad (m<n).$$

und

(6) $$(1+mt)^{\frac{1}{m}}(1-nt)^{\frac{1}{n}} < 1 \qquad (m<n).$$

Aus diesen Ungleichungen lassen sich die Laplaceschen Sätze mit Leichtigkeit beweisen.

1. *Der Vorteil eines möglichen Gewinnes wiegt niemals den Nachteil eines gleich grofsen und gleich wahrscheinlichen Verlustes auf.*

Ist nämlich x das Vermögen der betreffenden Person, z der Gewinn oder Verlust, w seine Wahrscheinlichkeit, so ist die charakteristische Zahl für den subjektiven Wert des ersteren

$$\left(1+\frac{z}{x}\right)^w$$

und für den Wert des letzteren

$$\left(1-\frac{z}{x}\right)^w.$$

Das Produkt dieser beiden Ausdrücke ist aber immer < 1, denn es ist

$$\left(1 + \frac{z}{x}\right)\left(1 - \frac{z}{x}\right) < 1.$$

2. *Jedes reine Glücksspiel zwischen zwei Spielern ist, wenn es nach den Regeln der Billigkeit geordnet ist, für beide Spieler nachteilig, indem ihr möglicher Gewinn ihren möglichen Verlust niemals aufwiegt.*

Ist nämlich x das Vermögen irgend eines der beiden Spieler, z die Summe, die er von dem anderen erhält, wenn er gewinnt, z' die Summe, die er zu zahlen hat, wenn er verliert, w die Wahrscheinlichkeit für den ersteren, w' diejenige für den letzteren Ausgang, so mufs nach den Regeln der Billigkeit

$$wz = w'z',$$

also weil $w + w' = 1$:

$$w = \frac{z'}{z + z'}, \quad w' = \frac{z}{z + z'}$$

sein. Der subjektive Wert des Spieles wird für diesen Spieler durch die charakteristische Zahl

$$\left(1 + \frac{z}{x}\right)^{w}\left(1 - \frac{z'}{x}\right)^{w'}$$

bestimmt. Diese Zahl ist < 1, wenn es die Zahl

$$\left(1 + \frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{rz}}\left(1 - \frac{z'}{x}\right)^{\frac{1}{rz'}}$$

ist. Wählen wir in diesem Ausdrucke den willkürlichen Wert r so, dafs rz und rz' ganze Zahlen werden, so gelangen wir für $\frac{1}{rx} = t$ zu der Ungleichung (3) oder (6), jenachdem

$$rz = n, \quad rz' = m \quad \text{oder} \quad rz = m, \quad rz' = n$$

gesetzt wird, was davon abhängt, ob $z > z'$ oder $z < z'$ ist. In beiden Fällen ist der angeschriebene Ausdruck < 1, und da sonach die charakteristische Zahl für den Wert des Spieles immer < 1 ist, bedeutet das Spiel für den Spieler stets einen Nachteil.

3. *Jedes Spiel, nach welchen Regeln es auch geordnet sein mag, ist wenigstens für einen Spieler nachteilig.*

Nehmen wir der Einfachheit halber nur zwei Spieler an, sind z und z' wieder die Gewinne, w und w' ihre Wahrscheinlichkeiten, dann mufs, wenn das Spiel für den ersten Spieler, dessen Vermögen x sei, nicht nachteilig sein soll,

$$\left(1 + \frac{z}{x}\right)^{w}\left(1 - \frac{z'}{x}\right)^{w'} \geqq 1$$

sein. Daraus folgt nach dem Vorigen aber, daſs

$$wz > w'z'$$

ist. Soll nun das Spiel auch für den zweiten Spieler, dessen Vermögen y sei, nicht nachteilig sein, so müſste auch

$$\left(1+\frac{z'}{y}\right)^{w'}\left(1-\frac{z}{y}\right)^{w} \geqq 1$$

sein, und daraus würde sich

$$w'z' > wz$$

ergeben, was nach der vorhergehenden Ungleichung unmöglich ist.

Wenigstens bei einem der beiden möglichen Ausgänge des Spieles wiegt der Gewinn des einen Spielers den Verlust des anderen nicht auf. Ist nämlich

$$\left(1-\frac{z'}{x}\right)^{w'}\left(1+\frac{z'}{y}\right)^{w'} \geqq 1,$$

damit, wenn der erste Spieler verliert, sein Verlust durch den Gewinn des anderen aufgehoben werde, so ist notwendig $x > y$, der erste Spieler hat also das gröſsere Vermögen. Dann läſst sich aber die Ungleichung

$$\left(1+\frac{z}{x}\right)^{w}\left(1+\frac{z}{y}\right)^{w} \geqq 1$$

nicht erfüllen, da aus ihr $y > x$ folgen würde. Wenn der Reichere gewinnt, so wiegt sein Gewinn den Verlust des Ärmeren niemals auf.

4. *Unter allen möglichen Gewinnen, welche denselben objektiven Wert besitzen, ist immer dem subjektiven Werte nach der sicherste den anderen vorzuziehen, obwohl sein Betrag am kleinsten ist, und ebenso ist unter allen möglichen Verlusten von demselben objektiven Werte derjenige am ehesten zu ertragen, dessen Betrag am geringsten ist, wenn auch seine Wahrscheinlichkeit die gröſste ist.*

Ist x das Vermögen der betreffenden Person, z und z' zwei mögliche Gewinne, w und w' ihre Wahrscheinlichkeiten und $wz = w'z$, so ist der Gewinn z vorzuziehen, wenn

$$\left(1+\frac{z}{x}\right)^{w} > \left(1+\frac{z'}{x}\right)^{w'}$$

oder

$$\left(1+\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{z}} > \left(1+\frac{z'}{x}\right)^{\frac{1}{z'}}.$$

Diese Ungleichung ist nach (2) immer erfüllt, wenn $z < z'$, woraus dann $w > w'$ folgt. Die linke Seite überwiegt um so mehr die rechte Seite, je gröſser z' ist. z nimmt den kleinstmöglichen Wert an,

wenn $w = 1$ wird. Man kann dann für z auch einen um einen ziemlich beträchtlichen Bruchteil σ erhöhten Wert $(1 + \sigma)z$ setzen, es wird trotzdem

$$1 + \frac{(1+\sigma)z}{x} > \left(1 + \frac{z'}{x}\right)^{w'}$$

bleiben. Hierin liegt die Begründung für den folgenden Satz:

5. *Eine Versicherung ist um so mehr angebracht, je weniger wahrscheinlich, aber auch je empfindlicher der versicherte Verlust für die betreffende Person sein würde.*

6. *Will ein Kaufmann eine bestimmte Menge Waren über See schicken, so ist es für ihn vorteilhafter, diese Waren auf zwei gleich seetüchtige Schiffe zu verteilen, als sie einem einzigen Schiffe anzuvertrauen.*

Ist nämlich w die Wahrscheinlichkeit, dafs das Schiff den Bestimmungsort erreicht, x das Vermögen des Kaufmannes ohne die Waren, u deren Gesamtwert, so ist für den subjektiven Wert derselben, wenn sie auf ein Schiff geladen sind, die charakteristische Zahl

$$\left(1 + \frac{u}{x}\right)^{w}.$$

Sind sie aber in zwei Teilen z und t auf zwei Schiffe verteilt, so wird für ihren Wert die charakteristische Zahl

$$\left(1 + \frac{z+t}{x}\right)^{ww} \left\{\left(1 + \frac{z}{x}\right)\left(1 + \frac{t}{x}\right)\right\}^{w(1-w)}.$$

Der erste Faktor dieses Produktes entspricht dem Falle, dafs beide Schiffe den Hafen erreichen, wofür w^2 die Wahrscheinlichkeit ist, der zweite Faktor dem Falle, dafs nur das eine oder andere Schiff anlangt, wofür die Wahrscheinlichkeit beidemal $w(1 - w)$. Es ist nun leicht zu zeigen, dafs

$$\left(1 + \frac{z+t}{x}\right)^{ww} \left\{\left(1 + \frac{z}{x}\right)\left(1 + \frac{t}{x}\right)\right\}^{w(1-w)} > \left(1 + \frac{z+t}{x}\right)^{w}.$$

Denn es ist

$$\left\{\left(1 + \frac{z}{x}\right)\left(1 + \frac{t}{x}\right)\right\}^{w(1-w)} > \left(1 + \frac{z+t}{x}\right)^{w(1-w)},$$

weil

$$\left(1 + \frac{z}{x}\right)\left(1 + \frac{t}{x}\right) > 1 + \frac{z+t}{x}.$$

IV.

Der erste und nächstliegende Einwand, der sich gegen den Bernoullischen Ansatz erhebt, ist der, dafs sich keine hinreichende Begründung für die Annahme finden läfst, es sei der Wert eines sehr

kleinen Gewinnes oder Verlustes dem Vermögen proportional, auf das er sich bezieht. Es ist nur die einfachste Annahme, die man machen kann, um der Ansicht gerecht zu werden, daſs ein Gewinn oder Verlust um so weniger empfunden wird, je gröſser das Vermögen ist, das von ihm betroffen wird.

Eine Schwierigkeit, zu der schon der bloſse Begriff Vermögen Anlaſs giebt, hat Bernoulli bereits hervorgehoben. Ein Bettler, der nur von den ihm gereichten Gaben lebt, wird sich nicht gegen eine mäſsige Geldsumme dazu verstehen, das Betteln aufzugeben, und ein Mensch, der sich nur von geliehenem Gelde erhält, wird nicht darauf eingehen, wenn ihm seine Schulden bezahlt und überdies ein kleiner Baarbetrag verabreicht werden soll unter der Bedingung, daſs er keine neuen Schulden macht. Und doch besitzt der Bettler nichts und der Schuldenmacher, wie Bernoulli sagt, noch weniger als nichts. Die Existenzfähigkeit eines jeden Individuums ist aber nach dem Einkommen zu bemessen, welches es genieſst, gleichgültig aus welcher Quelle dieses Einkommen flieſst, wenn nur kein baldiges Versiegen der Quelle droht. So erfreut sich auch der Bettler einer gewissen ständigen Einnahme und der Schuldenmacher glaubt wenigstens, wenn auch an immer anderen Orten, sein Leben noch geraume Zeit in der gleichen Weise fortsetzen zu können. Es muſs demnach auch ein Gewinn oder Verlust in Verhältnis zu dem Einkommen gesetzt werden, indem er sich durch eine Vermehrung oder Schmälerung desselben bemerkbar macht. Ob man Gewinn und Verlust im Verhältnis zu einem oder mehreren Jahreseinkommen oder auch im Verhältnis zu dem Kapital rechnet, dessen Zinsen gerade dieses Einkommen repräsentieren würden, ist für die Vergleichung des Wertes, den eine bestimmte Summe für verschiedene Personen besitzt, gleichgültig, wenn nur die Rechnung für alle diese Personen in der gleichen Weise erfolgt, denn die Zinsen sind dem Kapital, das sie trägt, im allgemeinen proportional. Wesentlich ist nur, daſs man zum Maſsstabe des Vermögens das Einkommen lediglich dann macht, wenn es ein sicheres ist, das heiſst der Voraussicht nach auf absehbare Zeit andauert. Es ist aber dabei nicht zu verkennen, daſs ein Einkommen verschieden gewertet werden muſs, jenachdem es aus den Zinsen eines Vermögens oder von der Erwerbsthätigkeit einer Person herrührt. Das Kapital ist beliebig verwendbar und übertragbar und verzinst sich auf unbegrenzte Zeit, die Erwerbsfähigkeit einer Person aber hat ihre bestimmte Grenze und ist beständig durch Krankheit oder Tod bedroht. Diesem Umstande muſs wenigstens dadurch Rechnung getragen werden, daſs man an Stelle des jährlichen, erworbenen Einkommens den Baarwert einer gleich groſsen Leibrente

dem zinstragenden Kapitale gegenüberstellt oder dafs man umgekehrt an die Stelle des letzteren den Betrag der Leibrente setzt, welche die betreffende Person dafür erkaufen könnte.

Vergleicht man nun jährliche Einnahmen oder Ausgaben mit dem ganzen jährlichen Einkommen, so ist immer noch nicht einzusehen, warum der Wert der ersteren dem Betrage des letzteren einfach umgekehrt proportional sein soll. Plausibel ist nur, dafs der Wert des Geldes mit dem steigenden Einkommen sinkt, und es will uns scheinen, als ob für jemanden, der auch bei der üppigsten Lebensweise nicht mehr imstande ist, sein Einkommen aufzubrauchen, eine weitere Einnahme überhaupt keinen Wert mehr hat. Wenn trotzdem solche Männer darnach trachten, immer mehr Reichtümer aufzuhäufen, so thun sie es nicht, weil sie für sie einen Wert in dem Sinne der Bernoullischen Theorie, nämlich einen wirklichen Gebrauchswert haben. Man kann die blofse Freude am Besitze für den Grund halten, viel mehr ist es aber das Streben nach Macht, und dieses Streben giebt sich in den Unternehmungen der grofsen Milliardäre genugsam kund. Auf der anderen Seite leuchtet ein, dafs jemand, der gerade so viel hat, dafs er leben kann, nichts weiter zu entbehren vermag, ohne zu darben und zu Grunde zu gehen, und dafs demnach eine Ausgabe schon dann einen unendlich grofsen (negativen) Wert bekommt, wenn sie das Einkommen noch nicht völlig aufzehrt.

Was vorläufig unbedingt angenommen werden soll, ist, dafs sich überhaupt für jedes Einkommen x ein bestimmter Wert $f(x)dx$ finden läfst, welcher die relative Bedeutung einer kleinen Geldsumme dx für eine Person von diesem Einkommen angiebt. Von der Funktion $f(x)$ wissen wir dann zunächst nur, dafs sie mit steigendem x immer ab oder wenigstens niemals zunimmt, dafs sie für sehr kleine x unendlich oder wenigstens sehr grofs, für sehr grofse x dagegen Null oder wenigstens sehr klein wird.

Aus dieser Wertefunktion läfst sich, wenn sie bekannt ist, leicht der Wert einer beliebig grofsen Vermögensänderung für eine Person, deren Einkommen irgend einen Betrag x hat, berechnen. Wenn man nämlich diese Vermögensänderung z in sehr viele, sehr kleine Teile dx zerlegt, die einzeln die Werte $f(x)dx$ haben, indem x in den Intervallen dx von x bis $x + z$ anwächst, so findet man für die Vermögensänderung z den Wert

$$v = \int_{x}^{x+z} f(x)dx.$$

Bezeichnen wir nun mit $F(x)$ das Integral

$$F(x) = \int f(x)dx,$$

unbestimmt ausgeführt, das heifst von einer bestimmten, aber beliebigen unteren Grenze bis zu dem veränderlichen x erstreckt, so wird

$$v = F(x+z) - F(x),$$

und wir haben eine neue Funktion $F(x)$ gewonnen, mit deren Hülfe sich der Wert einer *beliebig grofsen* Vermögensänderung angeben läfst. Diese Funktion $F(x)$ hat dann die Eigenschaft, dafs ihre Derivierte

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

beständig ab oder wenigstens nie zunimmt. Stellen wir sie also durch eine Kurve (die Wertlinie) dar, indem wir x als Abszisse, $F(x)$ als Ordinate abtragen, so mufs diese Kurve wohl fortwährend ansteigen, ihre Steigung aber immer geringer werden.

Es sind nun zwei Fälle denkbar. Entweder wächst $F(x)$ mit zunehmendem x über alle Grenzen, oder es nähert sich einem bestimmten Maximalwerte. Das erstere würde beispielsweise aus der Bernoullischen Annahme folgen, das letztere aber ausdrücken, dafs auch das gröfste Einkommen nur einen begrenzten Wert besitzt.[1]) Da dem Wesen

1) Ein sehr einfacher Ansatz, welcher zu einer solchen Wertefunktion $F(x)$ führt, besteht darin, dafs man den Wert einer sehr kleinen Geldsumme dem Quadrate des Einkommens x, von dem man noch einen bestimmten Betrag a abziehen kann, proportional setzt. Dann wird $F(x)$ von der Form

$$F(x) = j - \frac{k}{x-a},$$

indem j, k Konstanten bezeichnen, und zwar ist j der gröfste Wert, den $F(x)$ annehmen kann und dem es sich für unendlich anwachsendes x nähert. Für $x = a$ wird es negativ unendlich. Der Wert einer bestimmten Einnahme z, die zu einem Einkommen $x = x' + a$ hinzukommt, ist nun

$$F(x+z) - F(x) = k \cdot \frac{z}{x'(x'+z)}.$$

Dies ist ein Ansatz für endliche Beträge, der ganz an den Buffonschen erinnert, der aber im Gegensatze zu diesem wirklich die Eigenschaft hat, dafs der Wert zweier nacheinander vereinnahmten Beträge dem Werte ihrer Summe gleich ist. Um eine Anwendung dieses Ansatzes zu geben, denken wir uns eine Versicherung gegen einen mit der Wahrscheinlichkeit w drohenden Verlust z und fragen nach der Prämie p, die dafür der Versicherungnehmer, wenn x sein Einkommen ist, zahlen kann, ohne nach diesem Werteansatze einen Verlust zu erleiden. Es ergiebt sich dann

$$\frac{wz}{x'(x'-z)} = \frac{p}{x'(x'-p)}.$$

der Sache nach von einem unendlich hohen Einkommen nicht die Rede sein kann, ist es eine nicht weiter zu erörternde Geschmacksache, ob man das eine oder andere annehmen will. Dagegen läfst sich der Verlauf der Wertlinie nach der Ordinatenachse hin genau feststellen. Eine Abnahme des Einkommens, die so grofs ist, dafs sie dasselbe unter das Existenzminimum hinabdrückt, bedeutet jedenfalls einen *sehr* grofsen Nachteil, und deshalb hat

$$F(e) - F(e+z),$$

wenn e das Existenzminimum bedeutet, einen sehr grofsen negativen Wert. $F(x)$ mufs daher einen sehr grofsen negativen Wert annehmen, wenn x sich dem Existenzminimum nähert, und kann schliefslich für eine positive Gröfse, die gleich oder etwas kleiner als e ist, negativ unendlich angenommen werden.

Es ist nun die Frage, ob die Sätze, die oben aus der Bernoullischen Annahme hergeleitet sind und deren Übereinstimmung mit der gesunden Vernunft zeigen sollen, nicht dazu dienen können, um die Wertefunktion $F(x)$ näher festzulegen, oder ob sie schon aus den erwähnten allgemeinen Eigenschaften dieser Funktion folgen. Es ist nicht schwer nachzuweisen, dafs dies letztere der Fall ist.

V.

Daraus, dafs die Funktion $f(x)$ niemals zunimmt, folgt, dafs in dem bestimmten Integrale

$$\int_{x_0}^{x_0+z} f(x)dx = F(x_0+z) - F(x_0)$$

der gröfste Wert, den die Funktion unter dem Integralzeichen annimmt, für die untere Grenze x_0 und der kleinste für die obere Grenze (x_0+z) stattfindet. Das Integral wird also vergröfsert, wenn man $f(x_0)$ für

---

Hieraus berechnet sich der Überschufs dieser Maximalprämie p über die Nettoprämie $p_0 = wz$, die nach dem Prinzipe der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung resultieren würde

$$p - p_0 = \frac{w(1-w)z^2}{x' - (1-w)z} = \frac{p_0(z-p_0)}{x' - z + p_0}.$$

Dieser Ausdruck ist bei konstantem p_0 um so gröfser, je gröfser z ist. Die Versicherung ist demnach um so wertvoller, je unwahrscheinlicher und bedeutender der drohende Verlust ist, und besitzt jedenfalls einen sehr grofsen Wert, wenn $x - a - z$ sehr klein ist, also der Verlust das Einkommen des Versicherten soweit aufzehren würde, dafs es zu seinem Lebensunterhalte nicht mehr ausreicht, vorausgesetzt nämlich, dafs man mit a die hierzu erforderliche oder eine noch kleinere Summe bezeichnet hat.

$f(x)$ setzt, und verkleinert, wenn man dafür $f(x_0 + z)$ setzt. Daraus folgt, indem man wieder x statt x_0 schreibt, dafs stets

(I) $$f(x) > \frac{F(x+z) - F(x)}{z} > f(x+z)$$

ist, und es ist um so mehr

$$\frac{F(x+z) - F(x)}{z} > f(x+z+t),$$

wenn t eine beliebige positive Gröfse bedeutet. So ergiebt sich aber weiter, dafs man das Integral

$$\int_x^{x+z+t} f(x)dx = \int_x^{x+z} f(x)dx + \int_0^t f(x+z+t)\,dt$$

vergröfsert, wenn man in seinem zweiten Teile

$$f(x+z+t) \text{ durch } \frac{F(x+z) - F(x)}{z}$$

ersetzt. Es wird somit

$$\int_x^{x+z+t} f(x)dx < \left(1 + \frac{t}{z}\right)\{F(x+z) - F(x)\}$$

oder

(II) $$\frac{F(x+z+t) - F(x)}{z+t} < \frac{F(x+z) - F(x)}{z}.$$

Dagegen verkleinert man das Integral

$$\int_x^{x+z+t} f(x)dx = \int_x^{x+z} f(x)dx + \int_{x+z}^{x+z+t} f(x)dx,$$

wenn man in dem ersten Teile

$$f(x) \text{ durch } \frac{F(x+z+t) - F(x+z)}{t}$$

ersetzt. So findet man

$$\int_x^{x+z+t} f(x)dx > \left(1 + \frac{z}{t}\right)\{F(x+z+t) - F(x+z)\},$$

und, indem man noch x für $x + z + t$ schreibt,

(III) $$\frac{F(x) - F(x-t-z)}{t+z} > \frac{F(x) - F(x-t)}{t}.$$

Wenn man ferner in dem Integral

$$\int_{x_0}^{x_0+z} f(x)dx$$

$f(x)$ durch $f(x-\varepsilon)$ ersetzt, so wird dasselbe vergrößert, es ist also, indem man wieder x für x_0 und x' für $x_0-\varepsilon$ schreibt, so daß

$$x > x'$$

anzunehmen ist:

$$\int_x^{x+z} f(x)\,dx < \int_{x'}^{x'+z} f(x)\,dx$$

oder

(IV) $$\frac{F(x+z)-F(x)}{z} < \frac{F(x'+z)-F(x')}{z}.$$

Macht man insbesondere

$$x' = x - z,$$

so findet man:

(V) $$\frac{F(x+z)-F(x)}{z} < \frac{F(x)-F(x-z)}{z}.$$

Diese letzte Formel läßt sich sofort dahin interpretieren, daß ein Gewinn immer weniger empfunden wird als ein gleich großer Verlust.

Ist ein Gewinn g ungewiß und w seine Wahrscheinlichkeit, so wird sein Wert durch den Ausdruck gemessen

$$w\bigl(F(x+g)-F(x)\bigr).$$

Setzt man nun in der Formel (II)

$$z + t = g, \quad z = wg,$$

indem w einen echten Bruch bezeichnet, so ergiebt sich

$$F(x+wg)-F(x) > w\{F(x+g)-F(x)\}.$$

Setzt man dagegen in der Formel (III)

$$t + z = g', \quad t = w'g',$$

so wird

$$F(x)-F(x-w'g') < w'\{F(x)-F(x-g')\}.$$

Soll also

(a) $$w\{F(x+g)-F(x)\} > w'\{F(x)-F(x-g')\}$$

sein, so muß um so mehr

$$F(x+wg)-F(x) > F(x)-F(x-w'g')$$

sein. Hieraus folgt, daß

(b) $$wg > w'g'$$

ist, denn wäre $wg = w'g'$, so würde nach (V)

$$F(x+wg)-F(x) < F(x)-F(x-w'g')$$

sein, und wäre $wg < w'g'$, so würde diese Ungleichung noch ver-

stärkt. Die Ungleichung (a) drückt aber aus, daſs, wenn zwei Spieler mit einander spielen und der erste Spieler den Gewinn g mit der Wahrscheinlichkeit w, der zweite den Gewinn g' mit der Wahrscheinlichkeit w' zu erwarten hat, das Spiel für den ersten Spieler vorteilhaft ist. Die Ungleichung (b) zeigt dann, daſs dasselbe Spiel für den zweiten Spieler notwendig nachteilig ist, denn sonst müſste aus denselben Gründen $w'g' < wg$ sein, was durch die erste Ungleichung ausgeschlossen ist.

Nehmen wir nun an, es sei

$$\text{(c)} \qquad wg = w'g', \quad w > w',$$

dann wird

$$\text{(d)} \qquad w\{F(x+g) - F(x)\} > w'\{F(x+g') - F(x)\},$$

denn wenn man entsprechend der Gleichung (c) $g = \alpha w'$, $g' = \alpha w$ setzt und die linke und rechte Seite der vorstehenden Ungleichung durch $\alpha w w'$ dividiert, so folgt

$$\frac{F(x+g) - F(x)}{g} > \frac{F(x+g') - F(x)}{g'},$$

und diese Ungleichung ist nach (II) erfüllt, wenn $g < g'$ ist, woraus $w > w'$ folgt. Die Ungleichung (d) sagt aber aus, daſs, wenn sich mit der gleichen Einlage $E = wg = w'g'$ die Anwartschaft auf zwei verschiedene Gewinne g und g', deren Wahrscheinlichkeiten w und w' sind, erkaufen läſst, diejenige Verwendung der Einlage die vorteilhafteste ist, bei welcher der Gewinn g mit der gröſseren Wahrscheinlichkeit w zu erwarten steht, wenn er auch kleiner ist als der andere Gewinn g'.

Endlich ist wiederum der Vorteil nachzuweisen, der in der Verteilung des Risikos liegt. Ist bei einem in Gefahr schwebenden Kapital u die Wahrscheinlichkeit, daſs es verloren geht, $1 - w$ und somit w die Wahrscheinlichkeit, daſs es erhalten bleibt, so ist der Wert, den es für eine Person von dem Vermögen oder Einkommen x besitzt

$$w\{F(x+u) - F(x)\}.$$

Läſst sich nun das Kapital u in zwei Teile z und t zerlegen, so daſs der Verlust des einen Teiles von dem Verluste des anderen Teiles unabhängig ist, dann ist, daſs beide Teile eingebracht werden, mit der Wahrscheinlichkeit w^2 zu erwarten, daſs ein Teil verloren geht und der andere erhalten bleibt, mit der Wahrscheinlichkeit $w(1-w)$, und der Wert, welchen das so verteilte Kapital repräsentiert, ist

$$w^2\{F(x+z+t) - F(x)\} + w(1-w)\}F(x+z) - F(x) + F(x+t) - F(x)\}$$

Es ist zu zeigen, daſs dieser Ausdruck gröſser ist als der vorige.

Nun folgt aus der Formel (IV), indem man x' durch x und x durch $x + t$ ersetzt

$$F(x + t + s) - F(x + t) < F(x + s) - F(x)$$

oder

$$F(x + s + t) - F(x) < F(x + s) - F(x) + F(x + t) - F(x).$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Ungleichung mit $w(1 - w)$, so kann man sie schreiben

$$w\{F(x + s + t) - F(x)\}$$
$$< w^2\{F(x+s+t) - F(x)\} + w(1-w)\{F(x+s) - F(x) + F(x+t) - F(x)\},$$

womit der verlangte Nachweis geliefert ist.

Werden die beiden Teile s und t noch weiter zerlegt, so wird der gesamte Wert noch weiter vergröfsert, und so fort, in je mehr und je kleinere Teile das Kapital aufgelöst wird. Man gelangt so schliefslich zu einem Grenzwerte, über den hinaus man den Wert des Kapitals auch bei noch so weit gehender Verteilung der Risiken nicht erhöhen kann. Um diesen Grenzwert festzustellen, nehme man an, das Kapital sei in eine sehr grofse Anzahl n von gleichen Teilen zerlegt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade $n - \mu$ von diesen Teilen verloren gehen

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n - \mu + 1)}{1 \cdot 2 \cdots \mu} w^{\mu} (1 - w)^{n - \mu},$$

und dieser Ausdruck wird nach dem Bernoullischen Theorem, wenn n sehr grofs ist, angenähert gleich dem folgenden:

$$e^{-ss} \frac{ds}{\sqrt{\pi}},$$

indem

$$s = \sqrt{\frac{n}{2w(1-w)}} \left(\frac{\mu}{n} - w\right), \quad ds = \frac{1}{\sqrt{2w(1-w)n}}$$

gesetzt wird. Sei ferner

$$\frac{\mu}{n} = q,$$

so wird

$$q = w + \sqrt{\frac{2w(1-w)}{n}} \cdot s,$$

und der Ausdruck für den subjektiven Wert des in sehr viele, sehr kleine Teile zerlegten Kapitals wird angenähert durch das Integral dargestellt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{F(x + qu) - F(x)\} e^{-ss} \frac{ds}{\sqrt{\pi}},$$

indem die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ für die sehr grofsen Zahlwerte

$$-\sqrt{\frac{n}{2}\cdot\frac{w}{1-w}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{n}{2}\cdot\frac{1-w}{w}}$$

genommen sind. Ist nun $F(x)$ nicht (negativ) unendlich, was der Fall wäre, wenn das Einkommen der betreffenden Person, abgesehen von dem in Gefahr schwebenden Kapital, das Existenzminimum unterschritte, so hat das vorstehende Integral immer einen endlichen angebbaren Wert. Dieser Wert ist positiv und jedenfalls kleiner als

$$F(x+u) - F(x).$$

Schreiben wir demgemäfs den Wert des Integrals in der Form

$$F(x+pu) - F(x),$$

wo p einen echten Bruch bedeutet, so wird

$$(\alpha) \qquad F(x+pu) = 2\int_0^\infty F\left(x + wu + \sqrt{\frac{2w(1-w)}{n}}\,su\right)e^{-ss}\frac{ds}{\sqrt{\pi}}.$$

Nun läfst sich eine Zahl σ so bestimmen, dafs

$$\int_\sigma^\infty F\left(x + wu + \sqrt{\frac{2w(1-w)}{n}}\,su\right)e^{-ss}\frac{ds}{\sqrt{\pi}} < \varepsilon$$

wird, indem ε eine beliebig kleine vorgegebene Gröfse bezeichnet. Wird dann das linksstehende Integral

$$= F\left(x + wu + \sqrt{\frac{2w(1-w)}{n}}\,\sigma' u\right)\int_\sigma^\infty e^{-ss}\frac{ds}{\sqrt{\pi}}$$

gesetzt, so ist σ' nur wenig gröfser als σ, und es läfst sich n so grofs wählen, dafs

$$\sqrt{\frac{2w(1-w)}{n}}\cdot\sigma' < \varepsilon'$$

wird, wenn ε' eine neue, sehr kleine Gröfse ist. Ersetzt man dann in der Gleichung (α)

$$F\left(x + wu + \sqrt{\frac{2w(1-w)}{n}}\,su\right)$$

durch den zu kleinen Wert

$$F\big(x + (w+\varepsilon')\,u\big),$$

so wird der Wert des ganzen Integrales verkleinert, es wird also, da

$$2\int_0^\infty e^{-ss}\frac{ds}{\sqrt{\pi}} = 1$$

ist, die Ungleichung bestehen

$$(\beta)\qquad F(x+pu) > F\big(x+(w+\varepsilon')\,u\big).$$

Ersetzt man andererseits

$$F\left(x+wu+\sqrt{\frac{2w(1-w)}{n}}\,su\right)$$

durch den zu grofsen Wert

$$F(x+wu),$$

so sieht man, dafs

$$(\gamma)\qquad F(x+pu) < F(x+wu)$$

ist. Der Wert

$$F(x+wu)-F(x)$$

bildet nach diesen Ungleichungen (β) und (γ) also für den Wert des in Gefahr schwebenden Kapitals eine obere Grenze, die derselbe niemals überschreiten, der er sich aber bei genügender Verteilung des Kapitals beliebig nähern kann, so dafs er einem sicheren Besitze, welcher den gleichen objektiven Wert hat, beliebig nahe gebracht werden kann.

VI.

Wie nunmehr nachgewiesen ist, ergeben sich in der That aus der Annahme einer allgemeinen Wertefunktion wieder die Laplaceschen Sätze, und es scheinen somit zur Begründung dieser Sätze nur solche Voraussetzungen herangezogen zu sein, deren Richtigkeit unmittelbar einleuchtet. Es erhebt sich indessen gegen alle derartigen Überlegungen ein Bedenken, das ihre Möglichkeit überhaupt in Frage stellt. Es handelt sich nämlich um die Berechtigung, von dem subjektiven Werte einer Geldsumme zu reden, der sich nur nach der Gröfse des Einkommens richten soll. In Wirklichkeit sind für den Unterschied, der zwischen dem Werte derselben Menge Geldes für zwei verschiedene Personen besteht, so viele und so mannigfaltige Umstände mafsgebend, dafs es unmöglich ist, auf sie eine Berechnung dieses Wertunterschiedes oder Wertverhältnisses zu gründen, und dafs jedes schliefslich ausgesprochene Urteil nur den Charakter einer willkürlichen und unzuverlässigen Schätzung hat. Es wird nur der allgemeine Satz bestehen bleiben, dafs für den Reicheren dieselbe Summe einen geringeren Wert hat als für den Ärmeren. Wohl kann es Ausnahmeverhältnisse geben, unter denen ein kleiner Geldbetrag für einen Ärmeren leichter entbehrlich ist als für einen Reicheren, dieser braucht nur z. B. eine zahlreichere und mehr Kosten verursachende Familie oder gröfsere gesellschaftliche Verpflichtungen zu haben, aber im Durchschnitt wird

doch der Wert des Geldes mit wachsendem Vermögen sinken. Damit wäre die Ableitung der Laplaceschen Sätze vollkommen gesichert, wenn sich nur wenigstens die Möglichkeit einsehen liefse, die Wertefunktion empirisch zu ermitteln. Eine solche Möglichkeit ist aber nicht zu finden. Denn weder Versuche noch Beobachtungen können je zu einer Skala führen, welche die relativen Werte der Geldeinheit für die einzelnen Einkommenklassen liefert.

Man könnte daran denken, diese Skala so aufzustellen, dafs man die Werte den Beträgen umgekehrt proportional setzt, welche eine Anzahl Personen der verschiedenen Vermögensklassen für denselben, zum unmittelbaren Genufs oder Gebrauch dienenden Gegenstand zu zahlen bereit sind, und den Irrtum des Einzelnen durch die Menge der herangezogenen Personen auszugleichen suchen. Aber es bedarf kaum einer Erwähnung, wie wenig zweckdienlich ein solches Verfahren wäre. Denn es giebt kaum einen Gegenstand, der für eine gröfsere Anzahl von Personen genau denselben Wert hat, und abgesehen davon, wäre die Feststellung dieses Wertes nach dem Urteile der betreffenden Personen eine faktische Unmöglichkeit. Denken wir uns z. B., es handle sich um eine gemeinnützige Unternehmung, die in gleichem Mafse das Interesse aller Bürger trifft. Dann sollte man nach den Regeln der Billigkeit erwarten, es würden alle Bürger gleiche Äquivalente beitragen, nämlich soviel, wie sie alle mit der gleichen Leichtigkeit entbehren können, der Arme wenig, der Reiche viel, und hiernach hätte man sofort einen Mafsstab dafür, welche Summen in den verschiedenen Vermögensverhältnissen denselben Wert besitzen. Aber ein solches Verfahren würde bei allen Menschen die gleiche Freigebigkeit und Opferwilligkeit voraussetzen, was der Wirklichkeit durchaus widerspricht. Im Gegenteile würde ein armer Handwerker von seinem mühsam ersparten Gelde vielleicht mehr hergeben als ein geiziger Millionär von seinem Überflusse.

Eine andere und zuverlässigere Methode würde sich aus einer Menge gut und gleichmäfsig geführter Haushaltungsbücher von Familien aller möglichen Lebenslagen herleiten. Vergleicht man nämlich die Ausgaben eines Hausstandes mit denen eines anderen, der über ein etwas höheres Einkommen verfügt, so kann man leicht feststellen, was dieser letztere Haushalt entbehren müfste, wenn er auf das Einkommen des ersteren herabgedrückt würde, und was somit für ihn diese Einbufse zu bedeuten hat. Würde man nun eine bestimmte Werteskala bereits besitzen, so könnte man wenigstens bemessen, inwieweit sie den wirklichen Verhältnissen entspräche. Man müfste nämlich die einzelnen Ausgaben ordnen nach dem Grade, in welchem sie erforderlich oder

überflüssig sind, indem man den notwendigsten Ausgaben die niedrigste Ordnung giebt. Dieses Ordnen geschieht sehr einfach, indem man das durchschnittliche Einkommen feststellt, bei welchem jede der Ausgaben zuerst bemerkbar wird. Zu jeder Ausgabe gehörte dann ein bestimmtes Gewicht, nach welchem sich der Grad ihrer Dringlichkeit bemifst, und dieses Gewicht wäre dem Werte der Geldeinheit für diejenige Einkommensklasse proportional zu setzen, bei welcher die betreffende Ausgabe zuerst auftritt. Die Bedingung dafür, dafs die Werteskala richtig bemessen ist, wäre dann die, dafs mit der steigenden Ordnung das Gewicht der Ausgaben stetig abnehmen müfste.[1])

Es ist jedoch schwer einzusehen, wie man auf diesem Wege eine Werteskala erst herleiten und einen genauen Ansatz der Wertefunktion finden könnte. Diese läfst sich in keiner Weise festlegen. Die Unmöglichkeit des Operierens mit einer undefinierbaren Funktion würde aber der Bernoullischen Theorie auch in ihrer erweiterten Fassung den Boden entziehen. Da kommt ihr nun merkwürdigerweise mitten aus dem wirtschaftlichen Leben heraus eine unerwartete Hülfe. Die Umlegung der Einkommensteuer[2]), die bekanntlich in dem modernen Steuerwesen eine sehr grofse Rolle spielt, erfordert nämlich die Feststellung der Beträge, welche für die verschiedenen Staatsangehörigen nach Mafsgabe ihres Einkommens als äquivalent anzusehen sind. Nach der heutigen Anschauung ist die Steuer als ein Beitrag zu betrachten, den der Einzelne für die Befriedigung eines kollektiven Bedürfnisses leistet, sie ist sonach ebensogut eine zweckmäfsige Ausgabe wie jede andere und keineswegs ein Opfer, das der Einzelne der Allgemeinheit bringt. Wenn ein solches kollektives Bedürfnis für jeden gleich dringlich ist, so müssen, könnte man sagen, billigerweise auch alle ihren Verhältnissen entsprechend gleich viel beisteuern, das heifst, was ein jeder infolge dieser Ausgabe an seinen anderen Ausgaben kürzt und deswegen entbehrt, darf für keinen empfindlicher als für einen anderen sein. Somit hätte man die in den Steuersätzen angegebenen Beträge als äquivalente Summen für die einzelnen Einkommensklassen anzusehen und dürfte die Wertefunktion ihnen um-

1) Die hier gestreiften Überlegungen haben durch die Theorie des Grenznutzens, wie sie von Jevons und Menger begründet ist, einen breiten Raum in der Nationalökonomie eingenommen. Für die folgenden Ausführungen möge man etwa die kritischen Bemerkungen von Sax, Die Progressivsteuer, in der Zeitschrift für Volkswirtschaft, Band 1, vergleichen, wo auch holländische, in Deutschland wenig gekannte Litteratur herangezogen ist.

2) Die umfangreiche Litteratur über den hiermit berührten Gegenstand findet man in dem Handwörterbuche der Staatswissenschaften unter Einkommensteuer und Grenznutzen zusammengestellt.

gekehrt proportional annehmen. Es ist nun nicht zu verkennen, dafs jede wirklich bestehende Steuer im besten Falle der Ausdruck einer augenblicklich allgemein herrschenden Empfindung ist, und es ist deswegen keineswegs anzunehmen, dafs diese Empfindung das Richtige trifft, das heifst, das nicht doch eine Vermögensklasse durch die Steuer stärker als eine andere belastet ist. Aber man könnte sich doch wenigstens an die Hoffnung halten, dafs sich eine solche Ungerechtigkeit in der Steuerverteilung doch im Laufe der Zeit bemerkbar machen und beseitigt werden würde und man sich so dem Ideale der gerechtesten Steuerverteilung schliefslich immer mehr nähern wird, wenn dieses Ideal auch niemals ganz erreicht wird, weil es selbst mit den wirtschaftlichen Verhältnissen sich verändert und daher immer neue Reformen in der Steuergesetzgebung fordert. Es würde sich aber, wenn erst einmal ein vollkommener Ausgleich der Leistungen verwirklicht ist, doch nur um geringe und ganz allmählig nötig werdende Modifikationen handeln, die sich den Unterhaltungsarbeiten an einem einmal aufgeführten Bau vergleichen lassen. Nur heftige wirtschaftliche Umwälzungen würden wie ein zerstörendes Naturereignis eine Erneuerung der ganzen Anlage erfordern. Im übrigen aber wäre gerade die Solidität der einzige Mafsstab für die Vortrefflichkeit eines Steuersystems. Es ist indessen nicht abzusehen, wie diese Solidität darüber entscheiden soll, ob dieses System auch von allen gleiche Äquivalente an Werten fordert.

Die Frage der Steuerbelastung ist durchaus nicht so persönlich, wie es der Bernoullische Gedankengang erfordern würde. Es kommt bei ihr nicht blofs die Person des Steuerzahlers in Betracht, sondern auch der Charakter seiner Unternehmungen, aus denen er sein Einkommen schöpft und welche somit die Steuer trifft. Die Steuer lastet nach der älteren Ansicht geradezu auf der Unternehmung und berührt den Unternehmer erst mittelbar. Wenn nun auch der grofse Fortschritt der neueren Auffassungen eben darauf beruht, dafs sie das persönliche Element mehr in den Vordergrund stellen, so hat dies doch seine bestimmte Grenze. Der Staat ist, wenigstens unter unseren heutigen Verhältnissen, zu einer ziemlich weitgehenden Rücksicht auf das Kapital genötigt. Er hat ein Interesse, industrielle und kommerzielle Unternehmungen zu begünstigen, statt sie durch zu grofse Besteuerung zu drücken. Es ist eine bekannte Thatsache, dafs Steuern, welche das Kapital stark belasten, zu einer Auswanderung desselben und vor allen Dingen zu Steuerhinterziehung führen. Dafs die grofsen Kapitalien sich, wie es scheint, leichter verbergen lassen als der Zehrpfennig des armen Mannes, verschiebt die Steuer stark zu Ungunsten

des letzteren, und doch läſst sich hierfür keine Remedur dadurch schaffen, daſs man die Steuersätze für die hohen Einkommensklassen noch weiter erhöht, denn dadurch würde das Übel noch verschlimmert. So giebt es sehr wichtige Momente, welche dem Ideal der Steuerverteilung, daſs Alle gleiche Äquivalente zahlen, genau entgegenwirken.

Bei alledem ist es sehr merkwürdig, daſs die Bernoullische Annahme, es seien die Wertäquivalente dem Einkommen proportional, zu einer gleichmäſsigen Einkommensteuer führt, wonach jeder gleich viel in Prozenten seines Einkommens zu entrichten hat. Dies nämlich ist der gelindeste Ansatz, der je für die Vermögens- und Einkommensteuer gemacht ist, indem alle anderen die höheren Einkommen noch stärker belasten. Die heutigen Steuersysteme befolgen der Mehrzahl nach eine gelinde Progression in der Steuerquote. Die Berechtigung einer solchen Progression ist allerdings lange Zeit heftig umstritten worden, und viele Autoritäten, an der Spitze Adam Smith, der freilich auch von der Zulässigkeit einer schwachen Progression spricht, haben sich entschieden der gleichmäſsigen Steuer zugewandt. Mit ihrer Ansicht wäre der Bernoullische Ansatz in Einklang. Wenn er aber abzuändern ist, so ist er es in der Richtung, welche den Wert des Geldes noch schneller als dem Vermögen proportional sinken läſst. Es mag nicht uninteressant sein, einen solchen Ansatz zu versuchen.

VII.

Zuvörderst ist aufs neue zu betonen, daſs nicht, wie Bernoulli meinte, erst dann, wenn das Einkommen Null wird, der Wert einer kleinen Geldsumme ins Unendliche steigt, sondern schon dann, wenn das Einkommen zur Bestreitung des notwendigsten Lebensunterhaltes nicht mehr ausreicht. Es ist deswegen von dem Einkommen x ein gewisser Betrag a abzuziehen, den man mit dem Existenzminimum zusammenfallen lassen kann, und statt einfach des reziproken Wertes von x ist für die Wertefunktion

$$(\alpha) \qquad f(x) = \frac{k}{x - a}$$

anzusetzen. Das würde für die Steuer einen Betrag

$$S(x) = \mu(x - a)$$

ergeben, indem μ die absolute Höhe der Steuer festlegt. Das Existenzminimum würde also steuerfrei bleiben, und der Mehrbetrag des Einkommens wäre einer gleichmäſsigen Besteuerung unterworfen.

Es ist leicht zu sehen, wie schon dieser Ansatz eine Progression der Einkommensteuer bedingt. Rechnen wir nämlich die Steuer im Verhältnis zu dem ganzen Einkommen, so haben wir zu setzen

$$S(x) = \mu\left(1 - \frac{a}{x}\right)x,$$

und die Steuerquote ist sonach

$$q(x) = \mu\left(1 - \frac{a}{x}\right).$$

Sie ist für sehr grofses Einkommen so gut wie konstant, nämlich gleich μ, für kleinere Einkommen nimmt sie ab und wird schliefslich gleich Null für $x = a$. Dieser Ansatz kann aber für praktische Zwecke noch ungenügend sein. Man fasse nämlich einmal den Steuertarif, der aus ihm resultieren würde, näher ins Auge. Wählt man für das Maximum μ, welchem die Steuerquote q für ein sehr hohes Einkommen sich annähert, 5 % und setzt $a = 1000$ Mark, so wird die Quote für ein Einkommen von 2000 Mark bereits $2\frac{1}{2}$ %, für 5000 Mark ist sie 4 %, für 10000 Mark $4\frac{1}{2}$ %. Man wird demnach vielleicht die niedrigeren Einkommen für nicht genügend entlastet halten, besonders da die Personen, die diesen Einkommensklassen, etwa von 1000 bis 3000 Mark, angehören, z. B. Volksschullehrer, Unterbeamte, Buchhalter u. a., oft schwer mit materiellen Sorgen zu kämpfen haben, indem sie grofsenteils zu einer nach aufsen hin würdigen und anständigen Lebenshaltung gezwungen sind. Da man ihnen diese auch zu ermöglichen suchen mufs, ist es nicht gerade angebracht, die Steuerquote von dem niedrigsten besteuerten Einkommen an sehr rasch wachsen zu lassen, und es ist auch beispielsweise nach dem preufsischen Systeme nicht der Fall. Um dem entsprechend den vorigen Ansatz zu modifizieren, kann man der Wertefunktion

$$\frac{k}{x - a}$$

ein Zusatzglied von der Form

$$\frac{h}{(x + b)^2}$$

hinzufügen, so dafs sie sich, wenn noch $\frac{h}{k} = \varkappa$ gesetzt wird, in folgender Gestalt schreiben läfst

$$(\beta) \qquad f(x) = \frac{k}{x - a}\left(1 + \varkappa \frac{x - a}{(x + b)^2}\right).^{1)}$$

1) Hieraus folgt für die Funktion $F(x)$ durch Integration

$$F(x) = j + k\left\{\log(x - a) - \frac{\varkappa}{x + b}\right\}.$$

Der Wert einer Einnahme z, um die das Einkommen x vermehrt wird, ist sonach

$$F(x + z) - F(x) = k\left\{\log\left(1 + \frac{z}{x - a}\right) + \varkappa \frac{z}{(x + b)(x + z + b)}\right\}.$$

Der eingeklammerte Faktor nimmt, wenn x von a bis $2a + b$ wächst, von 1 bis

$$1 + \frac{\varkappa}{4}\frac{1}{a+b}$$

zu, sinkt dann aber wieder, wenn x weiter wächst, um, wenn x sehr grofs ist, sehr angenähert gleich Eins zu werden.

Der Bruch

$$\varphi(x) = \varkappa \frac{x-a}{(x+b)^2}$$

bestimmt so die Begünstigung, die das Einkommen x gegenüber dem ursprünglichen Ansatze erfährt. Sein Maximalwert tritt für

$$c = 2a + b$$

ein, und wir wollen

$$\varphi(c) = \frac{\varkappa}{4}\cdot\frac{1}{a+b} = C$$

setzen. Dann wird der Steuersatz für dieses relativ am meisten begünstigte Einkommen

$$S(c) = \mu \frac{c-a}{1+C}\cdot\frac{1}{c},$$

wenn er für ein beliebiges Einkommen x

$$S(x) = \mu \frac{x-a}{1+\varphi(x)}\cdot\frac{1}{x}$$

ist. Der Steuersatz für ein sehr hohes Einkommen ω wird dagegen

$$S(\omega) = \mu,$$

und es ergiebt sich

$$S(\omega) - S(x) = \mu \frac{a + x\varphi(x)}{x(1+\varphi(x))}$$

oder

$$S(\omega) - S(x) = \mu \frac{a}{x} + \varphi(x) S(x).$$

Die Entlastung, die ein niedrigeres Einkommen x gegenüber einem sehr hohen Einkommen w erfährt, zerlegt sich so in zwei Teile. Der erste Teil

$$\mu \frac{a}{x}$$

rührt davon her, dafs nicht das ganze Einkommen, sondern nur sein Überschufs über das Existenzminimum zur Besteuerung herangezogen wird, und würde der auf Grund einer Wertefunktion

$$\frac{k}{x-a}$$

berechneten Steuer entsprechen. Der zweite Teil

$$\varphi(x) \cdot S(x)$$

stellt dann die Vergünstigung gegenüber diesem Ansatze dar. Man bemerke endlich, dafs man

$$\varphi(x) = 4\,C(c - a)\frac{x - a}{(x + c - 2a)^2}$$

setzen kann, und dafs somit der Steuersatz $S(x)$ durch die Gröfsen a, c, C und μ vollkommen bestimmt ist.

Diese Formeln, welche die Abhängigkeit des Wertes von dem Vermögen oder Einkommen darzustellen versuchen, zeigen eine gewisse Analogie mit der sogenannten Zustandsgleichung der Thermodynamik, nämlich der Gleichung, die zwischen dem Drucke und dem Volumen eines Gases bei einer bestimmten Temperatur aufgestellt wird. Zunächst nämlich wird angenommen, dafs der Druck p dem Volumen v umgekehrt proportional sei, also

$$p = \frac{\alpha}{v}.$$

Da diese Formel aber bei gewöhnlicher Temperatur nur für wenige Gase mit hinlänglicher Annäherung richtig ist, hat man sich genötigt gesehen, sie abzuändern. Es wird zunächst ein gewisses Volumen a eingeführt, unter das sich das Gas auch durch den stärksten Druck nicht komprimieren läfst, und demgemäfs

$$p = \frac{\alpha}{v - a}$$

gesetzt. Der äufsere Druck p ist aber weiter nur ein Teil des wirklich vorhandenen Druckes, und es ist der Kohäsionsdruck π, der von der gegenseitigen Anziehung der Teilchen des Gases herrührt, noch hinzuzufügen, so dafs die vorige Formel die Gestalt

$$p + \pi = \frac{k}{v - a}$$

annimmt, in der sie van der Waals zuerst aufgestellt hat. Dieser nimmt aber den Kohäsionsdruck immer dem Quadrate des spezifischen Volumens umgekehrt proportional an, was mit der Erfahrung nicht recht in Einklang zu bringen ist. Clausius versuchte daher eine Verbesserung, indem er den Kohäsionsdruck einer Gröfse

$$\frac{1}{(v + b)^2}$$

proportional setzte, und er gelangte so zu einer Formel

$$p = \frac{\alpha}{v - a} - \frac{\beta}{(v + b)^2},$$

in der noch α der absoluten Temperatur direkt und β ihr umgekehrt

proportional sein soll. Diese Formeln scheinen den oben gegebenen Ansätzen für die Wertefunktion ganz analog, nur ist in der Clausiusschen Formel das zweite Glied wesentlich negativ, während wir es in der Werteformel positiv annehmen mußten. Daß es sich indessen um eine ganz zufällige Analogie handelt, der keinerlei kausaler Zusammenhang zu Grunde liegt, braucht wohl nicht betont zu werden.

Ebensowenig wird es nötig sein, noch besonders hervorzuheben, daß der für die Wertefunktion von uns gegebene Ansatz ein durchaus willkürlicher ist und nicht wie eine physikalische Formel richtig oder falsch, sondern nur zweckmäßig oder unzweckmäßig sein kann. Er hat nur gewissen allgemeinen Forderungen zu genügen, und die in ihm enthaltenen Konstanten sind lediglich nach einer ungefähren Schätzung so zu bestimmen, daß den praktischen Bedürfnissen genügend Rechnung getragen ist. Es handelt sich also gewissermaßen um einen probeweisen Ansatz, der von der empirischen Bestimmung der Wertefunktion, wenn sie möglich wäre, durchaus verschieden bleibt. Das, was die Formel für eine solche wirtschaftliche Aufgabe wie die Festlegung einer Einkommensteuer nützlich machen könnte, ist allein der Umstand, daß, nachdem ihre Übereinstimmung mit den Prinzipien der beabsichtigten Steuerverteilung einmal zugegeben, die Bestimmung der Konstanten in ihr viel weniger umständlich und schwierig ist als die Feststellung der Steuerquote für alle einzelnen Einkommenklassen, die eine weit größere Willkür und Unsicherheit involviert. Diese Konstanten sind aus folgenden Daten herzuleiten. *Erstens* muß die Zahl a festgelegt werden. Wir ließen sie oben mit dem Existenzminimum e zusammenfallen. Es ist aber angebracht, sie in der Steuerformel größer anzunehmen. So werden die im allgemeinen sehr zahlreichen Personen mit ganz kleinem Einkommen (zwischen e und a) völlig von der Steuer befreit. Als das durchschnittliche Existenzminimum sieht man in Deutschland gegenwärtig etwa 600 Mark jährlich an, die preußische Einkommensteuer besteuert dagegen erst ein Einkommen von 900 Mark. *Zweitens* ist das Einkommen $c = 2a + b$ zu bestimmen. Hierfür sind allerdings Erwägungen maßgebend, welche die besondere Lage und Bedeutung der einzelnen Einkommensklassen betreffen und sich nicht in Form von einfachen Regeln aussprechen lassen. Man könnte aber daran denken, versuchsweise für c einfach das mittlere Einkommen überhaupt zu wählen.[1]) Soll dann *drittens* durch die Größe C das

1) Es läuft dies unter den gegenwärtig herrschenden Verhältnissen ungefähr darauf hinaus, daß man $c = 3e$ setzt. Ist also $a = {}^3/_2 e$, so wäre $b = 0$ zu machen. Die preußische Einkommensteuer würde, wenigstens für Einkommen bis zu 10000 Mark, etwa einem Werte $b = 2a = 3e$ entsprechen.

Mafs der Abweichung von dem ursprünglichen Ansatze einer gleichförmigen Besteuerung des Überschusses über das Existenzminimum angegeben werden, so ist dies wiederum reine Sache des persönlichen Ermessens oder durch den Zug der Zeit gegeben. In wieweit die Annahme das Richtige getroffen hat, kann erst die Zukunft lehren. Was *viertens* noch nötig ist, die Bestimmung der Maximalquote μ für sehr hohe Einkommen, ergiebt sich aus den Zensuslisten dadurch, dafs die durch die Steuer insgesamt erhobene Summe die erforderliche Höhe erreichen soll.

Wünscht man ein rascheres Ansteigen der Steuerquote, als es der von uns gegebene Ansatz liefert, so kann man diesen durch einen anderen

$$(\gamma) \qquad f(x) = \frac{k}{x-a}\left(1 + \varkappa\,\frac{x-a}{(x+b)^n}\right)$$

ersetzen, in dem $n = 3$ oder noch gröfser angenommen wird. Die Gröfse b ist nur an die Bedingung gebunden, dafs $a + b$ positiv sein soll. Man könnte auch andere Ansätze versuchen, deren äufsere Gestalt ganz verschieden ist. Das ganze Verfahren läfst sich passend mit der Aufstellung empirischer Formeln in der Technik, beispielsweise in der Hydraulik für die Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsänderungen des in Röhren oder Kanälen strömenden Wassers, vergleichen. Was aber die hier erörterte Art der Verwendung von Formeln davon durchaus unterscheidet, ist die Unmöglichkeit, die Tauglichkeit des Ansatzes empirisch zu prüfen. Allgemeine Erfahrungen können wohl das Vorhandensein und die Richtung eines Fehlers, nicht aber seine Gröfse ergeben. Deshalb müssen die auf eine solche Wertefunktion aufgebauten wirtschaftlichen Wertlehren der sicheren Begründung entbehren, auch wenn sie nicht den analytischen Ausdruck, sondern nur allgemeine Eigenschaften dieser Funktion als bekannt voraussetzen. Denn wenn nicht wenigstens die Möglichkeit gesichert ist, die Funktion nötigenfalls zu bestimmen, ist sie als empirische Funktion nicht definiert und kann mit ihr schlechterdings nicht operiert werden, ohne dafs alle diese Operationen einen gewissen hypothetischen Charakter tragen, der es unmöglich macht, aus ihnen auf die Wirklichkeit zu schliefsen.

Die Laplaceschen Sätze sind deswegen so merkwürdig, weil sie in der That zu dem Glauben Anlafs geben können, es lasse sich die Mathematik auf das praktische Leben, ja, was den Männern der Aufklärung besonders wichtig war, auf das moralische Gebiet anwenden. So fest scheinen sie begründet, und so einleuchtend und vernünftig sind die Maximen, die sie ergeben und die sich andererseits aus der einfachen Voraussetzung, dafs der Wert des Geldes mit dem wachsenden

Besitze sinke, durch rein logische Schlüsse kaum ableiten ließen. Es ist aber aus diesen Sätzen, wenn sie nur auf jene Voraussetzung und die bloße Existenz einer Wertefunktion gegründet werden, nicht zu ersehen, *wieviel* z. B. jemand für eine bestimmte Versicherung bezahlen darf, ohne daß sie für ihn „moralisch unvorteilhaft" wird, es läßt sich überhaupt nicht für jeden einzelnen Fall nach diesen Maximen bestimmen, was zu empfehlen oder zu widerraten ist. Jeder einzelne Fall erfordert vielmehr doch wieder die Erwägung aller besonderen Umstände und die schließliche Entscheidung entspringt ganz anderen als mathematischen Überlegungen. Der Gedanke eines zahlmäßig angebbaren Wertes, der sich nur nach dem Vermögen der betreffenden Person richten soll, ist eben eine bloße Fiktion.

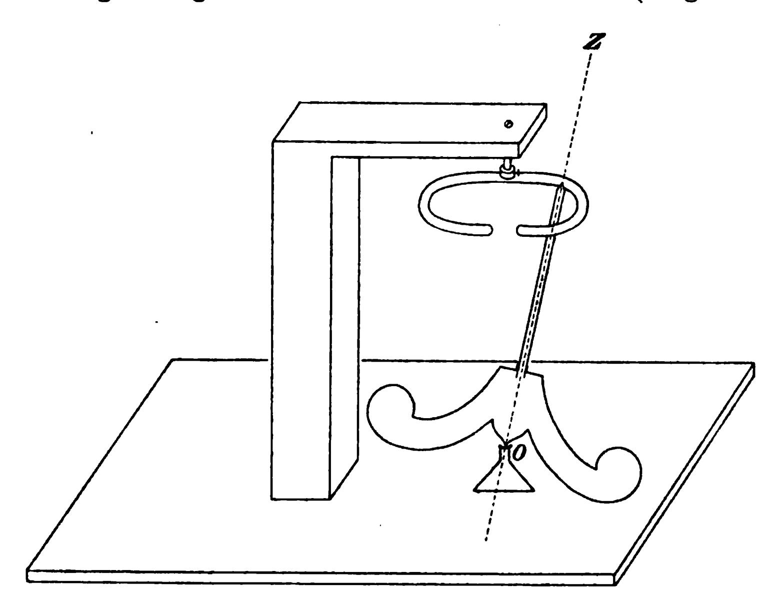
Über das perimetrische Rollen eines Kreisels, dessen Schwerpunkt unter dem Unterstützungspunkte liegt.

Von D. Bobylew in St. Petersburg,
bearbeitet von Th. Friesendorff in St. Petersburg.

Der Apparat, dessen Bewegung hier behandelt werden soll, ähnelt einem gewöhnlichen Kreisel, der aus einem cylindrischen Stabe mit konischen Spitzen und aus einem darauf befestigten Drehungskörper besteht; er unterscheidet sich vom gewöhnlichen Kreisel dadurch, daß der Drehungskörper die Gestalt einer Glocke besitzt und dieselbe auf dem Stabe so befestigt ist, daß die eine der Spitzen des Stabes innerhalb der Glocke sich befindet und bei vertikaler Aufstellung mit nach oben gerichtetem freien Ende der Schwerpunkt des ganzen Kreisels, der ja auf der Figurenachse liegen muß, noch unterhalb der zweiten Spitze, also auf die Verlängerung des Stabes, zu liegen kommt. Um die Bewegung eines solchen Kreisels zu beobachten, wird auf einem Gestell eine Pfanne angebracht, in welche die untere Spitze des Stabes hineingestellt wird. Wenn der Kreisel ruht, nimmt seine Figurenachse eine vertikale Stellung an. Lenkt man den Kreisel aus dieser Gleichgewichtslage ab und erteilt man ihm dabei eine starke Drehung um seine Achse und läßt man ihn darauf, ohne ihm einen seitlichen Anstoß erteilt zu haben, frei, so wird es uns scheinen, daß seine Achse einen Kreiskegel um die Senkrechte beschreibt und daß die freie Spitze sich auf einem horizontalen Kreise, dessen Mittelpunkt auf der

Senkrechten gelegen ist, bewegt. In Wirklichkeit aber wird die Bahnkurve der freien Spitze kein Kreis sein, sondern eine sphärische Cycloide mit sehr vielen sehr kleinen Zacken (vergl. F. Klein und A. Sommerfeld —' Über die Theorie des Kreisels T. I, Kap. IV und V)

Befestigt man aber über dem Kreisel eine horizontale Scheibe mit Rändern beliebiger Gestalt und wird die Entfernung der Scheibe vom Unterstützungspunkte des Kreisels so gewählt, daſs die obere Spitze nie unter die Scheibe gelangen kann, sondern sich ständig auf den Rand stützen muſs, dann wird der rotierende Kreisel längs des ganzen Randes der Scheibe rollen. (Vergl. Abbild.)



Eine derartige Bewegung wurde von dem französischen Physiker Sire beobachtet und perimetrische Rotation (rotation périmétrique) genannt. Eine allgemeine Behandlung dieser Frage findet man in dem Werke von Resal „Traité de cinématique pure, 1862“, wo gezeigt wird, daſs, wenn das Rollen mit einem Gleiten verbunden ist, die Integration der Differentialgleichungen nur in dem Falle ausführbar ist, daſs der Rand der Scheibe ein horizontaler Kreis mit dem Mittelpunkte auf der Senkrechten durch den Unterstützungspunkt ist.

In dem Lehrbuche der analytischen Mechanik von D. Bobylew (Bd. II, S. 656—673; 1888) wird das Problem des perimetrischen Rollens ohne Gleiten, welches sich für beliebige Gestalten der Randkurve lösen läſst, behandelt. Hier soll dasselbe Problem einfacher dargestellt werden und dabei werden für den Fall eines kreisförmigen

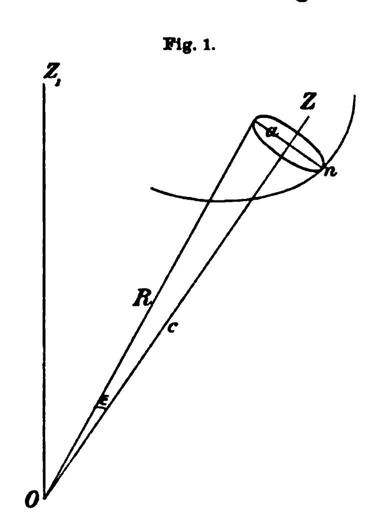
Randes die Bedingungen aufgestellt, unter denen die freie Spitze des Kreisels den Rand nicht verlassen und nicht zu gleiten anfangen wird, sowie auch die Bewegungen betrachtet, die dann eintreten, wenn die freie Spitze den Rand verläſst und ihn wieder berührt. Für beliebige Gestalten des Randes wird das Problem analog behandelt und es wird gezeigt, daſs die Formeln, die den Druck des Kreisels auf den Rand ausdrücken, ein von der geodätischen Krümmung der Randkurve abhängiges Glied enthalten —

§ 1.

Den Unterstützungspunkt O der unteren Spitze wählen wir zum Koordinatenanfang der Achsen OX, OY, OZ, die fest mit dem Kreisel verbunden sind, so wie auch der im Raume unbeweglichen Achsen OX_1, OY_1, OZ_1; dabei ist die Achse OZ_1 lotrecht nach oben und die Achse OZ nach der oberen freien Spitze hin gerichtet. Die Koordinaten irgend eines Punktes, bezogen auf die ersten Koordinatenachsen seien x, y, z, bezogen auf die zweiten — x_1, y_1, z_1. Der Schwerpunkt des Kreisels befindet sich auf dem negativen Teile der OZ-Achse in der Entfernung l von O.

Die unbewegliche Randkurve auf der das Rollen stattfindet, befindet sich auf der Kugel mit dem Mittelpunkte in O und vom Radius R, so daſs der Abstand eines Punktes des Randes von O gleich R ist. Der Schnittkreis des Stabes, der auf dem Rande rollt, hat dann den Radius $a = R \sin \varepsilon$ und sein Mittelpunkt hat von O auf der OZ-Achse die Entfernung $c = R \cos \varepsilon$; ε ist also der Winkel, unter welchem von O aus der Radius des Schnittkreises erscheint. Der Berührungspunkt n des rollenden Kreises mit dem unbeweglichen Rande hat in Bezug auf die X, Y, Z-Achsen die Koordinaten x, y, $c = R \cos \varepsilon$ (vergl. Fig. 1).

Fig. 1.



Der normale Gegendruck λ des unbeweglichen Randes ist immer nach auſsen gerichtet, d. h. dorthin wo sich der rollende Kreis befindet, und muſs immer positiv sein. Die Momente dieses Gegendrucks um die Achsen OX, OY, OZ sind resp. λy, $-\lambda x$, 0.

Die Reibungskraft F hat die Richtung der gemeinsamen Tangente der beiden auf einander rollenden Kurven, und wenn wir ihre Kom-

ponenten nach der X- und Y-Achse mit F_x und F_y bezeichnen, so sind ihre Momente um die X-, Y- und Z-Achse resp. $-cF_y$, cF_x, aF, so dafs die Kraft F dann positiv ist, wenn ihr Moment um die Z-Achse positiv ist.

Die Momente der Schwerkraft um die beweglichen Achsen sind resp. $-Mgl\gamma'$, $Mgl\gamma$, 0, wobei M die Masse des Kreisels, g die Beschleunigung der Schwerkraft und γ, γ', γ'' die Richtungscosinus zwischen der positiven Richtung der Z_1-Achse und denen der X-, Y-, Z-Achse bedeuten; in den Eulerschen Winkeln θ, φ, ψ drücken sich die γ, γ', γ'', bekanntlich folgendermafsen aus:

$$\gamma = \sin\theta \cdot \sin\varphi, \quad \gamma' = \sin\theta \cdot \cos\varphi, \quad \gamma'' = \cos\theta.$$

Ferner haben die Komponenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit Ω nach den beweglichen Achsen folgende Ausdrücke in den Eulerschen Winkeln und ihren Ableitungen nach der Zeit:

$$\begin{aligned} p &= \frac{d\psi}{dt}\sin\theta \cdot \sin\varphi + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi \\ q &= \frac{d\psi}{dt}\sin\theta \cdot \cos\varphi - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi \\ r &= \frac{d\psi}{dt}\cos\theta \qquad\quad + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Die Trägheitsmomente des Kreisels sind: um die Symmetrieachse C, um die äquatoriale Achse A.

Hiernach können wir für das Rollen des Kreisels auf dem Rande folgende Differentialgleichungen aufstellen:

$$(1) \qquad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} = (A - C)qr - Mgl\gamma' + \lambda y - cF_y \\ A\frac{dq}{dt} = (C - A)rp + Mgl\gamma - \lambda x + cF_x \\ C\frac{dr}{dt} = aF, \text{ oder auch: } C\frac{dr}{dt} = xF_y - yF_x. \end{cases}$$

Beim Rollen ohne Gleiten fällt die augenblickliche Drehungsachse mit der Richtung On, oder mit der ihr entgegengesetzten, zusammen, und deshalb haben wir folgende Gleichungen:

$$(2) \qquad \frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{c} = \frac{\omega}{a} = \frac{\Omega}{R}$$

Dabei bedeutet $\omega = \pm\sqrt{p^2 + q^2}$ die Projektion der Winkelgeschwindigkeit Ω auf die XY-Ebene oder, was dasselbe ist, auf die Richtung des vom Mittelpunkte des Kreises zum Punkte n geführten Radius a; das obere Vorzeichen $+$ bezieht sich auf die Fälle, wo diese Projektion positiv ist.

Wir multiplizieren die erste der Gleichungen (1) mit p, die zweite mit q, die dritte mit r, addieren und erhalten

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}(A\omega^2 + Cr^2)\right] = Mgl\frac{d\cos\theta}{dt},$$

denn in Folge der Gleichung (2) ist der Koeffizient $(yp - xq)$ von λ gleich Null und die Reibungsglieder $-cpF_y + cqF_x + xrF_y - yrF_x$ heben sich weg; aufserdem ist bekanntlich $q\gamma - p\gamma' = \frac{d\cos\theta}{dt}$.

Die so erhaltene Differentialgleichung (3) besitzt ein Integral, welches das Gesetz der Erhaltung der vollen Energie des rotierenden Kreisels ausdrückt. Dieses Integral kann auf Grund der Gleichung (2) so geschrieben werden:

$$\omega^2 = \frac{2a^2}{R^2J}(Mgl\cdot\cos\theta + h),$$

wo $J = A\sin^2\varepsilon + C\cos^2\varepsilon$ das Trägheitsmoment des Kreisels um die augenblickliche Drehungsachse bedeutet. Die Konstante h wird durch den Wert ω_0 der Winkelgeschwindigkeit für den Wert θ_0 des Winkels θ bestimmt, und so erhalten wir:

$$(4) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2a^2Mgl}{R^2J}(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Das Integral (4) bestimmt das Rollen des Kreisels auf dem gegebenen Rande, wenn der rollende Kreis nirgends den Rand verläfst. Das Verlassen kann nur in den Punkten des Randes stattfinden, wo λ, welches bis dahin positiv war, zu Null wird und bei weiterem Rollen negative Werte annimmt. Um über das Vorzeichen von λ urteilen zu können, mufs man aus den ersten zwei Gleichungen (1) den Ausdruck für λ ableiten; zu diesem Zwecke multiplizieren wir die erste Gleichung mit y, die zweite mit $-x$ und addieren sie, dann erhalten wir:

$$\lambda a^2 = A\left(y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt}\right) + (C - A)r(px + qy) + Mgl(x\gamma + y\gamma') \\ + c(yF_y + xF_x).$$

In dieser Gleichung sind:

$$px + qy = a\omega, \quad x\gamma + y\gamma' = z_1 - c\gamma'' \quad \text{und} \quad xF_x + yF_y = 0,$$

da die Reibungskraft F senkrecht zum Radius a gerichtet ist. Was die Differenz $y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt}$ anbetrifft, so läfst sie sich folgendermafsen bestimmen: aus der Gleichung $yp - xq = 0$ folgt, dafs für jeden Moment t:

$$y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt} = q\frac{dx}{dt} - p\frac{dy}{dt}$$

ist; zur Bestimmung von $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ betrachten wir den Berührungspunkt des rollenden Kreises mit dem festen Rande: $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ sind die X- und Y-Komponenten seiner relativen Geschwindigkeit gegen den Kreisel. Der Berührungspunkt ändert stetig seine Lage auf dem Rande, so wie auch auf dem rollenden Kreise. Die absolute Geschwindigkeit der Bewegung dieses Punktes auf dem Rande wollen wir mit v bezeichnen. Die Geschwindigkeit der relativen Bewegung ist bekanntlich gleich der geometrischen Differenz der absoluten Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des bewegten Systems; die X, Y-Komponenten der letzteren Geschwindigkeit sind hier gleich: $(qc - ry)$ und $(rx - pc)$, also haben wir:

$$\frac{dx}{dt} = v\cos(v,\ X) - (qc - ry)$$

$$\frac{dy}{dt} = v\cos((v,\ Y) - (rx - pc)$$

und so ist:

$$q\frac{dx}{dt} - p\frac{dy}{dt} = v(q\cos(v,\ X) - p\cos(v,\ Y)) - c\omega^2 + ra\omega.$$

Man kann sich leicht überzeugen, dafs für jede Richtung der Drehung und des Rollens die Richtung von ω zur Richtung von v so gelegen ist, wie die positive Richtung der Y-Achse zur positiven Richtung der X-Achse, d. h.

$$\cos(v,\ X) = \cos(\omega,\ Y), \quad \cos(v,\ Y) = -\cos(\omega,\ X),$$

folglich ist:

$$v(q\cos(v,\ X) - p\cos(v,\ Y)) = v\cdot\omega.$$

Infolge des Gesagten erhält also der Ausdruck für λa^2 folgende Gestalt:

(5) $$\lambda a^2 = Av\omega + (C - A)\omega^2 c + Mgl(z_1 - c\cdot\cos\theta).$$

Die Gröfse und das Vorzeichen der Reibungskraft F kann aus der dritten der Gleichungen (1) bestimmt werden:

$$F = \frac{c}{a}\frac{dr}{dt} = C\frac{c}{a^2}\frac{d\omega}{dt} = \frac{C}{2}\frac{c}{\omega a^2}\frac{d\omega^2}{dt}$$

und da

$$\frac{d\omega^2}{dt} = \frac{2a^2 Mgl}{R^2 J}\frac{d\cos\theta}{dt}$$

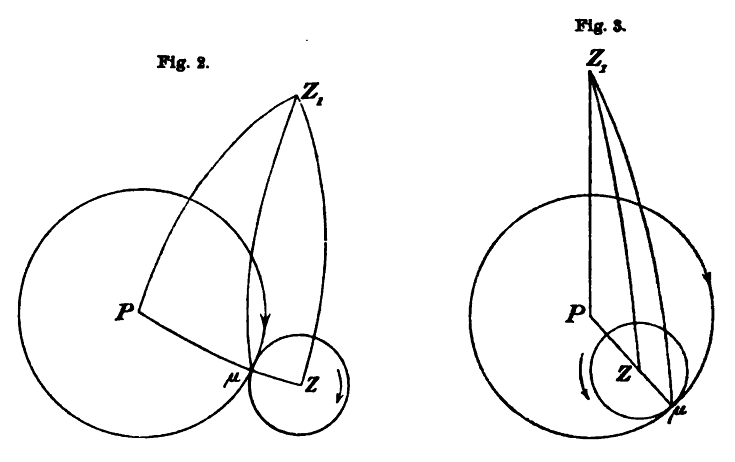
ist, so erhalten wir:

(6) $$F = \frac{CMglc}{R^2 J\omega}\frac{d\cos\theta}{dt}.$$

Damit auf dem Rande nirgends Gleiten stattfindet, muſs die absolute Gröſse der Reibungskraft kleiner als $\varkappa\lambda$ sein ($\varkappa$ ist der Reibungskoeffizient).

§ 2.

Als Beispiel wollen wir zur Randkurve irgend einen Kreis der Kugel vom Radius R wählen. Es sei $R \sin\beta$ der Radius dieses Kreises und sein Mittelpunkt habe folgende sphärische Koordinaten: die Entfernung vom Punkte O ist gleich $R\cos\beta$, der Winkel, den dieser Radiusvektor mit der OZ_1-Achse bildet, ist α (auf die Länge des Meridians dieses Radiusvektors kommt es nicht an). Wir beschreiben eine Kugel vom Radius Eins, konzentrisch zur Kugel vom Radius R, und zwei Kegelflächen mit den Spitzen in O und deren Leitlinien der Rand



und der rollende Kreis bilden. Der Durchschnitt dieser Kegelflächen mit der Einheitskugel besteht aus: einem Kreis vom sphärischen Radius β, dessen Mittelpunkt sich im Pole P mit der sphärischen Koordinate α befindet, und einem rollenden Kreis vom sphärischen Radius ε, dessen Pol wir mit Z bezeichnen. Der Berührungspunkt dieser beiden Kreise sei mit μ bezeichnet, der Durchschnittspunkt der positiven OZ_1-Achse mit der Einheitskugel sei mit Z_1 bezeichnet. Das Rollen kann von auſsen oder von innen, auſserdem nach zwei entgegengesetzten Richtungen stattfinden.

Auf Fig. 2 und 3 sind Fälle des äuſseren und des inneren Rollens dargestellt, wobei die Richtung des Rollens durch Pfeile angegeben ist. Die Formeln, die wir für diese Fälle ableiten werden, gelten auch für die Fälle des Rollens in entgegengesetzter Richtung.

Wir bezeichnen mit η den sphärischen Winkel $Z_1P\mu$, mit Γ den sphärischen Winkel Z_1ZP. Der Bogen Z_1P ist gleich α, der Bogen

$Z_1 Z$ gleich θ, der Bogen PZ gleich $(\beta + \varepsilon)$ im Falle des äufseren, gleich $(\beta - \varepsilon)$ im Falle des inneren Rollens. Im sphärischen Dreiecke PZ_1Z haben wir:

(7) $$\cos\theta = \cos\alpha \cdot \cos(\beta \pm \varepsilon) + \sin\alpha \cdot \sin(\beta \pm \varepsilon) \cdot \cos\eta.$$

Wenn wir mit $d\sigma$ das von dem Punkte μ auf dem festen Kreise zurückgelegte Bogenelement bezeichnen, so beschreibt der Punkt n auf der Kugel vom Radius R ein Element $Rd\sigma$. In den vorliegenden Fällen ist $d\sigma = \sin\beta \cdot d\eta$, also haben wir:

$$v = \frac{d\sigma}{dt} = R\sin\beta\frac{d\eta}{dt}.$$

Bekanntlich drückt sich die Winkelgeschwindigkeit ω, die gleich $\pm\sqrt{p^2+q^2}$ ist, durch die Ableitungen von θ und ψ folgendermafsen aus:

$$\omega = \pm\sqrt{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}.$$

Andererseits kann die Differentialgleichung der Bahn des Punktes Z folgendermafsen dargestellt werden:

$$d\theta = d\psi \cdot \sin\theta \cdot \operatorname{tg}\Gamma,$$

also haben wir

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \cdot \sin\Gamma,$$

oder wenn wir beide Teile dieser Gleichung mit $\sin\theta$ multiplizieren:

(8) $$-\frac{d\cos\theta}{dt} = \omega \cdot \sin\Gamma \cdot \sin\theta.$$

Ferner finden wir aus dem sphärischen Dreiecke PZ_1Z:

$$\sin\Gamma \cdot \sin\theta = \sin\alpha \cdot \sin\eta,$$

also haben wir folgenden Ausdruck für die Ableitung von $\cos\theta$:

(9) $$\frac{d\cos\theta}{dt} = \omega \cdot \sin\alpha \cdot \sin\eta.$$

Schliefslich folgt aus der Gleichung (7):

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = -\sin\alpha \cdot \sin(\beta \pm \varepsilon) \cdot \sin\eta \cdot \frac{d\eta}{dt}.$$

Aus diesen beiden Ausdrücken für $\frac{d\cos\theta}{dt}$ und aus dem Zusammenhange zwischen v und $\frac{d\eta}{dt}$ ergiebt sich dann:

(10) $$v = \frac{\omega R \sin\beta}{\sin(\beta \pm \varepsilon)}.$$

In der Formel (5) für λa^2 findet sich noch die Differenz $(z_1 - c \cdot \cos\theta)$. Wenn wir den Bogen $Z_1 \mu$ mit φ bezeichnen, so ist

$$z_1 = R \cdot \cos\varphi, \; z_1 - c \cdot \cos\theta = R(\cos\varphi - \cos\varepsilon \cdot \cos\theta).$$

Aus dem sphärischen Dreiecke $ZZ_1\mu$ finden wir:

$$\cos\varphi = \cos\varepsilon \cdot \cos\theta \pm \sin\varepsilon \cdot \sin\theta \cdot \cos\Gamma,$$

wobei das obere Zeichen auf das äufsere, das untere Zeichen auf das innere Rollen sich bezieht.

Aus dem Dreiecke PZ_1Z finden wir ebenso:

$$\sin\theta \cdot \cos\Gamma = \cos\alpha \cdot \sin(\beta \pm \varepsilon) - \sin\alpha \cdot \cos(\beta \pm \varepsilon) \cdot \cos\eta.$$

Infolge dessen kann also λa^2 folgendermafsen dargestellt werden:

$$\lambda a^2 = D \cdot \omega^2 \pm MglR \cdot \sin\varepsilon [\cos\alpha \cdot \sin(\beta \pm \varepsilon) - \sin\alpha \cdot \cos(\beta \pm \varepsilon) \cdot \cos\eta],$$

wo

$$D = A \frac{R \sin\beta}{\sin(\beta \pm \varepsilon)} + (C - A) R \cdot \cos\varepsilon$$

immer positiv ist, solange $\varepsilon < \beta$ ist.

Für ω^2 wollen wir seinen Ausdruck (4) einsetzen, wobei die Differenz $(\cos\theta - \cos\theta_0)$ nach der Formel (7) durch

$$2 \sin\alpha \cdot \sin(\beta \pm \varepsilon) \left(\sin^2\frac{\eta_0}{2} - \sin^2\frac{\eta}{2}\right)$$

ersetzt werden kann, und η_0 hier sich auf den Anfangspunkt, wo $\omega = \omega_0$ ist, bezieht. Wir setzen zur Vereinfachung $\eta_0 = 0$, d. h. wir setzen voraus, dafs in der Anfangslage μ auf der Verbindungslinie $Z_1 P$ liegt, dann läfst sich λa^2 so ausdrücken:

$$\lambda a^2 = D\omega_0^2 - \frac{4DMgla^2}{R^2 J} \sin\alpha \cdot \sin(\beta \pm \varepsilon) \sin^2\frac{\eta}{2}$$
$$\pm Mgla \left(\sin(\beta \pm \varepsilon - \alpha) \cos^2\frac{\eta}{2} + \sin(\beta \pm \varepsilon + \alpha) \sin^2\frac{\eta}{2}\right)$$

oder auch:

$$\lambda a^2 = P \cos^2\frac{\eta}{2} + Q \sin^2\frac{\eta}{2},$$

wo

$$P = D\omega_0^2 \pm Mgla \sin(\beta \pm \varepsilon - \alpha)$$
$$Q = P \pm 2Mgla \sin\alpha \cdot \cos(\beta \pm \varepsilon) - \frac{4DMgla^2}{R^2 J} \sin\alpha \cdot \sin(\beta \pm \varepsilon).$$

Wir können auch

(11) $$Q = P - 2\,G\,Mgla \sin\alpha$$

schreiben, wobei

$$G = \frac{2Da}{R^2 J} \sin(\beta \pm \varepsilon) \mp \cos(\beta \pm \varepsilon)$$

ist. (Die oberen Zeichen beziehen sich auf das äufsere, die unteren auf das innere Rollen.)

Diese Formeln zeigen uns folgendes: damit die Achse des Kreisels sich vom Rande im oberen Punkte nicht trennt, mufs $P > 0$ sein. Falls beim äufseren Rollen $(\beta + \varepsilon) > \alpha$ und beim inneren Rollen $(\beta - \varepsilon) < \alpha$ ist, wird $P > 0$ sogar für $\omega_0 = 0$. Jedenfalls aber kann P immer positiv gemacht werden, wenn man nur dem ω_0 eine entsprechende Gröfse erteilt. Damit auch $Q > 0$ wird, mufs $P > 2\,GMgla \cdot \sin\alpha$ sein.

Wenn P und Q beide positiv sind, so wird der rollende Kreis sich nirgends vom Rande trennen.

Wenn bei positivem P die Gröfse $Q < 0$ ist, so wird sich die Achse des Kreisels vom Rande an der Stelle trennen, wo $\eta = \eta_1 = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{P}{-Q}}$ wird. Von diesem Punkte an bis zur nächsten Berührung mit dem Rande wird die Spitze der Achse auf einem horizontalen Kreise fortschreiten. Wenn die Bewegung des Kreisels widerstandslos vor sich ginge, so müfste die nächste Berührung an der Stelle $\eta = -\eta_1$ eintreten. Von da an wird dann der rollende Kreis weiter längs des Randes nach oben rollen und zwar von der Stelle $-\eta_1$ durch die Stelle $\eta = 0$ hindurch bis zur Stelle η_1, wo wieder eine Trennung vom Rande stattfinden wird. In Wirklichkeit aber werden, infolge des Widerstandes (durch Reibung in der Pfanne, Widerstand der Luft), den die Bewegung findet, die Berührungs- und Trennungs-Stellen sich allmählich verschieben und zwar so, dafs bei der ersten Berührung $\eta = \eta_1' < \eta_1$, bei der folgenden $\eta = \eta_1'' < \eta_1'$ u. s. w. wird. —

Nach den Formeln (6) und (9) läfst sich die Reibungskraft in der Form

$$F = -\frac{CMglc}{R^2 J} \sin\alpha \cdot \sin\eta$$

ausdrücken. Damit nun kein Gleiten stattfindet, mufs $F < \lambda\varkappa$ sein und deshalb die Differenz

$$\lambda a^2 - 2\frac{CMglca^2}{R^2 J\varkappa} \sin\alpha \cdot \sin\frac{\eta}{2} \cdot \cos\frac{\eta}{2}$$

längs des ganzen Randes positiv bleiben.

Wir bezeichnen mit H die Gröfse $\frac{CMglca^2}{R^2 J\varkappa}$ und stellen die Differenz

$$P\cos^2\frac{\eta}{2} + Q\sin^2\frac{\eta}{2} - 2H\sin\alpha \cdot \sin\frac{\eta}{2} \cdot \cos\frac{\eta}{2}$$

in der Gestalt

$$P\left[\left(\cos\frac{\eta}{2} - \frac{H}{P}\sin\alpha \cdot \sin\frac{\eta}{2}\right)^2 + \frac{QP - H^2\sin^2\alpha}{P^2}\sin^2\frac{\eta}{2}\right]$$

dar. Damit dieser Ausdruck, bei positivem P nicht negativ wird, mufs die Differenz $(QP - H^2 \sin^2 \alpha) > 0$ sein. Auf Grund von (11) kann man schreiben:

$$P^2 - 2PMglaG \cdot \sin\alpha - H^2 \sin^2\alpha$$
$$= (P - MglaG \sin\alpha)^2 - M^2 g^2 l^2 a^2 \sin^2\alpha \left(G^2 + \frac{C^2 c^2 a^2}{R^4 J^2 \varkappa^2}\right).$$

Wir finden also:

$$P - MglaG \cdot \sin\alpha \text{ muss } > MglaG \cdot \sin\alpha \sqrt{1 + \frac{C^2 c^2 a^2}{R^4 J^2 G^2 \varkappa^2}}$$

sein.

Aus dem Gesagten kann man folgendes ersehen:

Beim Rollen des Stabes des Kreisels aufserhalb oder innerhalb eines kreisförmigen exzentrischen Randes (α ist die Exzentrizität) wird weder eine Trennung des Stabes vom Rande noch ein Gleiten eintreten, wenn P eine positive Gröfse gröfser als

$$2MglaG \cdot \sin\alpha \left\{1 + \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{C^2 c^2 a^2}{R^4 J^2 G^2 \varkappa^2}} - 1\right)\right\}$$

ist.

§ 3.

Auf analogem Wege können die Bedingungen des Rollens ohne Gleiten längs beliebiger sphärischer d. h. ganz auf der Kugel gelegener Randkurven aufgestellt und behandelt werden; natürlich werden diese Bedingungen je nach der Gestalt der Randkurve eine mehr oder minder verwickelte Form annehmen.

Zu allererst stellt sich die Frage nach dem Zusammenhange zwischen v und ω, folglich auch nach der Gestalt desjenigen Gliedes in dem Ausdrucke D, welches von dem Gliede $Av\omega$ herrührt. Man kann eine allgemeine Bemerkung über den Ausdruck von v in ω machen, nämlich: dieser Ausdruck hängt von drei Gröfsen ab: vom sphärischen Radius ε des rollenden Kreises, von der geodätischen Krümmung der sphärischen Randkurve im Berührungspunkte und vom Radius R.

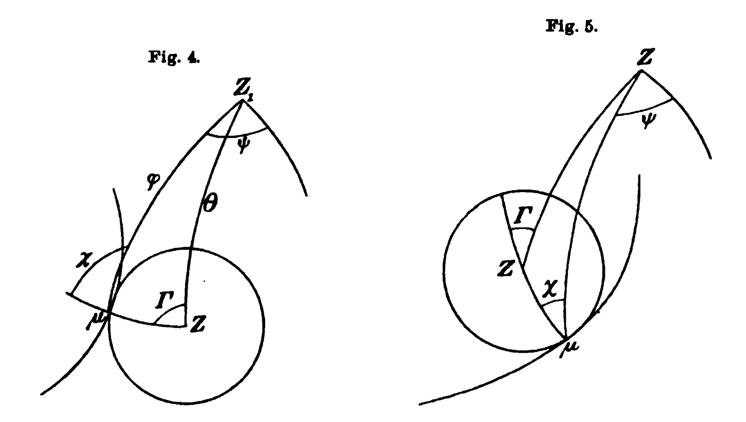
Bei der Bildung dieses Ausdruckes werden wir ebenso verfahren wie im Falle des Kreisrandes. Auf der Kugel vom Radius 1, die ihren Mittelpunkt im Unterstützungspunkte hat, denken wir uns die Durchschnittslinien mit Kegelflächen, die ihre Spitzen im Unterstützungspunkte besitzen und als Leitlinien die sphärische Randkurve und den rollenden Kreis haben.

In den Fig. 4 und 5 sind zwei Winkel Γ und χ markiert; der Punkt μ hat die sphärischen Koordinaten φ und ψ. Nach den

bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie können wir schreiben:

$$\sin \Gamma \cdot \sin \theta = \sin \chi \cdot \sin \varphi \tag{12}$$

$$\cos \theta = \cos \varepsilon \cdot \cos \varphi \mp \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi \cdot \cos \chi, \tag{13}$$



wobei sich das obere Zeichen auf die Fig. 4, das untere auf die Fig. 5 bezieht.

Aus der bekannten Differentialgleichung der sphärischen Kurve

$$\frac{d\varphi}{\sin\varphi \cdot d\psi} = \operatorname{tg}\chi$$

folgt:

$$\sin\chi = \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\varphi\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2}} \tag{14}$$

$$\cos\chi = \frac{\sin\varphi \cdot \frac{d\psi}{d\varphi}}{\sqrt{1+\sin^2\varphi\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2}}, \tag{15}$$

wo $d\sigma = \sqrt{(d\varphi)^2 + \sin^2\varphi\,(d\psi)^2}$ und dabei $v = R\frac{d\sigma}{dt}$ ist.

Aus den Formeln (8), (12) und (14) ergiebt sich:

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = -\,\omega \cdot \sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{d\sigma}. \tag{16}$$

Andererseits erhalten wir aus den Gleichungen (13) und (15):

$$\cos\theta = \cos\varepsilon \cdot \cos\varphi \mp \sin\varepsilon \cdot \frac{\sin^2\varphi \cdot \frac{d\psi}{d\varphi}}{\frac{d\sigma}{d\varphi}}$$

und indem wir beide Seiten nach t differentiieren, finden wir einen zweiten Ausdruck für $\frac{d\cos\theta}{dt}$:

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = -\frac{d\varphi}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dt}\cdot$$

(17) $$\left\{\cos\varepsilon\cdot\sin\varphi \pm \sin\varepsilon\cos\varphi\frac{\sin\varphi\frac{d\psi}{d\varphi}}{\frac{d\sigma}{d\varphi}} \pm \sin\varepsilon\cdot\sin\varphi\frac{d\left(\sin\varphi\cdot\frac{d\psi}{d\sigma}\right)}{d\varphi}\right\}.$$

Durch Vergleich beider Ausdrücke (16) und (17) folgt:

(18) $$\omega = \frac{d\sigma}{dt}\left[\cos\varepsilon \pm \sin\varepsilon\left\{\frac{\cos\varphi\frac{d\psi}{d\varphi}}{\frac{d\sigma}{d\varphi}} + \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin\varphi\frac{d\psi}{d\varphi}}{\frac{d\sigma}{d\varphi}}\right)\right\}\right].$$

Man kann sich überzeugen, daſs der Ausdruck in den geschweiften Klammern { } gleich

$$\frac{2\cos\varphi\cdot\frac{d\psi}{d\varphi} + \cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\cdot\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^3 + \sin\varphi\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}}{\left(1+\sin^2\varphi\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2\right)^{3/2}}$$

ist. Das ist aber gerade die geodätische Krümmung der Projektion der Randkurve auf die Kugel vom Radius 1; wenn wir mit $\frac{1}{\varrho}$ die geodätische Krümmung der Randkurve im entsprechenden Punkte der Kugel vom Radius R bezeichnen, so ist der betreffende Ausdruck gleich $\frac{R}{\varrho}$, und wir erhalten also:

$$\omega = \frac{d\sigma}{dt}\left(\cos\varepsilon \pm \sin\varepsilon\cdot\frac{R}{\varrho}\right)$$

und

(19) $$v = R\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\omega}{\frac{\cos\varepsilon}{R} \pm \frac{\sin\varepsilon}{\varrho}}.$$

Um die Richtigkeit der abgeleiteten Formeln zu prüfen, wenden wir sie auf den Kreis vom sphärischen Radius β an. In diesem Falle hat der Radius der geodätischen Krümmung die konstante Gröſse $R\cdot\operatorname{tg}\beta$ folglich ist

$$v = \frac{\omega R\sin\beta}{\sin(\beta\pm\varepsilon)},$$

was gerade mit unserer früheren Formel (10) übereinstimmt.

Für jede Randkurve läſst sich die Gröſse D folgendermaſsen ausdrücken:

$$D = \frac{A}{\frac{\cos\varepsilon}{R} \pm \frac{\sin\varepsilon}{\varrho}} + (C-A)R\cos\varepsilon.$$

Falls sich auf dem Rande eine Ausbuchtung befindet, in die der rollende Kreis gerade bequem hineinpaſst (dazu ist es nötig, daſs der Radius der geodätischen Krümmung in dieser Ausbuchtung wenig verschieden von $R \operatorname{tg} \varepsilon$ ist), so haben die beiden Ausdrücke $\frac{\cos\varepsilon}{R}$ und $\pm \frac{\sin\varepsilon}{\varrho}$ verschiedene Vorzeichen und das erste Glied des Ausdruckes D wird daher einen sehr groſsen positiven Wert annehmen. Hieraus folgt, daſs bei beliebiger Winkelgeschwindigkeit, mag sie noch so klein sein, der Kreisel in den Ausbuchtungen sich vom Rande nicht trennen wird, da hier die Gröſse λa^2 sicher positiv sein wird.

Wenn sich aber auf dem Rande Spitzen mit unendlich kleinen Radien der geodätischen Krümmung befinden, so wird das erste Glied des Ausdruckes D zu Null (da ϱ gleich Null gesetzt werden kann) und D nimmt die Gröſse $(C - A) R \cos\varepsilon$ an.

Wenn dabei der Kreisel so beschaffen ist, daſs $C = A$ ist, so wird $D\omega^2$ gleich Null. Unter diesen Bedingungen kann leicht der Stab des Kreisels an den Spitzen von dem Rande abspringen, da hier die Drehungsbewegung zum Drucke des Stabes auf den Rand nichts beiträgt.

Noch einmal die richtige Knickformel!

Von J. Kübler in Eſslingen.

Die verschiedenen Einwendungen gegen meine Knickungstheorie veranlassen mich, auf diesen Gegenstand hier noch einmal zurückzukommen, teils um durch neue Gesichtspunkte dergleichen Einwendungen überhaupt den Boden zu entziehen, teils aber auch um ein Übersehen richtig zu stellen, welches mir bei der Berechnung des Biegungspfeils f und bei der Anwendung meiner Theorie der vollkommen elastischen Stäbe auf die nicht vollkommen elastischen Baustoffe der Technik unterlaufen ist. Weil ich dabei mich vollständig auf die früher gegebene Entwickelung beziehe und überall dieselben Bezeichnungen beibehalten habe, so kann ich — zu Gunsten der gröſstmöglichen Übersichtlichkeit — mich kurz fassen, wie folgt:

Wenn der ursprünglich gerade, elastische Stab vom Querschnitt F und der freien Knicklänge l in seiner Längsrichtung zentrisch mit P gedrückt wird, so erfährt er unter allen Umständen die Pressung $\frac{P}{F}$ und infolgedessen die Zusammendrückung $\frac{P}{EF} = \varepsilon_0$, die unter Beibe-

haltung meiner früheren Bezeichnungen auch $= \frac{P}{EJ}\frac{J}{F} = n^2 i^2$ gesetzt werden kann. Wird dieser Druck grofs genug, so erleidet der Stab erfahrungsmäfsig auch noch eine Biegung vom Pfeil f. Eine solche Biegung mufs notwendiger Weise angenommen werden, wenn man es nicht mit dem besonderen Fall eines nur labilen Gleichgewichtszustandes zu thun haben will. Denn selbst, wenn es auch praktisch möglich wäre, durch alle Sorgfalt und künstliche Mittel alles fernzuhalten, was eine Biegung irgendwie begünstigen könnte, so würde ein solcher Zustand in der Technik doch nicht weiter in Betracht kommen, weil durch irgend einen Zufall, also beim geringfügigsten Anlafs, der Stab aus diesem künstlich herbeigeführten, labilen Gleichgewichtszustand überspringen würde in den stabilen Gleichgewichtszustand, mit dem in der Praxis immer gerechnet werden mufs. Ja es mufs, im Hinblick auf diesen stabilen Gleichgewichtszustand, diese Biegung mit dem gröfsten Wert, den sie überhaupt annehmen kann, in Rechnung gestellt werden, weil nur dann die gröfstmögliche Wirkung mit dem geringsten Aufwand von Kraft erzielt wird. Es ist deshalb diese Biegung in derjenigen Ebene anzunehmen, für welche der Stabquerschnitt den geringsten Widerstand entgegensetzt, d. i. die kleinste Steifigkeit besitzt; denn diese gröfste Biegung erzeugt alsdann im Bruchquerschnitt, d. i. im vorliegenden Fall in der Stabmitte, auch die gröfstmögliche Biegungsspannung $\pm \frac{M}{W} = \pm \frac{Pf}{W}$, wenn unter W das kleinste Widerstandsmoment des Stabquerschnitts verstanden wird, und diese gröfstmögliche Biegungsspannung giebt addiert zu der obengenannten Pressung $\frac{P}{F}$ die gröfstmögliche Kantenpressung beziehungsweise Kantenspannung $k = \frac{P}{F} \pm \frac{Pf}{W}$, welche vom Druck P herbeigeführt werden kann. Wird also unter k insbesondere der Knick-Koeffizient des betreffenden Baustoffes verstanden, so hat man aus Gleichung $k = \frac{P}{F} \pm \frac{Pf}{W} = \frac{P}{F}\left(1 \pm \frac{ef}{i^2}\right)$ *als kleinsten Druck P, welcher die Knickung des Stabes herbeiführen kann und im allgemeinen auch herbeiführen wird:*

$$P = \frac{kF}{1 \pm \frac{ef}{i^2}}.$$

Was den Biegungspfeil f betrifft, so ist derselbe rechnungsmäfsig bestimmt, insbesondere, wenn es sich um Baustoffe handelt, die innerhalb der Belastungsgrenzen beim Knickvorgang als vollkommen elastisch angesehen werden dürfen. Obgleich kein Baustoff streng genommen diese Eigenschaft besitzt, umsomehr als die Belastung beim Knickvor-

gang bis zum Bruch hinaufreicht, so soll doch — aber mit dem Vorbehalt späterer Richtigstellung — zunächst angenommen werden, dafs im Bereiche des Knickvorganges die Dehnungen proportional seien den Spannungen, durch welche sie hervorgebracht werden.

Unter dieser Annahme eines vollkommen elastischen Stabes findet sich, dafs die im allgemeinen gebogene Mittellinie des zentrisch gedrückten Stabes nach der Gleichung

$$y = f(1 - \cos ns\sqrt{\ }) = 2f \sin^2 \frac{ns}{2}\sqrt{\ }$$

geformt ist. Diese Gleichung giebt wohl Aufschlufs über die geometrische Form der gebogenen Mittellinie, nicht aber auch über den statischen Zustand des gedrückten Stabes, denn sie würde ebenso heifsen, wenn von der Druckspannung $\frac{P}{F}$ überhaupt abgesehen worden wäre. Im letzteren Fall würde sie aber auch den statischen Zustand im Stab richtig zum Ausdruck bringen, weil jetzt nur noch Biegung vorhanden wäre, die sich ohne weiteres geometrisch darstellt. Für diesen Sonderfall, der aber in Wirklichkeit nicht möglich ist, weil gerade der darin fehlende Druck P und damit auch die Druckspannung $\frac{P}{F}$ doch unter allen Umständen auftreten müfste, ich wiederhole: für diesen Sonderfall wäre $y = f(1 - \cos ns\sqrt{\ })$ nicht nur die geometrische Gleichung, sondern sie würde auch den statischen Zustand dieses Sonderfalls $\frac{P}{F} = 0$ richtig ergeben und müfste deshalb für jedes Wertsystem s, y erfüllt sein. Insbesondere würde sich für die zusammengehörigen Koordinaten $s = \frac{l}{2}$ und $y = f$ der Stab-Enden aus ihr die Bedingung: $f = f\left(1 - \cos \frac{nl}{2}\sqrt{\ }\right)$ ergeben, die hiernach für jedes f und also unabhängig von f erfüllt wäre mit $\cos \frac{nl}{2}\sqrt{\ } = 0$.

Weil l die freie Knicklänge sein soll, so würde sich daraus unzweideutig für $\frac{nl}{2}\sqrt{\ } = \frac{\pi}{2}$ ergeben und weil ferner für kleine f, um die es sich bei den hier in Rede stehenden, nicht stark federnden Stäben allein handelt, die Wurzelgröfse $\sqrt{\ }$ von 1 nicht merklich verschieden ist, so hätte man für diesen Sonderfall also einfach: $\frac{nl}{2} = \frac{\pi}{2}$, d. i. die Eulersche Gleichung: $P = \frac{\pi^2}{l^2} EJ$.

Zur Eulerschen Gleichung kommt man hiernach also nur mit der ganz willkürlichen und statisch unmöglichen Annahme, dafs von der Druckspannung $\frac{P}{F}$ abgesehen wird. Dabei wäre $\frac{\pi}{2}$ der einzige, aber

zugleich auch der gröfste Wert, den $\frac{nl}{2}\sqrt{}$ überhaupt annehmen kann, d. h. $P = \frac{\pi^2}{l^2} EJ$ wäre der kleinste Druck, welcher die Knickung herbeiführen würde (thatsächlich mufs er aber noch entsprechend kleiner ausfallen, durch das Hinzukommen der hier aufser Acht gelassenen Druckspannung $\frac{P}{F}$).

Für einen kleineren Druck, als diese Knickkraft P, wäre die Bedingung aber nur erfüllt mit $f = 0$; daraus folgt, dafs ein kleinerer Druck als die Knickkraft überhaupt keine Biegung hervorrufen würde, wenn es möglich wäre, alle Umstände mit mathematischer Genauigkeit vom Stab fernzuhalten, die irgendwie eine Biegung begünstigen könnten; damit hängt die fast plötzliche Knickung der steifen Stäbe zusammen.

Immer noch, wie bisher, einen vollkommen elastischen Stab vorausgesetzt, habe ich weiter gefunden, dafs in ähnlicher Weise wie vorhin:

$$y_1 = f_1(1 - \cos ns\sqrt{}) = 2 f_1 \sin^2 \frac{ns}{2}\sqrt{}$$

die Gleichung der Mittellinie des künstlich mit dem Moment $M_1 = P(f_1 - y_1) = Pf_1 \cos ns\sqrt{}$ gebogenen Stabes ist, den ich in diesem Zustand mit gestrichelter Linie dargestellt habe und dafs der so vorbereitete Stab vollkommen in den thatsächlichen Zustand des zentrisch mit P gedrückten Stabes übergeht, wenn er in seinen Enden gelenkartig festgehalten, im übrigen aber ganz sich selbst überlassen wird. Denn alsdann wird der Stab in dem Bestreben, seine ursprünglich gerade Form wieder anzunehmen, durch die Konstanz seiner Bogensehne $2a$ gehindert, indem er sich gegen die so gebildeten Widerlager stemmt und die Kämpferdrücke P hervorruft. Durch diesen Druck P, der somit jetzt und zwar zentrisch im Stab herrscht, wird seine Mittellinie aber kürzer und nimmt infolgedessen, bei gleichbleibender Sehne $2a$, den Pfeil f an, vorausgesetzt, dafs für den Pfeil f_1 der künstlichen Biegung die Gröfse $f_1 = \sqrt{i^2 + f^2}$[1]) gewählt worden ist. Hiervon wird man sich leicht überzeugen, wenn man im Auge behält, dafs, wie schon oben betont, bei den nicht stark federnden Stäben, auf die es hier allein ankommt, die Biegung und damit auch der Biegungspfeil f immer nur verhältnismäfsig gering sind.

Die Gleichung:

$$y_1 = \sqrt{i^2 + f^2}\,(1 - \cos ns\sqrt{}) = 2\sqrt{i^2 + f^2} \sin^2 \frac{ns}{2}\sqrt{},$$

1) nicht $\sqrt{2i^2 + f^2}$, wie früher irrtümlich angegeben, weil der Druck allmählich von 0 bis P geht und deshalb die Zusammendrückung nur mit der Hälfte in Rechnung kommt.

welche man damit erhält, ist aber jetzt nicht mehr nur die geometrische Gleichung der gebogenen Mittellinie des Stabes im gestrichelt angegebenen Zustand, sondern weil es dabei sich allein um Biegung handelt, so giebt sie auch diesen gestrichelt dargestellten Zustand des Stabes statisch richtig an. Letzterer ist aber nicht der Zustand, in dem der zentrisch gedrückte Stab sich thatsächlich befindet, sondern er wird in diesen erst versetzt durch die Erteilung der Druckspannung $\frac{P}{F}$, was in obiger Gleichung dadurch zum Ausdruck gebracht wird, daſs die Ordinaten y_1 übergehen in die Ordinaten y des gedrückten Stabes. Nebenbei gesagt nimmt also der zentrisch gedrückte Stab vom Biegungspfeil f durch die Befreiung seiner Mittellinie von der Druckspannung $\frac{P}{F}$ unter sonst gleichen Umständen den Pfeil $\sqrt{i^2+f^2}$ an; dabei wird die Mittellinie des Stabes von der Länge l um $n^2 i^2 l$ verlängert.

Nach Vorstehendem ist also

$$y = \sqrt{i^2+f^2}(1-\cos ns\surd) = 2\sqrt{i^2+f^2}\sin^2\frac{ns}{2}\surd$$

die Gleichung, welche den statischen Zustand des zentrisch gedrückten Stabes richtig angiebt. Sie ist erfüllt für jedes Wertsystem der Koordinaten s und y und muſs insbesondere auch erfüllt sein für die Koordinaten $s=\frac{l}{2}$ und $y=f$ der Stab-Enden. Hieraus ergiebt sich die Bedingungsgleichung: $f = 2\sqrt{i^2+f^2}\sin^2\frac{nl}{4}\surd$, aus welcher rechnungsmäſsig der Biegungspfeil als

$$f = i\frac{2\sin^2\frac{nl}{4}\surd}{\sqrt{1-4\sin^4\frac{nl}{4}\surd}} = i\operatorname{tg}\psi$$

hervorgeht, wenn wie früher zur Abkürzung für

$$2\sin^2\frac{nl}{4}\surd = 1-\cos\frac{nl}{2}\surd = \sin\psi$$

gesetzt wird.

Die vorstehenden, bereits früher ausführlicher gegebenen Entwickelungen beruhen, wie nochmals betont wird, auf der Voraussetzung — die stillschweigend auch bei Herleitung der Eulerschen Gleichung gemacht worden ist —, daſs nämlich der Stab vollkommen elastisch sei. Nun sind aber die Baustoffe, um die es in der Technik sich handelt, durchaus nicht vollkommen elastisch, sondern es wachsen die Dehnungen, beziehungsweise Zusammendrückungen, mehr oder weniger rascher an als die Spannungen bezw. Pressungen, durch welche sie hervorgerufen werden und zwar nach Gesetzen, die jedem Baustoff eigen-

tümlich sind und die sich selbst beim gleichen Baustoff ändern, je nach den verschiedenen Belastungsgrenzen, die jeweils in Betracht kommen.

So verschieden aber und so verwickelt auch immer diese Gesetze für die verschiedenen Baustoffe sein mögen, so läfst sich doch für alle gemeinsam behaupten, dafs durch das raschere Anwachsen der Dehnungen, worin auch die bleibenden Dehnungen inbegriffen sind, jedenfalls die Biegung besonders in der Gegend der Stabmitte, wesentlich gröfser ausfällt. Der Biegungspfeil wird also dementsprechend gleichfalls mehr oder weniger gröfser ausfallen, je nach den diesbezüglichen Eigenschaften des betreffenden Baustoffes, während der Trägheitsradius $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$, der mit seinem Werte i dem Werte von f (in der Bedingungsgleichung für f) gegenübersteht, als nur vom Querschnitt abhängig, derselbe bleibt wie beim vollkommen elastischen Stab. Beachtet man noch, dafs es sich überhaupt nur um geringe Biegungen handelt und es deshalb auch — besonders im Hinblick auf alle die verwickelten und anders nicht besser zu fassenden Nebenumstände — von wenig Belang sein kann, ob für die bei Annahme der Proportionalität giltige Cosinuslinie, eine etwas andere Form für die gebogene Stabmittellinie gesetzt wird oder nicht, so wird es richtig genug erscheinen, dafs in der Bedingungsgleichung für den Pfeil einfach ein entsprechend gröfserer Pfeil eingestellt wird, der aus den besonderen Eigenschaften des nicht vollkommen elastischen Stabes entwickelt worden ist. Was diese Entwickelung anbelangt, so kann dieser gröfsere Gesamtpfeil f nämlich zusammengesetzt gedacht werden aus 2 Teilen, wovon der eine Teil f_e der elastische und der andere f_u der unelastische Bestandteil sein soll. Der Effekt beim Knickvorgang ist alsdann derselbe, wie wenn der Stab ursprünglich schon mit dem kleinen Anfangspfeil f_u gleich dem unelastischen Bestandteil gebogen gewesen wäre und zwar, nach dem Obengesagten, nahezu nach der Form:

$$y_u = f_u (1 - \cos ns\sqrt{}) = 2 f_u \sin^2 \frac{ns}{2}\sqrt{}.$$

Der elastische Teil, der sich an diesen letzteren aufbaut, hat dann ebenso, hier aber genau, die Form:

$$y_e = f_e (1 - \cos ns\sqrt{}) = 2 f_e \sin^2 \frac{ns}{2}\sqrt{},$$

so dafs also die Mittellinie des zentrisch gedrückten Stabes geformt ist nach der Summe von beiden, mit $y = y_u + y_e$ und $f = f_u + f_e$, also nach:

$$y = f(1 - \cos ns\sqrt{}) = 2 f \sin^2 \frac{ns}{2}\sqrt{}.$$

Man bringt nun diesen Stab, ähnlich wie oben, in den gestrichelten Zustand, indem man also seine Mittellinie von der Druckspannung $\frac{P}{F}$ befreit. Beim vollkommen elastischen Stab geschieht das, wie wir gesehen haben, einfach durch Umsetzung der Verlängerung $n^2 i^2 l$ seiner Mittellinie in den dadurch bedingten gröfseren Pfeil, der infolgedessen von f auf $\sqrt{i^2+f^2}$ vergröfsert wird. Beim unvollkommen elastischen Stab wird die Stabmittellinie, bei der hier ähnlich vorzunehmenden Prozedur, durch ihre Befreiung von der Druckspannung, gleichfalls um $n^2 i^2 l$ verlängert; da aber im vorliegenden Fall der Stab angesehen werden kann, wie wenn er mit dem Anfangspfeil f_u = dem Überschufs des Gesamtpfeils f über den als vollkommen elastisch gedachten Bestandteil f_e behaftet wäre, so verhält er sich von da ab genau wie der vollkommen elastische Stab, d. h. dieser vollkommen elastische Teil f_e wird durch die Verlängerung $n^2 i^2 l$ auf $\sqrt{i^2+f_e^2}$ vergröfsert, so dafs der Gesamtpfeil $f_u + f_e$ auf $f_1 = f_u + \sqrt{i^2+f_e^2}$ vergröfsert wird. Die Gleichung der Stabmittellinie im gestrichelt angedeuteten Zustand heifst also hier:

$$y_1 = f_1 (1 - \cos n s \sqrt{\ })$$

und mithin die Gleichung, welche den Zustand im gedrückten Stab richtig angiebt:

$$y = f_1 (1 - \cos n s \sqrt{\ }) = 2 [f_u + \sqrt{i^2 + f_e^2}] \sin^2 \frac{ns}{2} \sqrt{\ }.$$

Mit den Koordinaten $s = \frac{l}{2}$ und $y = f$ erhält man also hieraus, ähnlich wie oben, als Bedingungsgleichung für den Gesamtpfeil f:

$$f = 2 [f_u + \sqrt{i^2 + f_e^2}] \sin^2 \frac{nl}{4} \sqrt{\ }.$$

Setzt man $\frac{f_e}{f} = \mu$, wo alsdann μ ein ächter Bruch ist, der den Elastizitätsgrad des betreffenden Baustoffs angiebt, so ist $f_e = \mu f$ und also $f_u = (1 - \mu) f$.

Damit erhält man, indem man nach f auflöst, für den Gesamtpfeil beim unvollkommen elastischen Stab:

$$f = i \frac{2 \sin^2 \frac{nl}{4} \sqrt{\ }}{\sqrt{\left[1 - 2(1-\mu) \sin^2 \frac{nl}{4} \sqrt{\ }\right]^2 - 4 \mu^2 \sin^4 \frac{nl}{4} \sqrt{\ }}} = i \operatorname{tg} \psi_1,$$

wo aber jetzt, beim unvollkommen elastischen Stab, im Gegensatz zu früher, für

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{2 \sin^2 \frac{nl}{4} \sqrt{\ }}{\sqrt{\left[1 - 2(1-\mu) \sin^2 \frac{nl}{4} \sqrt{\ }\right]^2 - 4 \mu^2 \sin^4 \frac{nl}{4} \sqrt{\ }}}$$

zu setzen ist. Mit $\mu = 1$, d. i. volllkommener Elastizität, ergeben sich daraus natürlich die für den vollkommen elastischen Stab giltigen Werte von $\operatorname{tg}\psi$ und f.

μ ist ebenso wie E und $k_0 = mk$ Materialkoeffizient. Diese Materialkoeffizienten beziehen sich speziell auf die Knickung und sind also durch sachgemäfse Knickversuche zu bestimmen. Erst wenn diese Knickkoeffizienten als Durchschnittswerte festgestellt sind, kann man den Abminderungskoeffizienten α für die verschiedenen Baustoffe als Funktion von $\frac{l}{i}$ berechnen und die Werte tabellarisch zusammenstellen.

Zu dieser Berechnung dienen die bereits früher hierfür gegebenen Formeln, nachdem sie den obigen Ausführungen entsprechend richtig gestellt sind, wie folgt:

Es ist jetzt

$$\alpha = \frac{1}{\frac{e}{i}\operatorname{tg}\psi_1 + 1} \quad \text{bezw.} \quad \frac{\frac{k_1}{k}}{\frac{e}{i}\operatorname{tg}\psi_1 - 1}$$

und

$$\frac{l}{i} = \left(\frac{nl}{4}\sqrt{}\right)\sqrt{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{16E}{mk}}$$

zu setzen.

Dabei liegt $\frac{e}{i}$ für die verschiedenen Querschnittsformen zwischen den Grenzen 1,2 und 2,4 und $\frac{nl}{4}\sqrt{}$ kann alle Werte zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ annehmen.

Mit Vorstehendem glaube ich den Beweis erbracht zu haben, dafs der Biegungspfeil bei der Knickung rechnungsmäfsig bestimmt ist, und zwar mit seinem mathematisch genauen Wert für vollkommen elastische Stäbe. Aber auch für unvollkommen elastische Stäbe mufs der rechnungsmäfsig hierfür gefundene Biegungspfeil als vollkommen genau genug für alle praktischen Aufgaben angesehen werden, wenn die Durchschnittswerte der Knickkoeffizienten μ, E und $k_0 = mk$ durch sachgemäfse Versuche mit den verschiedenen Baustoffen ebenso bestimmt sind, wie es derartige Materialkoeffizienten für andere Belastungsarten auch sein müssen.

Efslingen, im September 1901.

Die Horopterkurve.

Von Fred. Schuh in Amsterdam.

Einleitung.

Das Auge entwirft von der Aufsenwelt auf die Netzhaut eine eigentliche Perspektive, deren Zentrum der *Knotenpunkt* K des Auges genannt wird. Wir nehmen jedenfalls als mathematische Idealisierung an, dafs dies in strengem Sinne der Fall sei, indem wir von allen störenden Einflüssen (sphärischer und chromatischer Aberration) absehen. Auch nehmen wir an, dafs das Auge sich als starrer Körper bewegen kann und dabei der Knotenpunkt fest bleibt (in Wirklichkeit liegt der Knotenpunkt etwa 2 mm vor dem Augendrehpunkt). Dafs die Netzhaut keine Ebene ist, kommt nicht in Betracht, weil wir nicht mit Netzhautpunkten, sondern vielmehr mit Strahlen durch den Knotenpunkt operieren werden, und der Netzhautpunkt uns nur als äufserer Orientierungspunkt des betreffenden Strahles dient.

Unter allen Augenstellungen ist eine bestimmte bevorzugt, die wir nach Listing die *primäre Augenstellung* nennen werden, während die übrigen Stellungen *sekundär* heifsen. Beide Augen nehmen ihre primäre Stellung ein, wenn wir, aufrecht stehend, horizontal geradeaus blicken, die beiden Gesichtslinien also horizontal und senkrecht auf $K_l K_r$ verlaufen (K_l und K_r sind die Knotenpunkte des linken und des rechten Auges).

Zwischen den Netzhautpunkten beider Augen, somit auch zwischen den Strahlen durch K_l und K_r, besteht eine Korrespondenz. *Nur Lichteindrücke, die auf korrespondierende Netzhautstellen fallen, werden als ein einziger Eindruck wahrgenommen.* Wir werden annehmen, dafs, wenn beide Gesichtslinien parallel sind, auch die korrespondierenden Strahlen durch K_l und K_r parallel sind, also die beiden Strahlenbündel K_l und K_r *kongruent* auf einander bezogen sind. Dafs dies aber nicht genau der Fall ist, hat Recklinghausen entdeckt; vielmehr gilt das folgende Gesetz: Haben beide Augen ihre primäre Stellung, so liegen korrespondierende Strahlen in derselben Ebene durch K_l und K_r, während die Meridiane (Ebenen durch die Gesichtslinien) der korrespondierenden Strahlen gleiche Winkel mit den scheinbar vertikalen Meridianen bilden; die scheinbar vertikalen Meridiane (die wir als vertikal zu sehen glauben) weichen nach Helmholtz von den wirklich vertikalen Meridianen um den Winkel $1^0 13'$ nach oben divergierend ab. Die Beziehung zwischen den korrespondierenden Strahlen ist also

nicht mehr kongruent, noch immer aber projektiv. Wir werden jedoch in dem Folgenden an der kongruenten Beziehung festhalten.

Fixieren wir (ohne den Kopf zu bewegen) einen Punkt F, den wir *Fixationspunkt* nennen, so richten wir die beiden Gesichtslinien auf F. Donders und Meifsner haben gefunden, dafs, wenn dieselbe Lage der Gesichtslinie zurückkehrt, immer das Auge dieselbe Stellung wieder einnimmt. *Bei festbleibender Gesichtslinie ist also eine Drehung um diese Linie nicht möglich.* Dieses Gesetz macht eine leichte Orientierung im Gesichtsfelde möglich. Welche Stellung das einzelne Auge bei bestimmter Gesichtslinie einnimmt, wird durch das folgende von Listing aufgestellte Gesetz angegeben: *„Die Stellung des Auges in einer Sekundärstellung wird gefunden, wenn dasselbe aus der Primärstellung in die Sekundärstellung übergeführt wird, durch Drehung um eine Achse, welche auf der primären und sekundären Richtung der Gesichtslinie senkrecht steht.“*

Die Versuche von Donders und Meifsner hatten schon gezeigt, dafs bei den Augenbewegungen die Interessen des binokularen Sehens (möglichst viele Punkte einfach zu sehen) vielfältig verletzt sind. Deshalb haben Fick und Wundt gemeint, dafs das Gesetz der Augendrehungen garnicht von einem optischen Prinzipe, sondern nur von der Bequemlichkeit der Augenmuskeln abhängen soll. Helmholtz dagegen hat nachgewiesen, dafs andere optische Interessen den Ausschlag geben, wie er sofort aus der Bildsamkeit des Muskelsystems vermutete; er hat gezeigt, dafs das Listingsche Gesetz am meisten dazu geeignet ist, die Orientierung möglichst sicher zu behalten, während der Fixationspunkt im Gesichtsfelde sich verschiebt, sodafs wir, trotz des Wechsels der Lichteindrücke auf die Netzhäute, die Objekte als ruhend anerkennen (Prinzip der leichtesten Orientierung). Wir verweisen hierüber auf Bd. II seiner Wissensch. Abh., worin er eingehend die Augenbewegungen und seine Versuche zur Bestätigung des Listingschen Gesetzes bespricht.

Durch den Fixationspunkt F ist die Lage beider Augen festgelegt. Die Raumpunkte, deren beide Bilder in korrespondierende Netzhautstellen fallen, liegen auf einer Kurve, die *Horopter* genannt wird. *Der Horopter ist also der Ort der Raumpunkte, die einfach gesehen werden. Zu jedem Fixationspunkt gehört ein Horopter.* Als Ort der Schnittpunkte korrespondierender Strahlen der beiden projektiven Bündel K_l und K_r *ist der Horopter eine Raumkurve dritter Ordnung durch* K_l *und* K_r, auch wenn man das Korrespondenzgesetz von Recklinghausen zu Grunde legt.

Wir werden die Beziehung der Strahlenbündel als kongruent annehmen, und uns die Gestalt (Windungssinn) des Horopters klar zu

machen versuchen. Es wird sich herausstellen, *dafs im allgemeinen der Horopter eine auf einem Kreiscylinder aufgerollte Tangenslinie ist.* Wir werden hierbei sowohl mit elementar projektiv-geometrischen Hilfsmitteln operieren, wie mit dem mehr abstrakten imaginären Kugelkreis. Doch können für das Verständnis die auf den Kugelkreis bezüglichen Paragraphen 2 und 5 des ersten Kapitels übergangen werden, während in den anderen Paragraphen von diesen Dingen nur ganz beiläufig die Rede sein wird.

Es ist klar, dafs der Horopter nur von der relativen Stellung beider Augen gegen einander abhängt, also von der *relativen Drehung.* Darunter verstehe ich die Drehung des rechten Auges, die korrespondierende Strahlen parallel stellt. Nun giebt es ∞^3 Fixationspunkte, also ∞^3 verschiedene relative Drehungen, während im ganzen auch nur ∞^3 relative Drehungen möglich sind. Hiermit ist natürlich nicht bewiesen, dafs auch zu jeder relativen Drehung ein Fixationspunkt gehört, aber jedenfalls braucht diese Drehung dazu keinen Gleichheitsbedingungen zu genügen, höchstens Ungleichheitsbedingungen.

Wir werden in dem ersten Kapitel annehmen, dafs alle relativen Drehungen möglich sind, und dann von dem Fixationspunkt vollständig abstrahieren. In dem zweiten Kapitel werden wir dann die Frage behandeln, ob und wie aus dieser Drehung der Punkt F bestimmt werden kann. Wir werden dabei unser Problem noch insofern idealisieren, dafs wir auch hinter dem Kopf gelegene Fixationspunkte zulassen, immer an dem Listingschen Gesetze festhaltend; hauptsächlich in den beiden letzten Paragraphen wird von dieser Idealisierung die Rede sein.

Erstes Kapitel.

Beziehung des Horopters zur relativen Augenstellung.

§ 1. Erzeugung durch kongruente Strahlenbündel.

Der Horopter ist bestimmt durch die relative Drehung, und diese wieder durch die relative Drehungsachse a, und den relativen Drehungswinkel β. Die beiden kongruenten Strahlenbündel betrachte ich als zwei kongruente Ebenenbüschel, deren Trägerinnen a_l und a_r parallel zu a durch K_l und K_r verlaufen, während jede Ebene dieser Büschel einen Strahlenbüschel trägt. Die korrespondierenden Ebenen der Büschel a_l und a_r, die den Winkel β einschliefsen, schneiden einander in den Erzeugenden eines Kreiscylinders durch a_l und a_r. *Der Horopter ist also ein kubischer Kreis, d. h. er liegt auf einem Kreiscylinder.* Die Ebene E durch O, den Halbierungspunkt der Strecke K_lK_r, senkrecht

auf a, schneidet a_l und a_r in K_l' bzw. K_r', und den Kreiscylinder in einem Kreise R durch K_l' und K_r'; durch diese beiden Punkte wird der Kreis R in zwei Segmente geteilt, einen eigentlichen Teil, der den Winkel β, und einen uneigentlichen Teil, der den Winkel $\pi - \beta$ enthält.

Fassen wir nun zwei entsprechende Ebenen ins Auge, die einander in der Cylindererzeugenden k schneiden, während k den Kreis R in P' schneidet. In diesen beiden Ebenen liegen zwei kongruente Strahlenbüschel, die auf der Linie k zwei ähnliche Punktreihen ausschneiden, und zwar mit positiver oder negativer Ähnlichkeitskonstante c, je nachdem P' auf dem eigentlichen oder auf dem uneigentlichen Teil des Kreises R liegt. Beide Punktreihen haben im Endlichen einen Punkt P gemeinsam (außerdem noch den unendlich fernen Punkt P_∞), der auf der Horopterkurve liegt. In P schneiden sich zwei korrespondierende Halbstrahlen, oder ein Halbstrahl und die Verlängerung des korrespondierenden, je nachdem c positiv oder negativ ist. Dementsprechend unterscheiden wir den eigentlichen und den uneigentlichen Teil des Horopters, die sich auf die Ebene E in den eigentlichen und den uneigentlichen Teil des Kreises R projizieren. Die Schnittpunkte der *Medianebene*, der Ebene, die K_lK_r senkrecht halbiert, mit dem eigentlichen und dem uneigentlichen Teil des Kreises wollen wir mit A und B bezeichnen.

Damit P ein Horopterpunkt sei, müssen K_lP und K_rP dieselbe Neigung gegen E haben, also (Fig. 1):

$$\frac{P'P - K_l'K_l}{K_l'P'} = \frac{P'P - K_r'K_r}{K_r'P'},$$

wobei die Vorzeichen von $P'P$, $K_l'K_l$ und $K_r'K_r$ zu beachten sind. Projizieren wir jetzt P', K_l' und K_r' von A aus auf die Kreistangente in B in die Punkte P'', K_l'' und K_r'' (Fig. 2), so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $AK_l'P'$ und $AP''K_l''$ einerseits, und der Dreiecke $AK_r'P'$ und $AP''K_r''$ andrerseits:

$$K_l'P' : K_l''P'' = K_r'P' : K_r''P''.$$

Die Bedingung für P wird also, wenn man beachtet, daß $K_r'K_r = -K_l'K_l$ ist:

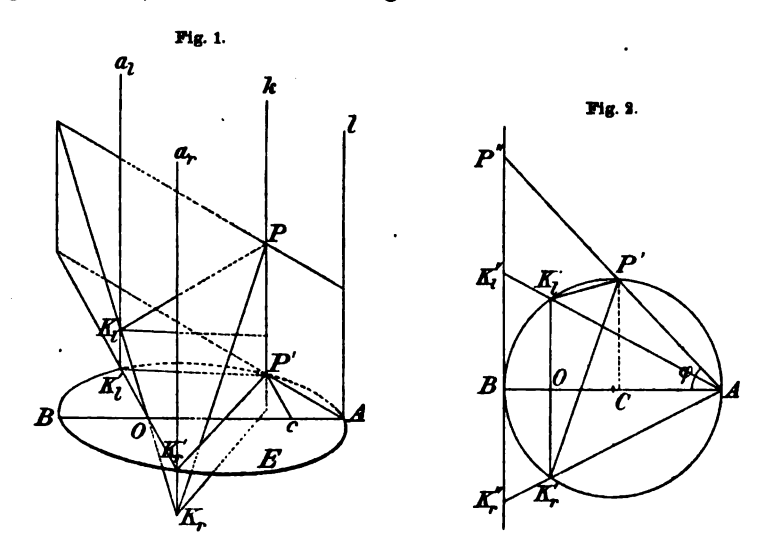
$$P'P(K_r''P'' - K_l''P'') = K_l'K_l(K_r''P'' + K_l''P'')$$

oder, da $K_l''P'' = K_l''B + BP''$ und $K_r''P = K_r''B + BP'' = -K_l''B + BP''$

$$\frac{P'P}{BP''} = \frac{K_l'K_l}{BK_l''} = \text{Constans}.$$

Hieraus sieht man, *dafs die Kurve durch B geht, und die Linie l durch A senkrecht auf der Ebene E Asymptote ist.* Die obige Formel drückt aus, *dafs die Projektion der Horopterkurve auf eine Ebene durch B senkrecht auf BA mittelst der Asymptote l eine Gerade ist, und zwar die Kurventangente in B.* Unter dem Projizieren mittelst l ist verstanden, dafs man das Lot, von P aus auf l gefällt, mit der betreffenden Ebene zum Schnitt bringt. Auch auf eine beliebige Ebene senkrecht auf BA projiziert sich die Kurve mittelst l in eine Gerade, die Sekante der Kurve ist; speziell in $K_l K_r$, wenn man die Ebene durch $K_l K_r$ hindurchlegt (Fig. 1).

Wenn von der Kurve der Kreiscylinder, der Punkt B und die Tangente in B, die willkürlich angenommen werden können, bekannt



sind, so kann man ihre Punkte konstruieren. Man bestimmt erst den Punkt A (als Gegenpunkt von B), also die Asymptote l; aus einem Punkte der Tangente in B fällt man das Lot auf l, das den Kreiscylinder in einem Kurvenpunkt schneidet. Hieraus folgt, *dafs die Gestalt des Horopters nur von dem Winkel γ abhängt, den die Tangente in B mit der Ebene E (senkrecht auf l) bildet;* wir werden γ die *Steilheit* des Horopters nennen. Seine absoluten Dimensionen sind dann weiter dem Radius r des Kreiscylinders proportional. Ist $\gamma = 0$ d. h. $K_l' K_l = 0$, so zerfällt der Horopter in den Kreis R und die Gerade l.

Die Höhe $P'P$ des Punktes P über die Ebene E läfst sich leicht durch den Winkel $P'AB = \varphi$ ausdrücken, nämlich:

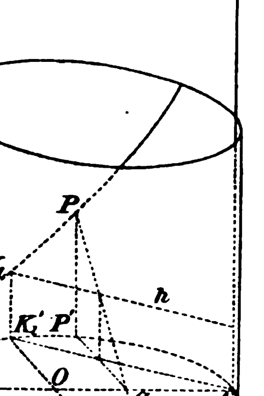
$$P'P = 2r \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \gamma .$$

Hieraus folgt, *dafs, wenn man den Cylinder abwickelt, der Horopter, von*

konstanten Faktoren abgesehen, eine Tangenslinie wird. Von B ab neigt sich die Kurve immer stärker gegen E.

Aus dem Vorhergehenden sieht man: *Die Linie AB durch O senkrecht auf $K_l K_r$ und auf der relativen Drehungsachse ist eine zweizählige Symmetrieachse der Kurve.* Dies geht auch sofort daraus hervor, dafs, wenn ich beide Strahlenbündel durch den Winkel π um BA drehe, ihre relative Stellung sich nicht ändert.

Fig. 3.



Es ist klar, dafs K_l und K_r keine ausgezeichneten Punkte der Horopterkurve sind. *Wählt man zwei andere, zu BA symmetrisch gelegene, Kurvenpunkte als Scheitel zweier Strahlenbündel, so sind diese Bündel durch die Kurve immer noch kongruent auf einander bezogen. Unsere Kurve ist also ∞^1 Mal als Horopter aufzufassen.*

Hieraus ist leicht die Tangente in einem Punkte P der Kurve zu bestimmen. Dazu wähle ich P und den symmetrisch gelegenen Punkt Q als Scheitel der erzeugenden Strahlenbündel. Mit QP, als Strahl des Bündels Q, korrespondiert die Tangente in P als Strahl des Bündels P, *also haben QP und die Tangente in P dieselbe Neigung gegen die Ebene E.* Die Tangente mufs auch noch den Kreiscylinder berühren, und ist damit also festgelegt.

Man kann die Konstruktion der Kurvenpunkte und -tangenten in eine Konstruktion vereinigen. *Durch K_l ziehe ich die Gerade h, die die Asymptote l senkrecht schneidet, und durch einen Punkt C von BA eine h schneidende Gerade, senkrecht auf BA; diese Gerade schneidet den Cylinder in zwei Kurvenpunkten P und Q, während die Tangenten in P und Q dieselbe Neigung gegen E haben wie CP.* (Fig. 3.)

In Fig. 3 ist die Horopterkurve gezeichnet. *K_l ist oberhalb, K_r unterhalb der Ebene E angenommen, und dementsprechend ist die Kurve links gewunden* (wie eine linkshändige Schraube); liegt K_l unterhalb E, so ist die Kurve rechts gewunden. Das Kurvenstück $K_l B K_r$ ist der uneigentliche Teil des Horopters.

§ 2. Beziehung des Horopters zum Kugelkreis.

Der Horopter zeichnet sich von der allgemeinen Raumkurve dritter Ordnung C_3 aus durch die Lage seiner unendlich fernen Punkte gegen den imaginären Kugelkreis C_2, den Kreis, in dem jede Kugel durch die unendlich ferne Ebene E_∞ geschnitten wird. Die beiden kongruenten Strahlenbündel schneiden E_∞ in zwei kongruenten Punktfeldern, deren drei gemeinschaftliche Punkte die Schnittpunkte des Horopters mit E_∞ sind. Diese kongruenten Punktfelder sind aufzufassen als projektive Punktfelder, bei denen der Kugelkreis C_2 sich selbst entspricht. Aufserdem ist dasselbe der Fall mit dem unendlich fernen Punkt P_∞ der relativen Drehungsachse a. Die Tangenten von C_2 durch P_∞ entsprechen entweder sich selbst, oder einander gegenseitig. Das letzte ist aber ausgeschlossen, weil man durch eine Drehung um a beide Punktfelder stetig in einander überführen kann, und also nicht plötzlich das gegenseitige Entsprechen der Tangenten durch P_∞ auftreten kann. (Das gegenseitige Entsprechen hat man, wenn die Punktfelder nicht kongruent, sondern symmetrisch sind.) Also entsprechen P_∞ und die beiden Berührungspunkte T_1 und T_2 der Tangenten durch P_∞ an C_2 sich selbst und sind deshalb die Schnittpunkte des Horopters mit E_∞. Nun ist aber $T_1 T_2$ die Polare von P_∞ in Bezug auf C_2, liegt also in einer Ebene senkrecht auf der relativen Drehungsachse a. Da nun T_1 und T_2 die beiden Kreispunkte dieser Ebene sind, so hat man:

Der Horopter geht durch die beiden Kreispunkte der Ebene, die senkrecht steht auf der einzigen reellen Asymptote.

Wir werden sofort sehen, dafs auch umgekehrt jede C_3, die E_∞ in den genannten Punkten schneidet, als Horopter aufzufassen ist.

Wir werden unser Resultat reell zu interpretieren versuchen. Wenn man durch die Horopterpunkte parallel zu a Geraden zieht, bekommt man einen Cylinder zweiter Ordnung, und zwar einen Kreiscylinder, da die unendlich ferne Gerade einer Ebene senkrecht auf a den Cylinder in den beiden Kreispunkten dieser Ebene schneidet. Wir finden also wie früher, dafs der Horopter auf einem Kreiscylinder gelegen ist. Das sagt aber nicht so viel aus wie die Bedingung, dafs der Horopter durch die Kreispunkte der zu a senkrechten Ebene geht. Wenn ich nun aber noch die Bedingung hinzufüge, *dafs die unendlich ferne Gerade m einer Ebene senkrecht auf a Sekante der Kurve ist*, so mufs die Kurve notwendig durch die Kreispunkte dieser Ebene hindurchgehen. Wir müssen also die reelle Bedeutung davon suchen, dafs eine reelle Gerade m Verbindungslinie zweier konjugiert-imaginären Punkte einer C_3 ist. Das werden wir erst für eine beliebige C_3 thun.

Wir konstruieren dazu mit dem Kurvenpunkt S als Spitze den Kegel zweiter Ordnung durch die C_3; die Kegelerzeugende l ist dann Sekante der Kurve. Weiter konstruieren wir die geradlinige Fläche F durch C_3, l und m, die Linie, von der untersucht werden soll, ob sie Sekante von C_3 ist. Nur wenn m Sekante ist, ist die Fläche F zweiter Ordnung (F_2). (Sind l und m keine Sekanten, so ist F sechster Ordnung; jeder Schnittpunkt von l oder m mit C_3 erniedrigt ihre Ordnung um eins.) Sei nun m eine Sekante; F_2 entsteht, wenn man durch jeden Kurvenpunkt P die Gerade g zieht, die l und m schneidet. Ist g_1 eine dieser Linien durch P_1, und legt man durch g_1 eine beliebige Ebene, so schneidet diese die Fläche F_2 in einer zweiten Geraden n. Weil nun der vollständige Schnitt von F_2 mit dem Kegel die Gerade l und unsere Kurve C_3 ist, so schneidet n den Kegel in zwei Punkten von C_3. Ich kann also n definieren als die Verbindungsgerade der beiden Punkte Q_1 und Q_2, die die Ebene durch g_1 außer P_1 noch mit C_3 gemeinsam hat. Die Fläche F_2 ist durch die Erzeugenden l, m und n desselben Systems bestimmt; sie enthält die Kurve C_3. Liegt nun umgekehrt C_3 auf der Fläche zweiter Ordnung durch l, m und n (n als Verbindungsgerade von Q_1 und Q_2 aufgefaßt), so ist m eine Sekante von C_3; denn jede Erzeugende von F_2 schneidet den vollständigen Schnitt (l und C_3) von Kegel und F_2 in zwei Punkten; da nun die Erzeugenden des Systems l, m, n die Gerade l nicht schneiden, schneiden sie C_3 zweimal. *Die Inzidenz von C_3 mit der Fläche zweiter Ordnung durch l, m und n ist also das Kriterium dafür, daß m eine Sekante (mit reellen oder konjugiert-imaginären Schnittpunkten) von C_3 ist.*

Wir wenden das Gefundene auf unsere Horopterkurve an. Als Spitze des Kegels wählen wir den reellen unendlich fernen Punkt P_∞ des Horopters, als Sekante l die reelle Asymptote; die Linie m, für die die Bedingung gesucht wird, daß sie Sekante ist, ist die unendlich ferne Gerade der Ebene senkrecht auf l. Die Geraden g sind die Lote aus Kurvenpunkten P auf die Asymptote l; lassen wir P dem unendlich fernen Punkt P_∞ sich nähern, so wird die Gerade die unendlich ferne Gerade g_1 einer Ebene E_1, die den Kreiscylinder längs l berührt. Durch g_1 legen wir eine Ebene, die C_3 in zwei Punkten schneidet, deren Verbindungslinie n ist; n ist also eine Sekante, parallel zu E_1. Die Fläche zweiter Ordnung durch l, m, n (die entsteht, wenn man aus den Punkten von n die Lote auf l fällt) enthält die Kurve C_3, d. h. C_3 projiziert sich mittelst l auf eine Ebene parallel zu E_1 in eine Gerade, die C_3 in P und Q schneidet. Die Gerade, die PQ senkrecht halbiert und l senkrecht schneidet, ist eine Symmetrieachse der Kurve. Wir haben früher gesehen, daß C_3 zwei Strahlenbündel, deren Scheitel

symmetrisch zu dieser Achse liegen, kongruent auf einander bezieht. Also finden wir

Jede C_8, die durch die beiden Kreispunkte einer Ebene senkrecht auf der reellen Asymptote geht, ist auf ∞^1 Weisen als Horopter zu betrachten.

Die Tangenten in den beiden Kreispunkten schneiden die Achse des Kreiscylinders in zwei symmetrisch zu E gelegenen Punkten, die von E eine Entfernung $\pm i \cdot 2r \operatorname{tg} \gamma = \pm K_l' K_l \cdot i \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\beta$ haben; E ist die im ersten Paragraphen betrachtete Ebene.

§ 3. Verschiedene Fälle bei der Erzeugung nach § 1.

Wir werden in diesem Paragraphen die verschiedenen besonderen Fälle, die möglich sind, aufzählen; diese zeichnen sich aus durch den relativen Drehungswinkel β, und die Lage der relativen Drehungsachse. Der Winkel β kann sein;

A. β von Null und π verschieden.

B. $\beta = 0$.

C. $\beta = \pi$.

Die relative Drehungsachse a kann zu $K_l K_r$ die folgenden Lagen haben:

I. a nicht senkrecht oder parallel zu $K_l K_r$.

II. a senkrecht auf $K_l K_r$.

III. a parallel zu $K_l K_r$.

Die Fälle A, B und C sind mit jedem der Fälle I, II und III zu kombinieren. Nur ist zu bemerken, dafs in dem Falle B die relative Drehungsachse unbestimmt ist, und also BI, BII und BIII identisch sind; deshalb schreiben wir dann nur B. Die verschiedenen Fälle sind nun:

AI. Der allgemeine Fall (in den beiden ersten Paragraphen behandelt).

AII. Der Horopter zerfällt in einen Kreis durch K_l und K_r in einer Ebene senkrecht auf a, und eine zu a parallele Gerade, die den Kreis in dem Punkte A der Medianebene trifft. Das Segment $K_l B K_r$ (B ist der Gegenpunkt von A) ist der uneigentliche Teil des Horopters.

AIII. Die Kurve zerfällt in die Gerade $K_l K_r$ und zwei auf $K_l K_r$ senkrecht stehende Geraden in Ebenen durch $K_l K_r$, die den Kugelkreis berühren (Minimalebenen). Diese Geraden schneiden $K_l K_r$ in zwei zu O (dem Halbierungspunkt von $K_l K_r$) symmetrisch gelegenen Punkten, die von O den Abstand $\pm i \cdot OK_l \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\beta$ haben. Die Strecke $K_l K_r$ ist der uneigentliche Horopterteil.

B. Der Horopter zerfällt in die ganze unendlich ferne Ebene und die Gerade $K_l K_r$, die Strecke $K_l K_r$ als uneigentlichen Teil.

CI. Die Kurve zerfällt in die unendlich ferne Gerade einer zu a senkrechten Ebene, und eine gleichseitige Hyperbel in der Ebene durch $K_l K_r$ parallel zu a. Beide Asymptoten der Hyperbel gehen durch O, die eine parallel zu a, die andere senkrecht darauf. Nur die Stücke der Hyperbel zwischen den Knotenpunkten und dem unendlich fernen Punkt von a gehören zu dem eigentlichen Teil des Horopters.

CII. Dieser Fall ist als Spezialfall, sowohl von AII als von CI anzusehen. Der Kreis des Falles AII artet in die Gerade $K_l K_r$ und die unendlich ferne Gerade der Kreisebene aus; die zu a parallele Gerade geht nun durch O. Andrerseits artet die Hyperbel des Falles CI in die Gerade $K_l K_r$ und die zu a parallele Gerade durch O aus. Die Kurve zerfällt also jetzt in drei Geraden, die weder durch einen Punkt gehen, noch in einer Ebene liegen, während eine dieser Geraden, nämlich $K_l K_r$, die beiden anderen schneidet. Der eigentliche Teil des Horopters ist die Strecke $K_l K_r$, und die Gerade durch O parallel zu a.

CIII. Nun ist vollständige Symmetrie um $K_l K_r$ herum vorhanden. Der Horopter zerfällt in die Gerade $K_l K_r$ und die ganze Medianebene; der eigentliche Teil ist die Strecke $K_l K_r$.

§ 4. Erzeugung durch Strahlenbündel von beliebigen Kurvenpunkten aus.

Wir können den Horopter auch als Ort der Schnittpunkte zweier projektiven Strahlenbündel auffassen, deren Scheitel beliebige Kurvenpunkte P_1 und P_2 sind. Die Frage ist, wie diese Projektivität beschaffen sein muſs. Ich behaupte, daſs die Umformung, die die Strahlen des Bündels P_2 parallel zu den entsprechenden Strahlen des Bündels P_1 stellt, aus folgenden zwei Operationen zusammengesetzt ist:

1. *Einer Drehung durch den Winkel β um die Achse a,*
2. *Einer Dilatation mit der Konstanten α und derselben Achse a.*

Unter einer *Dilatation mit der Konstanten α und der Achse a* verstehe ich die affine Transformation mit P_2 als Fixpunkt, die (wenn wir P_2 als Koordinatenanfangspunkt und a als Z-Achse annehmen) durch

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \alpha z$$

dargestellt wird.

Diese Drehung und Dilatation sind vertauschbar. Weiter ist zu bemerken, daſs, wenn wir nur Vollstrahlen in Betracht ziehen, eine Drehung durch den Winkel π und eine Dilatation mit derselben Achse

und der Konstanten -1 identisch sind, sodaſs man α positiv annehmen kann.

Um unsere Behauptung zu beweisen, werden wir zeigen, daſs die Kurve, die als Schnitt der beiden projektiven Strahlenbündel herauskommt, identisch mit dem Horopter ist. Dazu betrachten wir wieder das Strahlenbündel als bestehend aus einem Ebenenbüschel mit einer Achse parallel zu a, in dessen Ebenen Strahlenbüschel gelegen sind. Die Schnittlinien entsprechender Ebenen bilden einen Kreiscylinder durch die Geraden a_1 und a_2, durch P_1 bzw. P_2 parallel zu a. Wir bringen senkrecht auf a eine Ebene E' an, die a_1 und a_2 in P_1' und P_2', den Kreiscylinder in einem Kreise R', durch P_1' und P_2', schneidet, der β als Peripheriewinkel über $P_1'P_2'$ enthält. Sei nun P ein Kurvenpunkt, P' seine Projektion auf E', so hat man vermöge der projektiven Beziehung der beiden Strahlenbündel

$$\frac{P'P - P_1'P_1}{P_1'P'} = \alpha \frac{P'P - P_2'P'}{P_2'P'}$$

d. h.

$$P'P = \frac{\alpha \cdot P_2'P_2 \cdot P_1'P' - P_1'P_1 \cdot P_2'P'}{\alpha \cdot P_1'P' - P_2'P'},$$

wenn P' auf dem Kreissegment liegt, das den Winkel β selbst enthält (sonst muſs man α durch $-\alpha$ ersetzen). Die Vorzeichen von $P'P$, $P_1'P_1$ und $P_2'P_2$ sind genau zu beachten.

Liegt P' auf dem Kreissegment mit dem Winkel β, und ist $\frac{P_2'P'}{P_1'P'} = \alpha$, so wird $P'P = \infty$. Wir konstruieren also die Asymptote, indem wir auf diesem Kreissegment den Punkt A so bestimmen, daſs $\frac{P_2'A'}{P_1'A'} = \alpha$ wird. Weiter suchen wir auf dem Kreise R' den Gegenpunkt B' von A' und projizieren P', P_1' und P_2' von A' aus auf die Kreistangente in B' in die Punkte P'', P_1'', und P_2''. Aus der Ähnlichkeit von Dreiecken folgt nun:

$$P_1'P' = \frac{P_1''P'' \cdot A'P_1'}{A'P''}; \quad P_2'P' = \frac{P_2''P'' \cdot A'P_2'}{A'P''}$$

also, wenn man beachtet, daſs $\alpha \cdot P_1'A' = P_2'A'$ ist,

$$P'P = \frac{P_2'P_2 \cdot P_1''P'' - P_1'P_1 \cdot P_2''P''}{P_1''P'' - P_2''P''}.$$

Man überzeugt sich leicht, daſs diese Formel giltig bleibt, wenn P' auf dem Kreissegment liegt, daſs den Winkel $\pi - \beta$ enthält. Nun ist aber weiter $P_1''P'' = B'P'' - B'P_1''$ und $P_2''P'' = B'P'' - B'P_2''$ also:

$$P'P = B'P'' \cdot \frac{P_2'P_2 - P_1'P_1}{P_1''P_2''} + \frac{P_1'P_1 \cdot B'P_2'' - P_2'P_2 \cdot B'P_1''}{P_1''P_2''}$$

d. h.

$$P'P = p \cdot B'P'' + q,$$

worin p und q von der Lage von P unabhängige Konstanten bedeuten. Nimmt man P' in B', also P in B, so ist $B'P'' = 0$, also $B'B = q$. Legt man die Ebene E durch B, so wird $q = 0$; ich nenne die Ebene E' dann E und die Punkte A' und B' entsprechend A und B. Aus $q = 0$ folgt $\frac{P_1'P_1}{P_2'P_2} = \frac{BP_1''}{BP_2''}$ also:

$$\frac{P'P}{BP''} = \text{Constans} = \frac{P_1'P_1}{BP_1''} = \frac{P_2'P_2}{BP_2''};$$

hieraus liest man ab, dafs die Kurve sich mittelst der Asymptote auf eine Ebene durch B senkrecht auf AB als eine Gerade projiziert, womit die Identität mit der Horopterkurve nachgewiesen ist.

Sind P_1 und P_2 beliebig auf der Kurve angenommen, so ist die Achse der Drehung und der Dilatation parallel zur Asymptote, der Drehungswinkel β ist der Winkel des Kreissegments $P_1'AP_2'$, und die Dilatationskonstante α ist gleich $\frac{AP_2'}{AP_1'}$.

§ 5. Bestimmung der Projektivität des § 4 mit Hilfe des Kugelkreises.

Man kann die projektive Beziehung, die die Kurve zwischen den beiden Strahlenbündeln P_1 und P_2 festlegt (P_1 und P_2 beliebige Kurvenpunkte) auch aus der Betrachtung des Kugelkreises finden. Denn beide Strahlenbündel schneiden die unendlich weite Ebene E_∞ in zwei projektiven Punktfeldern, deren sich selbst entsprechende Punkte die Schnittpunkte der Kurve mit E_∞ sind, also der reelle unendlich ferne Punkt P_∞, und die Berührungspunkte T_1 und T_2 der Tangenten durch P_∞ an den Kugelkreis C_2. Bei der projektiven Umformung geht C_2 in einen Kegelschnitt C_2' durch T_1 und T_2 über, der ebenfalls $P_\infty T_1$ und $P_\infty T_2$ zu Tangenten hat, aber im allgemeinen von C_2 verschieden ist. Man kann nun die Umformung in E_∞ aus zwei Teiloperationen zusammensetzen, nämlich aus:

1. Einer Umformung, bei der P_∞ und der Kugelkreis in sich selbst übergeführt werden, nicht aber alle Geraden in E_∞ durch P_∞; dies ist eine Drehung um eine Achse durch P_∞.

2. Einer Umformung bei der alle Geraden in E_∞ durch P_∞ und aufserdem die beiden Punkte T_1 und T_2 in sich selbst übergeführt werden, also auch sämtliche Punkte der Geraden T_1T_2; der Kugelkreis C_2 wird aber in C_2' umgeformt.

Diese zweite Projektivität ist aber nichts anderes als die in § 4 betrachtete Dilatation. Denn man sieht leicht ein, dafs beide Teiloperationen vertauschbar sind, woraus sofort folgt, dafs die zweite Umformung symmetrisch um eine Achse a durch P_∞ ist; weiter gehen Geraden senkrecht und parallel zu a in sich selbst über, woraus unsere Behauptung leicht abzuleiten ist.

Umgekehrt sieht man auch sofort ein, dafs, wenn die Projektivität zwischen zwei Strahlenbündeln aus einer Drehung und einer Dilatation mit derselben Achse besteht, der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen als Horopter aufzufassen ist. Denn dieser Ort schneidet E_∞ in P_∞ und den Berührungspunkten T_1 und T_2 der Tangenten durch P_∞ an C_2; dann ist die Kurve aber, wie in § 2 gezeigt worden ist, eine Horopterkurve.

§ 6. Einer der beiden Scheitel ist ins Unendliche gerückt.

Die Horopterkurve kann auch erzeugt werden durch ein Strahlenbündel P_1 mit einem im Endlichen gelegenen Scheitel, und ein Bündel P_∞, dessen Scheitel ins Unendliche gerückt ist. Die projektive Beziehung kann man entweder selbständig ableiten, oder durch einen geeigneten Grenzübergang aus dem Falle beliebiger Scheitel finden, indem man gleichzeitig P_2 ins Unendliche rücken, und α gleich Null werden läfst. Das Resultat ist, dafs die Projektivität sich aus den drei folgenden, mit einander vertauschbaren Teiloperationen zusammensetzt:

1. Einer Translation, die P_1 auf die Asymptote l führt.

2. Einer Drehung des Bündels P_∞ durch den Winkel β um die Asymptote l.

3. Einer Perspektivität mit einer Perspektivitätsebene senkrecht auf l, die eine Entfernung d von P_1 hat.

Die Projektivität ändert sich nicht, wenn man gleichzeitig β durch $\pi + \beta$ und d durch $-d$ ersetzt.

Umgekehrt ist auch der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen bei zwei Bündeln, zwischen denen die geschilderte Beziehung besteht, als Horopter aufzufassen.

Es läfst sich auch leicht angeben, wie β und d aus der Kurve zu entnehmen sind. Sei P_1' die Projektion von P_1 auf die öfters betrachtete Ebene E, die die Asymptote in A, den Kreiscylinder in dem Kreise R schneidet. Der Winkel β wird sofort aus dem Kreissegment $P_1'A$ entnommen. Für d findet man:

$$d = AP_1'' \operatorname{tg} \gamma = \frac{P_1' P_1'}{\cos \beta}.$$

Hierin ist γ die Steilheit des Horopters, und P_1'' die Projektion von P_1' von A aus auf die Kreistangente in B. Die Vorzeichen von d und P_1P_1' sind zu beachten.

§ 7. Besondere Fälle bei den Erzeugungsweisen der §§ 4 und 6.

Wir haben gesehen, dafs die Horopterkurve entsteht als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier Strahlenbündel, zwischen denen die in § 4 geschilderte projektive Beziehung besteht. Für den Fall, dafs P_1 und P_2 beide im Endlichen gelegen sind, könnten wir wieder eine ähnliche Aufzählung der verschiedenen Fälle machen, wie wir dies in § 3 für den Fall zweier kongruenter Strahlenbündel gethan haben. Insbesondere ist zu beachten, dafs wir auch die Ausartungsfälle $\alpha = 0$ und $\alpha = \infty$ betrachten können; wir haben es dann mit einer ausgearteten Dilatation zu thun, bei der es Strahlen des einen Bündels giebt, denen unendlich viele Strahlen des anderen Bündels entsprechen. Die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha = \infty$ gehen durch Vertauschung von P_1 und P_2 in einander über, sind also als identisch zu betrachten.

Die Aufzählung liefert dieselben Fälle, die wir in § 3 bekommen haben, nur nicht den Fall B; aufserdem bekommen wir noch *den in § 3 nicht vorkommenden Fall, dafs* $\alpha = 0$, β *von Null und* π *verschieden und die Drehungsachse* a *parallel zu* P_1P_2 *ist.* In diesem letzten Falle, den wir mit (AIII)′ bezeichnen wollen, besteht die Kurve aus der Geraden P_1P_2, und den beiden Minimalgeraden durch P_1 in einer Ebene senkrecht auf P_1P_2.

Auch könnten wir dieselbe Aufzählung machen für den in § 6 betrachteten Fall, dafs P_2 ins Unendliche gerückt ist. Die besonderen Fälle bestehen jetzt darin, dafs β gleich Null oder gleich π wird, dafs P_1 auf der Asymtote l (der Strahl des Bündels P_∞, der parallel zu seinem entsprechenden Strahle des Bündels P_1 ist) liegt, und schliefslich, dafs $d = 0$ oder $d = \infty$ wird; in den beiden letzten Fällen, die nicht mit einander identisch sind, artet die dritte Teiloperation des § 6, die Perspektivität, aus. Wir bekommen wieder die in § 3 aufgezählten Fälle, nur nicht den Fall AIII. Aufserdem bekommen wir noch den oben betrachteten Fall (AIII)′ (wenn P_1 auf l liegt, β von Null und π verschieden, und $d \neq \infty$ ist), und *den hier zuerst auftretenden Fall, dafs* $d = \infty$ *und* β *von Null und* π *verschieden ist.* In diesem letzten Falle, den wir mit (AIII)″ bezeichnen werden, ist von l nur die Richtung bestimmt, sodafs es gleichgültig ist, ob wir P_1 auf l annehmen oder nicht; die Kurve besteht aus der Geraden durch P_1 parallel zu l, und den unendlich fernen Geraden der beiden Minimalebenen durch l (den Tangenten durch P_∞ an den Kugelkreis), also aus drei Geraden durch P_∞.

§ 8. Zusammenfassung aller verschiedenen Fälle.

Zusammenfassend haben wir bei den drei Erzeugungsarten von § 2, 4 und 6 die folgenden 9 Fälle bekommen:

A I, A II, A III, B, C I, C II, C III, (A III)′ und (A III)″,

die wir wie folgt einteilen können:

1. Nicht ausgeartete C_3. Dies ist der Fall A I.
2. Ausartungen in einen Kegelschnitt C_2, und eine den Kegelschnitt schneidende Gerade, die senkrecht auf der Ebene von C_2 steht. Das ist der Fall A II (C_2 ist ein Kreis) und der Fall C I (C_2 ist eine gleichseitige Hyperbel, und die Gerade die unendlich ferne Gerade einer Ebene senkrecht auf einer ihrer Asymptoten).
3. Ausartungen in drei Gerade, von denen nur eine die beiden anderen schneidet, und zwar senkrecht. Das ist der Fall C II (zwei senkrecht auf einander stehende Gerade und die unendlich ferne Gerade der auf einer dieser Geraden senkrecht stehenden Ebene) und der Fall A III (eine reelle Gerade l und zwei auf l senkrecht stehende Minimalgeraden, die l in zwei konjugiert-imaginären Punkten schneiden).
4. Ausartungen in drei durch einen Punkt gehende Gerade, von denen zwei kongugiert-imaginär sind in einer Ebene senkrecht auf der dritten Geraden. Das ist der Fall (A III)′ (eine reelle Gerade l und die beiden Minimalgeraden durch einen Punkt von l, in einer Ebene senkrecht auf l) und der Fall (A III)″ (eine reelle Gerade und die Tangenten aus dem unendlich fernen Punkt dieser Geraden an den Kugelkreis).
5. Ausartungen in eine Gerade und eine senkrecht darauf stehende Ebene. Das ist der Fall C III (Ebene und Gerade sind beide im Endlichen gelegen) und der Fall B (eine im Endlichen gelegene Gerade und die unendlich weite Ebene).

Zweites Kapitel.

Beziehung zwischen dem Fixationspunkt und der relativen Augenstellung.

§ 1. Bestimmung der relativen Augenstellung aus dem Fixationspunkt.

Während wir in dem vorhergehenden Kapitel den Fixationspunkt F gar nicht in Betracht gezogen, vielmehr jede relative Augenstellung als möglich angenommen haben, werden wir jetzt die Frage beantworten, wie aus F diese relative Augenstellung zu bestimmen ist. Dazu werden

wir erst die Achse a und den Winkel β der Drehung bestimmen, die das einzelne Auge aus der Stellung I in die Stellung II bringt. Die Stellungen I und II mögen durch die Drehungen β_1 und β_2 um die Achsen a_1 und a_2 aus der primären Augenstellung hervorgegangen sein; diese Drehungen stellen wir symbolisch durch (a_1, β_1) und (a_2, β_2) dar. Die Drehung (a, β) aus der Stellung I in die Stellung II kann ich so ausführen, dafs ich erst das Auge in seine primäre Stellung drehe, und dann weiter in die Stellung II; also wird diese Drehung

$$(a, \beta) = (a_1, \beta_1)^{-1} \cdot (a_2, \beta_2).$$

Es ist aber leicht, das Produkt beider Drehungen durch eine einzige Drehung zu ersetzen, und so a und β zu bestimmen. Man findet dann als direkte Folgerung des Listingschen Gesetzes:

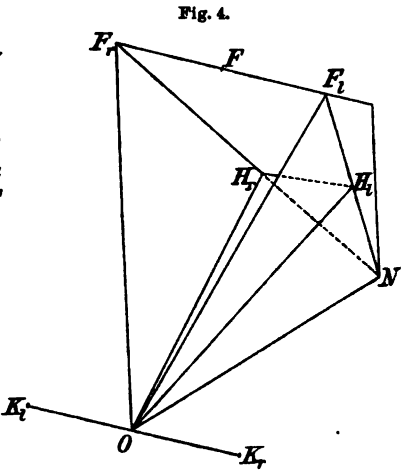
Sind n_1 und n_2 die beiden Gesichtslinien in den Stellungen I und II, n die primäre Gesichtslinie, alle durch den Knotenpunkt K gehend, und sind KD_1 und KD_2 die Halbierungslinien der Winkel zwischen n und n_1 bezw. n und n_2 (n, n_1 und n_2 als Halbstrahlen betrachtet), so steht die Achse a senkrecht auf der Ebene durch KD_1 und KD_2, und der Winkel β ist der doppelte Winkel D_1KD_2, im Sinne einer Drehung von KD_1 nach KD_2.

Diese selbe Regel kann man auch benutzen, um zu finden, wieviel beide Augen gegen einander gedreht sind, wenn ein Punkt F fixiert wird. Man hat dann erst durch eine Translation beide Knotenpunkte in einen Punkt zu bringen, für den wir den Halbierungspunkt O der Strecke K_lK_r wählen. Man findet dann die relative Drehungsachse a und den relativen Drehungswinkel β folgendermafsen aus dem Fixationspunkt F:

Durch F ziehe man eine zu K_lK_r parallele Gerade, auf der man die Punkte F_l und F_r so konstruiert, dafs (auch was das Vorzeichen angeht): $FF_l = K_lO$ und $FF_r = K_rO$. Ist ON eine zur primären Gesichtslinie parallele Gerade durch O, und sind OH_l und OH_r die Halbierungslinien der Winkel zwischen ON und OF_l bezw. OF_r (ON, OF_l und OF_r als Halbstrahlen aufgefafst), so steht die Ebene H_lOH_r senkrecht auf der relativen Drehungsachse a (sie ist also die öfters betrachtete Ebene E), und der relative Drehungswinkel β ist gleich $2 \sphericalangle H_rOH_l$ (von OH_r nach OH_l) (Fig. 4).

Der Kreis R durch F', K_l' und K_r', die Projektionen von F, K_l und K_r auf E, bestimmt den Kreiscylinder, auf dem der Horopter liegt. Die Punkte A und B konstruieren wir daraus, dafs AOB ein Durchmesser des Kreises R ist; A, auf dem Segment $K_l'F'K_r'$ gelegen, bestimmt die Asymptote.

Stehen wir aufrecht, so wird unser Gesichtsfeld durch die *Horizontalebene* (die horizontale Ebene durch K_l und K_r), und die *Medianebene* (die Halbierungsebene der Strecke $K_l K_r$) in vier Quadranten geteilt, die wir durch die Worte links-oben, links-unten, rechts-oben und rechts-unten unterscheiden. Die primäre Gesichtslinie beider Augen läuft zu der Schnittlinie ON von Horizontal- und Medianebene parallel. Liegt nun F links-oben, so ist $OF_l < OF_r$, und, wenn N, H_l und H_r in einer Ebene durch F senkrecht auf der primären Gesichtslinie liegen (Fig. 4):



$$NH_l : H_l F_l = ON : OF_l$$

und

$$NH_r : H_r F_r = ON : OF_r,$$

also

$$\frac{NH_l}{H_l F_l} > \frac{NH_r}{H_r F_r},$$

woraus man sieht, dafs K_l oberhalb, K_r unterhalb E liegt. Wir haben in § 1, Kap. 1 aber gesehen, dafs die Kurve dann links gewunden ist, also:

Liegt der Fixationspunkt links oben, so ist der Horopter links gewunden.

Welchen Windungssinn der Horopter bei anderen Lagen von F hat, sieht man sofort aus Symmetriebetrachtungen. Liegen zwei Fixationspunkte F_1 und F_2 symmetrisch zu der Horizontalebene, zu der Medianebene, oder zu der Schnittlinie dieser beiden Ebenen, so ist dasselbe auch der Fall mit den zugehörigen Horopterkurven; diese haben also in den beiden ersten Fällen verschiedenen, in dem letzten Falle denselben Windungssinn.

§ 2. Bestimmung des Fixationspunktes aus der relativen Augenstellung.

In diesem Paragraphen werden wir die umgekehrte Aufgabe lösen, nämlich den Fixationspunkt F aus der relativen Augenstellung zu bebestimmen. Die Ebene E durch O senkrecht auf der relativen Drehungsachse a ist dann bekannt; die Linien OH_l und OH_r in E aber nicht (ich weifs vorläufig nur, dafs sie den Winkel $\frac{1}{2}\beta$ mit einander bilden). Nimmt man OH_l irgend wie in E an, so findet man OF_l durch eine

Drehung π um OH_l (ON und OF_l sind Halbstrahlen). *Läfst man OH_l die Ebene E durchlaufen, so durchläuft OF_l einen Rotationskegel 1 durch ON, der die durch O gehende Normale a von E zur Achse hat;* denn bei der Drehung durch π um OH_l geht a in sich selbst, ON in OF_l über; der Winkel zwischen OF_l und a ist also gleich dem Winkel zwischen ON und a, also konstant. Dieser Kegel 1 mufs als Halbstrahlenkegel aufgefafst werden; er enthält die Verlängerung von ON (nicht den Halbstrahl ON selbst).

OF_r liegt auf demselben Halbkegel, und wird durch eine Drehung um a durch β (den relativen Drehungswinkel) in OF_l übergeführt. Legt man eine Ebene f durch OF_l und OF_r, und läfst OF_l den Kegel 1 durchlaufen (wobei, durch die Beziehung zwischen OF_l und OF_r, auch OF_r mitgeführt wird), so umhüllen alle diese Ebenen f einen zweiten Rotationskegel 2, der innerhalb des Kegels 1 gelegen ist, und gleichfalls a zur Achse hat. Der Winkel des Kegels 1 (Winkel zwischen Achse und Erzeugenden) ist δ, der spitze Winkel zwischen ON und a; der Winkel ε des Kegels 2 wird gefunden aus:

$$\operatorname{tg} \cdot \varepsilon = \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \tfrac{1}{2}\beta.$$

Die Ebene durch O, F_l und F_r, oder durch K_l, K_r und F berührt den Kegel 2, und schneidet den Halbkegel 1 in OF_l und OF_r. Die Konstruktion der beiden Gesichtslinien ist also die folgende:

Durch K_lK_r lege man an den Kegel 2 eine Tangentialebene, die den Kegel 1 in zwei Halbstrahlen OF_l und OF_r schneidet. Die Gesichtslinien beider Augen verlaufen dann parallel zu OF_l und OF_r.

Man kann jede der beiden Tangentialebenen an den Kegel 2 in Betracht ziehen. Hat man darüber eine Wahl getroffen, so mufs man aus dem Sinne der relativen Drehung bestimmen, welche der beiden Schnittlinien mit dem Kegel 1 als OF_l aufzufassen ist.

Die Geraden durch K_l und K_r parallel zu OF_l und OF_r schneiden einander in F; aber nur falls sie als Halbstrahlen (Gesichtslinien) aufgefafst einander auch noch schneiden, ist F ein gewöhnlicher Fixationspunkt (abgekürzt Fix.p.). Schneiden aber die Verlängerungen der beiden Gesichtslinien einander, so nennen wir ihren Schnittpunkt F einen *Pseudofixationspunkt* (abgekürzt Ps.fix.p.). Schneidet die rechte Gesichtslinie die Verlängerung der linken, so sprechen wir von einem *linken Pseudofixationspunkt* (abgekürzt l. Ps.fix.p.), und ebenso von einem *rechten Pseudofixationspunkt* (r. Ps.fix.p.).

Wir haben die drei folgenden Fälle:

a. K_lK_r liegt innerhalb des Kegels 2. Dies ist der Fall, wenn $\xi < \varepsilon$, also:

$$\cos \tfrac{1}{2}\beta > \frac{\operatorname{tg} \xi}{\operatorname{tg} \delta};$$

unter ζ den spitzen Winkel zwischen der relativen Drehungsachse a und $K_l K_r$ verstanden. Dies ist nur möglich für $\zeta < \delta$.

Die beiden Tangentialebenen durch $K_l K_r$ an den Kegel 2 sind imaginär, und ebenso die Gesichtslinien.

b. $K_l K_r$ liegt aufserhalb des Kegels 2, und innerhalb des Kegels 1. Die Bedingung dafür ist:

$$\zeta < \delta \quad \text{und} \quad \cos \tfrac{1}{2}\beta < \frac{\operatorname{tg} \zeta}{\operatorname{tg} \delta}.$$

Jetzt kann ich durch $K_l K_r$ zwei (reelle) Tangentialebenen an den Kegel 2 legen. Eine dieser fasse ich ins Auge; sie schneidet den Halbkegel 1 in OF_l und OF_r. $K_l K_r$ liegt teilweise in dem Winkel $F_l O F_r$, etwa mit dem Teile OK_r. Zieht man durch K_l und K_r Halbstrahlen parallel zu OF_l bezw. OF_r, so schneidet der Halbstrahl durch K_l die Verlängerung des Halbstrahles durch K_l in einem Punkte F, der ein r. Ps.fix.p. ist. Wählt man die andere Tangentialebene an den Kegel 2, so bekommt man einen zweiten Punkt F', der gleichfalls r. Ps.fix.p. ist. F und F' liegen symmetrisch zur Symmetrieachse OA der Kurve, beide auf dem uneigentlichen Teil des Horopters. Ein gewöhnlicher Fix.p. existiert nicht.

c. $K_l K_r$ liegt aufserhalb beider Kegel 1 und 2. Dies ist der Fall, wenn $\zeta > d$.

Legt man durch $K_l K_r$ eine Tangentialebene an den Kegel 2, die den Kegel 1 in den Halbstrahlen OF_l und OF_r schneidet, so liegt weder K_l noch K_r in dem Winkel $F_l O F_r$. Die Halbstrahlen durch K_l und K_r parallel zu OF_l bezw. OF_r schneiden sich entweder direkt oder rückwärts verlängert. Ist das erste der Fall, so existiert ein Fix.p. F, aber dann liefert die andere Tangentialebene einen Ps.fix.p. F', der mit F symmetrisch zur Symmetrieachse der Kurve liegt. F und F' liegen beide auf dem eigentlichen Horopterteil.

Nur in dem Falle, dafs $\zeta > d$, also die relative Drehungsachse mit der primären Gesichtslinie einen kleineren Winkel bildet, als mit $K_l K_r$, existiert ein und nur ein gewöhnlicher Fixationspunkt.

Es ist aber noch immer möglich, dafs in diesem Falle der Fixationspunkt hinter die primäre Äquatorialebene, die Ebene durch O senkrecht auf der primären Gesichtslinie, fällt, d. h. hinter den Kopf. Wir nennen den Fixationspunkt dann *nicht realisierbar*. Soll der Fix.p. *realisierbar* sein, so mufs der Halbkegel 2 die primäre Äquatorialebene schneiden, und der Sinn der relativen Drehung ein bestimmter sein. Der Winkel ε des Kegels 2 mufs also gröfser sein als der Winkel $\frac{1}{2}\pi - \delta$ zwischen a und der primären Äquatorialebene, d. h. $\cos \frac{1}{2}\beta > \cot^2 \delta$; das kann nur der Fall sein, wenn $\delta > \frac{1}{4}\pi$. Man be-

kommt also einen realisierbaren Fix.p., wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\zeta > \delta > \frac{1}{4}\pi$

(2) $\cos \frac{1}{2}\beta > \cot^2 \delta$

(3) β hat ein bestimmtes Vorzeichen.

Hieraus sieht man weiter, *dafs, wenn F vor der primären Äquatorialebene liegt, β niemals zu π werden kann.*

In dem Übergangsfall zwischen a und b fallen die beiden Punkte F in B zusammen; in dem Übergangsfall zwischen b und c fallen die beiden Punkte F in die Knotenpunkte.

Aus unserer Konstruktion für F folgt, dafs, wenn wir den Sinn der relativen Drehung umkehren (aber Winkel und Achse beibehalten), nicht nur der Horopter gespiegelt wird zur Ebene durch $K_l K_r$ und a, sondern auch der Punkt F, dessen Art ungeändert bleibt (so geht z. B. ein r. Ps.fix.p. wieder in einen solchen über).

§ 3. Fälle der Unbestimmtheit des Fixationspunktes.

Wir können fragen, ob es relative Augenstellungen giebt, die den Punkt F unbestimmt lassen. Um diese Frage zu beantworten, haben wir systematisch zu untersuchen, wann bei der Konstruktion von F eine Unbestimmtheit auftritt. Wir finden dann die folgenden Fälle:

1. $\beta = 0$. Jeder unendlich ferne Punkt, und alle Punkte von $K_l K_r$ aufserhalb K_l und K_r können Fix.p. oder Ps.fix.p. sein (die Punkte der Strecke $K_l K_r$ aber l. oder r. Ps.fix.p.).

2. Die relative Drehungsachse a liegt in der primären Äquatorialebene und $\beta = \pi$. Die Kurve besteht aus einer Hyperbel in der primären Äquatorialebene und der unendlich fernen Geraden einer Ebene senkrecht auf a; alle Punkte dieser Geraden können l. oder r. Ps.fix.p. sein.

3. a verläuft vertikal und $\beta \neq \pi$. Die Kurve zerfällt in einen horizontalen Kreis und eine vertikale Gerade; der Kreis wird durch K_l und K_r in zwei Segmente geteilt; alle Punkte des Segments, das durch die Gerade geschnitten wird, können Fix.p. oder Ps.fix.p. sein, alle Punkte der anderen Segmente l. oder r. Ps.fix.p.

4. a verläuft vertikal und $\beta = \pi$. Der Kreis des vorigen Falles artet in $K_l K_r$ und die unendlich ferne horizontale Gerade aus, und zwar das erst genannte Segment in die Strecke $K_l K_r$.

Die Fälle, dafs unendlich viele Punkte des Horopters realisierbare Fixationspunkte sein können, sind 1 und 3; nur bei 3 liegen diese Fixationspunkte im Endlichen.

§ 4. Verschiedene Fälle bei einem realisierbaren Fixationspunkt.

Wir werden untersuchen, welche besonderen Fälle vorkommen können, bei denen ein realisierbarer Fixationspunkt existiert. Es ist leicht zu zeigen, daſs der Fall III des § 3, Kap. 1 (a parallel zu $K_l K_r$) nicht vorkommen kann. Weiter haben wir in § 2, Kap. 2 gesehen, daſs, wenn der Fixationspunkt vor der primären Äquatorialebene liegt, also realisierbar ist, β nicht zu π werden, also der Fall C nicht vorkommen kann.

Untersuchen wir jetzt, wann der Fall II (a senkrecht auf $K_l K_r$) zutrifft. Steht a nicht vertikal, so bekommen wir einen Fixationspunkt in der Medianebene. Ist aber a vertikal, so liegt, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, der Fixationspunkt irgend wo auf einem Kreissegment in der Horizontalebene. Wir haben also nur den Fall II, wenn der Fixationspunkt in der Horizontal- oder in der Medianebene liegt.

Die realisierbaren Fälle sind also die folgenden:

A I. Der allgemeine Fall. Der Fixationspunkt liegt im Endlichen, nicht auf der Horizontal- oder auf der Medianebene.

a. Der Fixationspunkt liegt links-oben oder rechts-unten. Der Horopter ist links gewunden.
b. Der Fixationspunkt liegt rechts-oben oder links-unten. Der Horopter ist rechts gewunden.

A II. Der Horopter zerfällt in einen Kreis und eine in der Medianebene gelegene Gerade, senkrecht auf der Ebene des Kreises, und den Kreis schneidend.

a. Der Fixationspunkt liegt in der Horizontalebene und im Endlichen. Der Kreis geht durch K_l, K_r und F.
b. Der Fixationspunkt liegt in der Medianebene. Die Ebene E des Kreises geht durch K_l und K_r, aber nicht durch F (falls F nicht auch in der Horizontalebene liegt). Die Gerade geht durch F und steht senkrecht auf E; der Kreis geht durch K_l, K_r und F', die Projektion von F auf E.

B. Der Fixationspunkt liegt im Unendlichen. Die ganze unendlich ferne Ebene ist Horopter.

§ 5. Ort der Fixationspunkte, deren Horopter in eine Hyperbel und eine Gerade ausartet.

Wir werden in diesem Paragraphen auch hinter der primären Äquatorialebene gelegene Fixationspunkte in Betracht ziehen, und untersuchen, wann der Fall C (Ausartung in eine gleichseitige Hyperbel und eine unendlich ferne Gerade) eintritt, d. h. $\beta = \pi$ ist.

Wir nehmen ein rechtwinkliges Koordinatenkreuz an, mit OK_r als X-Achse, der Vertikalen durch O als Z-Achse, und der Y-Achse parallel zur primären Gesichtslinie, die, wenn wir den Kopf aufrecht halten, horizontal verläuft. Es bilde ferner die relative Drehungsachse einen Winkel ζ mit der X-Achse, δ mit der Y-Achse und η mit der Z-Achse. Der Halbkegel 1 des § 2, Kap. 2 entsteht durch eine Rotation der negativen Y-Achse um die Linie a durch O parallel zur relativen Drehungsachse; für $\beta = \pi$ ist der Kegel 2 als Klassenkegel in die Doppellinie a ausgeartet. Die beiden Tangentialebenen durch $K_l K_r$ an den Kegel 2 fallen zusammen, und zwar in die Ebene

$$z = yp,$$

worin

$$p = \frac{\cos\eta}{\cos\delta}.$$

Diese Ebene, die wir mit V bezeichnen wollen, schneidet den Kegel 1 in zwei Halbstrahlen OF_1 und OF_2, die beide den Winkel δ mit a bilden. OF_1 ist sowohl als OF_l wie als OF_r aufzufassen. Man konstruiert daraus zwei Punkte F und F' (die Fix.p., Ps.fixp., l. oder r. Ps.fix.p. sein können), die symmetrisch zu O liegen. Läfst man a alle Richtungen durchlaufen, so beschreiben F und F' eine Fläche; die Schnittkurve dieser Fläche mit einer Ebene V durch $K_l K_r$ bekommt man, wenn man a nur diese Ebene V durchlaufen läfst. Diese Kurve wollen wir jetzt bestimmen.

Als Koordinaten in der Ebene V nehmen wir x und ϱ, den Abstand eines Punktes P von $K_l K_r$, positiv gerechnet, wenn P hinter der X-Z-Ebene liegt. Zieht man durch K_l eine Linie parallel zu OF_1 (bezw. OF_2) und durch K_r eine Linie parallel zu OF_2 (bezw. OF_1), so findet man für die Koordinaten x, ϱ des Schnittpunktes F (bezw. F'), wenn $OK_r = k$ ist,

$$x = \tfrac{1}{2}\varrho\,\{\operatorname{ctg}(\zeta - \delta) + \operatorname{ctg}(\zeta + \delta)\}$$
$$\varrho\,\{\operatorname{ctg}(\zeta - \delta) - \operatorname{ctg}(\zeta + \delta)\} = \pm 2k,$$

unter δ immer den spitzen Winkel verstanden, während ζ, der Winkel zwischen dem hinter der X-Z-Ebene gelegenen Teil von a und der positiven X-Achse, auch stumpf sein kann. Nach x und ϱ auflösend findet man:

$$x = \pm k \frac{\sin 2\zeta}{\sin 2\delta}$$
$$\varrho = \pm k \frac{\cos 2\delta - \cos 2\zeta}{\sin 2\delta}.$$

Nun ist $\cos^2\zeta + \cos^2\delta + \cos^2\eta = 1$, also weil $\cos\eta = p\cos\delta$ ist:

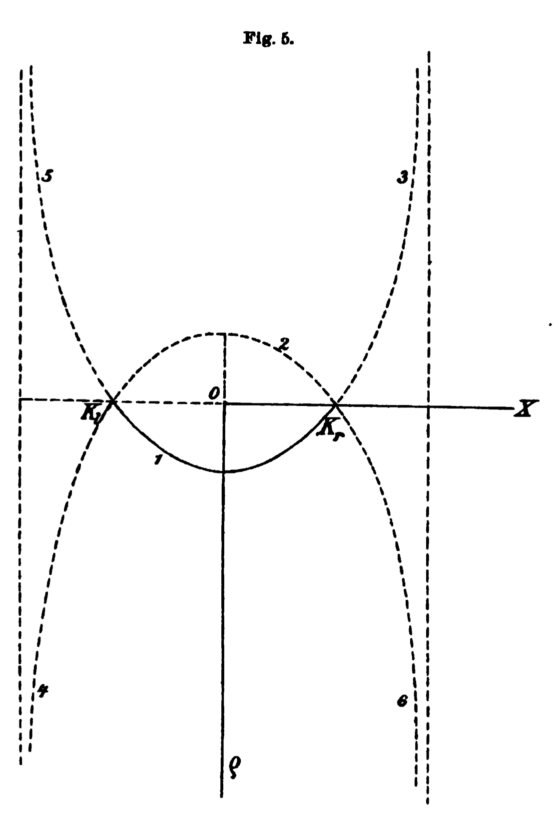
$$\cos^2\zeta + (1 + p^2)\cos^2\delta = 1.$$

Hieraus, und aus den Formeln für x und ϱ die Gröfsen ζ und δ eliminierend, findet man für die gesuchte Schnittkurve:

$$\varrho^2 = \frac{1+p^2}{p^2} \frac{(k^2-x^2)^2}{k^2(1+p^2)-x^2}.$$

Diese in Fig. 5 abgebildete Kurve vierter Ordnung ist symmetrisch zur x- und ϱ-Achse; sie hat in K_l, K_r und dem unendlich fernen Punkt der ϱ-Achse Doppelpunkte, in denen die sechs in der Figur numerierten Teile der Kurve zusammenhängen. Die gewöhnlichen Fixationspunkte liegen auf dem Teil 1, die Ps.fix.p. auf dem Teil 2; auf den Teilen 3 und 4 liegen die r. Ps.fix.p., und auf den Teilen 5 und 6 die l. Ps.fix.p.

Fig. 5.



Für die zur ϱ-Achse parallelen Asymptoten ist $x = \pm k\sqrt{1+p^2}$; für die Schnittpunkte mit der ϱ-Achse: $\varrho = \pm \frac{k}{p}$.

Hieraus sieht man leicht, wie die Kurve sich abändert, wenn p von Null bis ∞ anwächst, d. h. die Ebene V sich aus der horizontalen in die vertikale Lage aufrichtet. Für $p = 0$ zerfällt die Kurve in die beiden doppeltzählenden Geraden durch K_l und K_r senkrecht auf der X-Achse, für $p = \infty$ in die X-Achse und die unendlich ferne Gerade, beide doppeltgezählt. In beiden Fällen fallen verschieden numerierte Teile der Kurve zusammen, was bedeutet, dafs ihre Punkte auf zwei Weisen (entsprechend den beiden zugehörigen Nummern) als Punkte F aufzufassen sind.

Dreht sich die Ebene V um $K_l K_r$, so beschreiben die sechs Teile unserer Kurve sechs entsprechend numerierte Teile einer

Fläche, deren Gleichung man bekommt durch Elimination von ϱ und p aus:

$$\varrho^2 = \frac{1+p^2}{p^2} \frac{(k^2-x^2)^2}{k^2(1+p^2)-x^2}$$

$$\varrho^2 = y^2 + z^2$$

$$z^2 = yp.$$

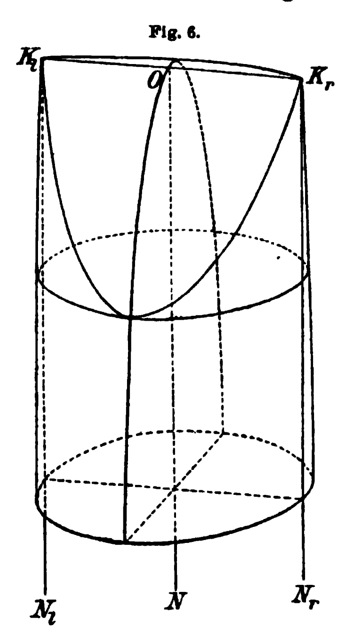
Dies liefert:

$$y^2(k^2-x^2)(k^2-x^2-z^2) = k^2 z^4.$$

Das ist eine Fläche sechster Ordnung, die die Koordinatenebenen zu Symmetrieebenen hat.

Wenn wir nur gewöhnliche Fixationspunkte in Betracht ziehen, interessiert uns nur der zur X-Y- und Y-Z-Ebene symmetrisch gelegene Teil 1 unserer Fläche (abgekürzt Fl.teil 1). Dieser wird durch eine Ebene $y = y_1$ in einer Ellipse geschnitten, deren grofse (horizontale) Achse konstant ist, und zwar gleich k, während ihre kleine (vertikale) Achse von Null bis k wächst, wenn y_1 von Null bis ∞ läuft. In grofser Entfernung von der X-Z-Ebene hat der Fl.teil 1 also ungefähr die Gestalt des Kreiscylinders $x^2 + z^2 = k^2$; längs der Strecke $K_l K_r$ und der Linien $K_l N_l$ und $K_r N_r$ durch K_l bezw. K_r parallel zur positiven Y-Achse steht seine Tangentialebene vertikal. In den Knotenpunkten K_l und K_r hat er Ecken; die Tangenten in K_l etwa bilden einen Kreiskegel (mit dem Winkel $\frac{1}{4}\pi$) durch $K_l K_r$ und $K_l N_l$; der Fl.teil 1 liegt innerhalb dieses Kegels. In Fig. 6 ist dieser Fl.teil, der mit Ausnahme der Strecke $K_l K_r$ hinter der primären Äquatorialebene liegt, abgebildet.

Fig. 6.



§ 6. Windungssinn des Horopters bei verschiedenen Lagen des Fixationspunktes.

Lassen wir alle Punkte im Raume als gewöhnliche Fixationspunkte F zu, so zerfällt der Horopter, wenn F entweder im Unendlichen, in der Horizontalebene, in der Vertikalebene, oder auf dem Fl.teil 1 liegt. (Liegt F in der primären Äquatorialebene, so zerfällt im allgemeinen der Horopter nicht.) Aus Kontinuitätsbetrachtungen ist es klar, dafs

der Horopter seinen Windungssinn ändert, wenn F eine und nur eine dieser im Endlichen gelegenen Flächen passiert. (Für die Horizontal- und die Medianebene sieht man dasselbe noch strenger aus der Symmetrie.) Für die unendlich weite Ebene E_∞ kann man denselben Schlufs nicht ziehen; denn wenn F diese Ebene passiert, und gewöhnlicher Fixationspunkt bleibt, hat man es nicht mit einer kleinen Änderung der Gesichtslinien, als Halbstrahlen aufgefafst, zu thun. Vielmehr bleibt beim Passieren von E_∞ der Windungssinn des Horopters ungeändert, wie aus dem Verhalten seiner Windung in den verschiedenen Teilen des Raumes hervorgeht. Man findet nämlich:

Liegt F aufserhalb des Flächenteils 1, so ist der Horopter links gewunden, falls F links-oben oder rechts-unten; rechts gewunden, falls F rechts-oben oder links-unten liegt; liegt F innerhalb des Fl.teils 1, so ist es gerade umgekehrt.

Liegt F auf dem Fl.teil 1, so haben wir es im allgemeinen mit dem Fall C I zu thun (Ausartung in eine Hyperbel und eine unendlich ferne Gerade). Liegt F aber gleichzeitig in der Medianebene, so bekommen wir den Fall C II (die Hyperbel artet in zwei Gerade aus).

Liegt F gleichzeitig in dem Fl.teil 1 und in der Horizontalebene, etwa auf der Linie $K_l N_l$, so wird der Horopter unbestimmt. Das Listingsche Gesetz bestimmt die Stellung des linken Auges dann nicht, wohl aber die Stellung des rechten Auges, falls F im Endlichen liegt. Bei der Konstruktion der relativen Augenstellung liegt OH_r in der Horizontalebene und ist bestimmt; OH_l liegt in der X-Z-Ebene, ist übrigens aber beliebig. Von der relativen Drehungsachse a ist also nur zu sagen, dafs sie senkrecht auf OH_r steht; wählt man sie, so ist der relative Drehungswinkel β bestimmt (und zwar $2 \sphericalangle H_l O H_r$); dieser Winkel ist am kleinsten, wenn man a vertikal, am gröfsten (und zwar gleich π), wenn man a horizontal annimmt. Wählt man a weder horizontal noch vertikal, so zerfällt der Horopter nicht; wählt man a vertikal, so ist $\beta \neq \pi$, und man hat es mit dem Falle A II (Ausartung in einen Kreis und eine Gerade) zu thun; nimmt man schliefslich a horizontal an, so ist $\beta = \pi$, und man hat den Fall C I, wie in dem Falle, dafs F beliebig auf dem Flächenteil 1 liegt.

Göttingen, Juli 1901.

Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad.

Von J. Horn in Clausthal.

In der Theorie der kleinen Schwingungen von Systemen mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden pflegt man sich bei der Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung auf diejenigen Glieder zu beschränken, welche linear in den Koordinaten und Geschwindigkeiten sind. So wird die Theorie der kleinen Schwingungen auf die Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt; in diesem Sinne hat sie z. B. in der Dynamik der Systeme starrer Körper von Routh (deutsch von Schepp) eine eingehende Darstellung gefunden.

Dabei bleibt allerdings die Frage unbeantwortet, wie weit die durch die linearen Differentialgleichungen definierte Bewegung als angenäherte Darstellung derjenigen Bewegung gelten kann, welche den nicht linearen Differentialgleichungen der Dynamik in ihrer unveränderten Gestalt entspricht. So giebt es Fälle, in welchen schon bei der Entscheidung der Frage, ob eine Gleichgewichtslage stabil oder instabil ist, die Beschränkung auf die linearen Glieder nicht zulässig ist.[1]) Aber auch in solchen Fällen, in welchen über die Stabilität einer Gleichgewichtslage kein Zweifel besteht, kann es wünschenswert sein, die in der Nähe dieser Gleichgewichtslage erfolgende Bewegung genauer darzustellen, als es durch die Integration der linearen Differentialgleichungen geschieht. Ansätze zu einer solchen genaueren Darstellung kleiner Schwingungen finden sich schon in dem erwähnten Werke von Routh[2]), wo die Bewegungsgleichungen vermittelst einer Methode fortgesetzter Annäherungen integriert werden und aufser der durch die linearen Differentialgleichungen dargestellten ersten Annäherung noch eine zweite Annäherung berechnet wird. Weitere Untersuchungen in

1) Vgl. die Kritik der Methode der kleinen Schwingungen in der „Theorie des Kreisels“ von Klein und Sommerfeld (S. 364—374), ferner die Untersuchungen über Stabilität von Liapunoff, welche leider, abgesehen von einem in Liouv. Journ. 1897 erschienenen Aufsatz, in russischer Sprache erschienen sind und worüber im Jahrbuch der Fortschritte der Math. für 1892 (S. 876) und 1893/4 (S. 1393) berichtet ist.

2) Bd. II, S. 258 ff. unter der Überschrift „Zweite Annäherungen“. Vgl. auch Routh, Stability of motion, 1877. — Auf einige andere Arbeiten wird in einem späteren Aufsatz über Systeme mit mehreren Freiheitsgraden Bezug zu nehmen sein.

dieser Richtung sind allerdings erforderlich; ein wichtiges Hilfsmittel zur exakten Durchführung derselben bilden neuere Untersuchungen über Differentialgleichungen, wie sie von Poincaré[1]) in der Mechanik des Himmels angewandt worden sind und wie man sie zum Teil im dritten Bande des Traité d'Analyse von Picard dargestellt findet.

Im vorliegenden Aufsatz, welcher als Einleitung in allgemeinere Untersuchungen zu betrachten ist, beschränke ich mich auf Systeme mit einem Freiheitsgrad unter der Einwirkung von Kräften, welche von den Koordinaten und Geschwindigkeiten abhängen, aber nicht als lineare Funktionen betrachtet werden. Ich mache über die Kräfte, sowie über die Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten solche Voraussetzungen, dafs kleine (ungedämpfte oder gedämpfte) Schwingungen um eine Lage stabilen Gleichgewichts entstehen. Unter der üblichen Beschränkung auf die linearen Glieder findet man die im Folgenden behandelten Gegenstände z. B. in der „Dynamik diskreter Massenpunkte" von Helmholtz (herausgegeben von O. Krigar-Menzel) elementar und ausführlich dargestellt. Unter den allgemeinen Annahmen über die Kräfte, welche der folgenden Untersuchung zu Grunde liegen, ergeben sich unendliche Reihen zur Darstellung der Schwingungen; mit deren Hilfe werden dieselben Fragen untersucht, welche unter einfacheren Voraussetzungen in der erwähnten elementaren Bearbeitung behandelt sind.[2])

Erster Abschnitt.

§ 1.

Wir betrachten ein System, dessen Lage durch eine einzige Koordinate x bestimmt ist und dessen Verbindungen nicht von der Zeit t abhängen. Bei passender Wahl von x erscheint die lebendige Kraft in der Form

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.\,^{3)}$$

1) Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.

2) Von Kräften, welche die Zeit explizite enthalten (erzwungene Schwingungen), wird im Folgenden abgesehen.

3) Zunächst ist $T = \frac{1}{2}E\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, wo E eine positive Funktion von x ist. Durch die Substitution $\xi = \int\limits_0^x \sqrt{E(x)}\,dx$ erhält man $T = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$. Ist

$$E(x) = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \dots; \quad e_0 > 0$$

in eine für hinreichend kleine Werte von $|x|$ konvergente Potenzreihe entwickelbar, so gilt dasselbe für ξ:

$$\xi = \sqrt{e_0}\,x + \frac{e_1}{4\sqrt{e_0}}x^2 + \dots$$

Die von den Kräften bei der Verrückung dx geleistete Arbeit sei Qdx, wo
$$Q = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots; \quad a_1 < 0$$
in eine Potenzreihe entwickelbar sei, welche für hinreichend kleine Werte von $|x|$ konvergiert. Dann ist die Lage $x = 0$ eine stabile Gleichgewichtslage. Das Prinzip der lebendigen Kraft
$$dT = Qdx$$
ergiebt die Differentialgleichung
$$\frac{d^2x}{dt^2} = Q,$$
welche die Form der Differentialgleichung für die gradlinige Bewegung eines einzelnen Massenpunktes hat und welche wir, indem wir $a_1 = -1$ annehmen[1]), in der Form schreiben:

(A) $$\frac{d^2x}{dt^2} + x = F(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

Durch Integration erhält man
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = c'^2 + 2\int_0^x F(x)\,dx$$
$$= c'^2 + \tfrac{2}{3} a_2 x^3 + \tfrac{2}{4} a_3 x^4 + \ldots,$$
wobei $c'^2 (c' > 0)$ die Integrationskonstante ist. Hieraus folgt
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{c'^2 - x^2 + \tfrac{2}{3} a_2 x^3 + \tfrac{2}{4} a_3 x^4 + \ldots}.$$

Die äufsersten Lagen $x = c (c > 0)$ und $x = \bar{c} (\bar{c} < 0)$, in welchen $\frac{dx}{dt} = 0$ ist, ergeben sich als Potenzreihen von c', welche für hinreichend kleine Werte von c' konvergieren:
$$c = c' + \tfrac{1}{3} a_2 c'^2 + \left(\tfrac{5}{18} a_2^2 + \tfrac{1}{4} a_3\right) c'^3 + \ldots,$$
$$\bar{c} = -c' + \tfrac{1}{3} a_2 c'^2 - \left(\tfrac{5}{18} a_2^2 + \tfrac{1}{4} a_3\right) c'^3 + \ldots.$$

Wir stellen auch c' und $\bar{c}$ als Potenzreihen der Amplitude c dar, welche für hinreichend kleine Werte von c konvergent sind:
$$c' = c - \tfrac{1}{3} a_2 c^2 - \left(\tfrac{1}{18} a_2^2 + \tfrac{1}{4} a_3\right) c^3 + \ldots,$$
$$\bar{c} = -c + \tfrac{2}{3} a_2 c^2 - \tfrac{4}{9} a_2^2 c^3 + \ldots.$$

Wir nehmen an, für $t = 0$ sei $x = c$, $\frac{dx}{dt} = 0$. Die durch diese Anfangsbedingungen definierte Lösung x der Gleichung (A) bleibt bei

1) Man erreicht dies dadurch, dafs man $t\sqrt{-a_1}$ mit t bezeichnet.

einem Zeichenwechsel von t ungeändert, da sowohl die Differentialgleichung als auch die Anfangsbedingungen ungeändert bleiben, wenn man t in $-t$ verwandelt. Demnach erscheint x als gerade, $\frac{dx}{dt}$ als ungerade Funktion von t. Die Lage $x = 0$ werde zur Zeit $t = \omega_1$ zum ersten Mal erreicht, und zwar mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = -c'$. Bezeichnet man die zum Übergang aus dieser Lage in die äufserste Lage $x = \bar{c}$ erforderliche Zeit mit ω_2, so hat man $x = \bar{c}$, $\frac{dx}{dt} = 0$ für $t = \omega_1 + \omega_2 = \omega$. Setzt man $t - \omega = t'$, so geht die Gleichung (A) über in

$$\frac{dx^2}{dt'^2} + x = F(x);$$

die durch die Anfangsbedingungen $t' = 0$, $x = \bar{c}$, $\frac{dx}{dt'} = 0$ definierte Lösung bleibt bei einem Zeichenwechsel von t' ungeändert. Demnach hat unsere Lösung x von (A) für $t = \omega + \mathrm{t} (0 < \mathrm{t} \leq \omega)$ denselben Wert wie für $t = \omega - \mathrm{t}$, während $\frac{dx}{dt}$ für diese beiden Werte von t entgegengesetzt gleiche Werte annimmt. Für $t = \omega + \omega_2$ hat man also $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = c'$, und für $t = 2\omega$ ist $x = c$, $\frac{dx}{dt} = 0$. Da man für $t = 2\omega$ dieselben Werte von x und $\frac{dx}{dt}$ hat wie für $t = 0$, *so ist die Bewegung periodisch; die Dauer einer Schwingung ist* 2ω.[1])

§ 2.

Wir wollen sowohl *den Wert der Koordinate x zur Zeit t, als auch die halbe Schwingungsdauer ω als Funktion der als klein vorausgesetzten Amplitude c darstellen.*

Die durch die Anfangswerte

$$t = 0, \quad x = c, \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

bestimmte Lösung x der Gleichung (A) läfst sich nach einem Satze von Poincaré[2]) in eine Potenzreihe von c

$$x = c\varphi_1(t) + c^2\varphi_2(t) + c^3\varphi_3(t) + \ldots$$

---

1) Beschränkt man sich auf das lineare Glied in der Entwicklung der Kraft Q, setzt man also $F(x) \equiv 0$, so ist $x = c \cos t$, also $\omega_1 = \omega_2 = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \pi$, so dafs die Schwingungsdauer gleich 2π ist.

2) Poincaré, Méc. cél. Bd. I, S. 58. — Picard, Traité d'Analyse Bd. III, S. 157.

entwickeln, welche nach Festlegung einer beliebigen oberen Grenze t_0 für die Zeit t konvergiert, wenn $|c|$ unterhalb einer (von t_0 abhängigen) Grenze r bleibt. Setzt man nämlich

$$x = c + \xi, \quad \frac{dx}{dt} = \eta,$$

so geht die Gleichung (A) über in das System

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = -c - \xi + F(\xi + c)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad \xi = 0, \quad \eta = 0,$$

auf welches sich der Poincarésche Satz unmittelbar anwenden läſst; aus dem von Poincaré a. a. O. gegebenen Konvergenzbeweis läſst sich auch ein Wert für r entnehmen.[1])

Für $t = 0$ hat man

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0, \ldots$$
$$\varphi_1' = 0, \quad \varphi_2' = 0, \quad \varphi_3' = 0, \ldots.$$

Durch Einsetzung der für x angeschriebenen Reihe in die Gleichung (A) und durch Vergleichung der Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von c erhält man zur Bestimmung von φ_1, φ_2, φ_3, ... die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\varphi_1'' + \varphi_1 &= 0, \\
\varphi_2'' + \varphi_2 &= a_2 \varphi_1^2, \\
\varphi_3'' + \varphi_3 &= 2a_2 \varphi_1 \varphi_2 + a_3 \varphi_1^3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

1) Die Konvergenz ist gleichmäſsig für $0 \leqq t \leqq t_0$ und für $|c| < r$. — Nach Poincaré, a. a. O. S. 60 ist unsere Reihe für x sicher konvergent, wenn die dort mit S bezeichnete Gröſse als Potenzreihe von c konvergiert. S wird durch Auflösung einer quadratischen Gleichung zunächst als Potenzreihe von

$$\frac{c}{(1+c)^2} e^{2Mt}$$

gefunden, welche konvergiert, wenn der absolute Betrag dieser Gröſse kleiner als $\frac{1}{8}$ ist. Hieraus ist ersichtlich, daſs r um so kleiner wird, je gröſser man t_0 annimmt.

Unter Berücksichtigung der obigen Anfangsbedingungen findet man

$$\varphi_1 = \cos t,$$

$$\varphi_2 = \tfrac{1}{6}a_2(3 - 2\cos t - \cos 2t),$$

$$\varphi_3 = -\tfrac{1}{3}a_2^2 + (\tfrac{29}{144}a_2^2 + \tfrac{1}{32}a_3)\cos t + \tfrac{1}{9}a_2^2\cos 2t + (\tfrac{1}{48}a_2^2 - \tfrac{1}{32}a_3)\cos 3t$$
$$+ (\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3)\,t\sin t,$$

. . . .

$$\varphi_1' = -\sin t,$$

$$\varphi_2' = \tfrac{1}{3}a_2(\sin t + \sin 2t),$$

$$\varphi_3' = (\tfrac{31}{144}a_2^2 + \tfrac{11}{32}a_3)\sin t - \tfrac{2}{9}a_2^2\sin 2t - (\tfrac{1}{16}a_2^2 - \tfrac{3}{32}a_3)\sin 3t$$
$$+ (\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3)\,t\cos t,$$

. . . .

Zur Berechnung von ω beachten wir, dafs für $t = \omega$ $\frac{dx}{dt} = 0$, also

$$\varphi_1'(\omega) + c\varphi_2'(\omega) + c^2\varphi_3'(\omega) + \ldots = 0$$

sein mufs. Setzt man $\omega = \pi + \varepsilon$, so wird

$$\varphi_1'(\omega) = \sin\varepsilon = \varepsilon + o\cdot\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$\varphi_2'(\omega) = \tfrac{1}{3}a_2(-\sin\varepsilon + \sin 2\varepsilon) = \tfrac{1}{3}a_2\varepsilon + \ldots,$$

$$\varphi_3'(\omega) = -\pi(\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3) + \ldots$$

u. s. w. Aus der Gleichung

$$\varepsilon + \tfrac{1}{3}a_2c\varepsilon - \pi(\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3)c^2 + \ldots = 0$$

berechnet man ε als Potenzreihe von c, welche für hinreichend kleine Werte von $|c|$ konvergiert. *Man findet für die halbe Schwingungsdauer die Reihenentwicklung*

$$\omega = \pi + \pi(\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3)c^2 + \ldots.$$

Ähnlich findet man

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} + \tfrac{2}{3}a_2c + [\pi(\tfrac{5}{24}a_2^2 + \tfrac{3}{16}a_3) - \tfrac{2}{9}a_2^2]c^2 + \ldots,$$

indem man beachtet, dafs für $t = \omega_1$ $x = 0$ ist. Aus $\omega_2 = \omega - \omega_1$ folgt

$$\omega_2 = \frac{\pi}{2} - \tfrac{2}{3}a_2c + [\pi(\tfrac{5}{24}a_2^2 + \tfrac{3}{16}a_3) + \tfrac{2}{9}a_2^2]c^2 + \ldots.$$

§ 3.

Führt man an Stelle von t die neue Veränderliche

$$u = \frac{\pi}{\omega} t$$

ein, so wird x eine periodische Funktion von u mit der Periode 2π. Die Differentialgleichung (A) geht über in

$$(A') \qquad \frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d^2x}{du^2} + x = a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots;$$

es besteht eine konvergente Entwicklung von der Form

$$\frac{\pi^2}{\omega^2} = 1 + \lambda_2c^2 + \lambda_3c^3 + \ldots,$$

deren Koeffizienten $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ im Folgenden berechnet werden, ohne dafs die in § 2 hergeleitete Reihe für ω benutzt wird. Die durch die Anfangsbedingungen

$$u = 0, \quad x = c, \quad \frac{dx}{du} = 0$$

definierte Lösung x von (A') ist nach dem bereits benutzten Satze von Poincaré in eine Potenzreihe von c

$$x = c\psi_1(u) + c^2\psi_2(u) + c^3\psi_3(u) + \ldots$$

entwickelbar, welche für hinreichend kleine Werte von $|c|$ konvergiert. Wegen der Periodizität von x ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c^\nu \psi_\nu(u + 2\pi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c^\nu \psi_\nu(u)$$

oder

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c^\nu(\psi_\nu(u + 2\pi) - \psi_\nu(u)) = 0;$$

da der Koeffizient von c^ν in dieser Potenzreihe verschwinden mufs, so ist

$$\psi_\nu(u + 2\pi) = \psi_\nu(u),$$

d. h. $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ haben die Periode 2π.

Durch Einsetzen der obigen Reihe in die Gleichung (A') und Vergleichen der Koeffizienten von $c, c^2, c^3, \ldots$ erhält man für $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \cdots$ die Differentialgleichungen[1])

$$\psi_1'' + \psi_1 = 0,$$
$$\psi_2'' + \psi_2 = a_2\psi_1^2,$$
$$\psi_3'' + \psi_3 = -\lambda_2\psi_1'' + 2a_2\psi_1\psi_2 + a_3\psi_1^3 = 2\,a_2\psi_1\psi_2 + a_3\psi_1^3 + \lambda_2\psi_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

1) Darin ist $\psi' = \frac{d\psi}{du}$, $\psi'' = \frac{d^2\psi}{du^2}$.

und zwar ist für $u = 0$

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0, \dots$$
$$\psi_1' = 0, \quad \psi_2' = 0, \quad \psi_3' = 0, \dots.$$

Man findet zunächst

$$\psi_1 = \cos u,$$
$$\psi_2 = \tfrac{1}{6}a_2(3 - 2\cos u - \cos 2u).$$

Die dritte Differentialgleichung lautet nun

$$\psi_3'' + \psi_3 = -\tfrac{1}{3}a_2^2 + (\lambda_2 + \tfrac{5}{6}a_2^2 + \tfrac{3}{4}a_3)\cos u - \tfrac{1}{3}a_2^2\cos 2u + (\tfrac{1}{4}a_3 - \tfrac{1}{6}a_2^2)\cos 3u;$$

damit ψ_3 eine periodische Funktion wird, mufs der Koeffizient von $\cos u$ verschwinden, woraus sich

$$\lambda_2 = -(\tfrac{5}{6}a_2^2 + \tfrac{3}{4}a_3)$$

ergiebt; nunmehr erhält man

$$\psi_3 = -\tfrac{1}{3}a_2^2 + (\tfrac{29}{144}a_2^2 + \tfrac{1}{32}a_3)\cos u + \tfrac{1}{9}a_2^2\cos 2u + (\tfrac{1}{48}a_2^2 - \tfrac{1}{32}a_3)\cos 3u.$$

Allgemein ist

$$\psi_\lambda = A_{0\lambda} + A_{1\lambda}\cos u + A_{2\lambda}\cos 2u + \dots + A_{\lambda\lambda}\cos\lambda u.$$

Zum Beweise nehmen wir an, $\psi_1, \dots \psi_{\nu-1}$ seien in dieser Form berechnet, und es seien $\lambda_2, \dots \lambda_{\nu-2}$ gefunden. Die zur Bestimmung von ψ_ν dienende Differentialgleichung ist von der Form

$$\psi_\nu'' + \psi_\nu = -\lambda_2\psi_{\nu-2}'' \dots - \lambda_{\nu-1}\psi_1'' + \sum C\psi_{\alpha'}\psi_{\alpha''}\dots {\scriptstyle (\alpha'+\alpha''+\dots=\nu)}.$$

Mit Benutzung der Formel

$$\cos mu \cos nu = \tfrac{1}{2}\cos(m-n)u + \tfrac{1}{2}\cos(m+n)u$$

erhält man für $\sum C\psi_{\alpha'}\psi_{\alpha''}\dots$ eine Summe von Gliedern von der Form $A\cos\mu u\,(\mu \leqq \nu)$; für $\psi_{\nu-2}''$ hat man eine Summe von Gliedern von der Form $A\cos\mu u\,(\mu \leqq \nu - 2)$ u. s. w. Wir schreiben unsere Differentialgleichung

$$\psi_\nu'' + \psi_\nu = \mathfrak{A}_{0\nu} + (\lambda_{\nu-1} + \mathfrak{A}_{1\nu})\cos u + \mathfrak{A}_{2\nu}\cos 2u + \dots + \mathfrak{A}_{\nu\nu}\cos\nu u,$$

worin $\mathfrak{A}_{0\nu}, \mathfrak{A}_{1\nu}, \dots$ bekannt sind. Damit ψ_ν periodisch wird, mufs

$$\lambda_{\nu-1} = -\mathfrak{A}_{1\nu}$$

sein. Man erhält nun

$$\psi_\nu = A_{0\nu} + A_{1\nu}\cos u + \dots + A_{\nu\nu}\cos\nu u,$$

wo

$$A_{0\nu} = \mathfrak{A}_{0\nu}, \quad A_{2\nu} = -\frac{\mathfrak{A}_{2\nu}}{3}, \dots A_{\nu\nu} = -\frac{\mathfrak{A}_{\nu\nu}}{\nu^2 - 1}$$

ist; die Bedingung $\psi'_\nu(0) = 0$ ist von selbst erfüllt, die Bedingung $\psi_\nu(0) = 0$ ergiebt

$$A_{1\nu} = -A_{0\nu} - A_{2\nu} - \ldots - A_{\nu\nu}.$$

Insbesondere ist auf Grund der Ausdrücke für ψ_1, ψ_2, ψ_3:

$$A_{01} = 0,\ A_{11} = -1;$$
$$A_{02} = \tfrac{1}{2} a_2,\ A_{12} = -\tfrac{1}{3} a_2,\ A_{22} = -\tfrac{1}{6} a_2;$$
$$A_{03} = -\tfrac{1}{8} a_2^2,\ A_{13} = \tfrac{29}{144} a_2^2 + \tfrac{1}{32} a_3,\ A_{23} = \tfrac{1}{9} a_2^2,\ A_{33} = \tfrac{1}{48} a_2^2 - \tfrac{1}{32} a_3.$$

Demnach ist die Koordinate x in eine Potenzreihe der kleinen Amplitude c entwickelt, welche periodische Funktionen von $u = \frac{\pi}{\omega} t$ mit der Periode 2π zu Koeffizienten hat.

§ 4.

Als gerade periodische analytische Funktion von u mit der Periode 2π läſst sich x, falls $|c|$ unter einer gewissen Grenze bleibt, in eine trigonometrische Reihe

$$x = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nu$$

entwickeln, welche für alle Werte von u unbedingt und gleichmäſsig konvergent ist.[1]) Man hat

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nu\, du;$$

wenn man für x die in § 3 hergeleitete Reihe

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} c^\nu \psi_\nu(u)$$

setzt, welche, wenn $|c|$ unterhalb einer gewissen Grenze r liegt, für alle u gleichmäſsig konvergiert, so hat man für

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} c^\nu \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_\nu(u) \cos nu\, du$$

eine für $|c| < r$ konvergente Potenzreihe von c. Setzt man für ψ_ν den in § 3 aufgestellten Ausdruck

$$\psi_\nu(u) = \sum_{m=0}^{\nu} A_{m\nu} \cos mu$$

---

1) Vgl. Poincaré a. a. O. S. 64.

ein und beachtet man, dafs

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos mu \cos nu\,du = 0 \quad (m \lessgtr n)$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos^2 nu\,du = \begin{cases} 1 \text{ für } n > 0 \\ 2 \text{ für } n = 0 \end{cases}$$

ist, so erhält man

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \psi_\nu(u) \cos nu\,du = \begin{cases} A_{n\nu} & \text{für } \nu \geqq n \\ 0 & \text{„} \quad \nu < n. \end{cases}$$

Demnach ist

$$A_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{n\nu} c^\nu \quad (n > 0),$$

$$\tfrac{1}{2} A_0 = \sum_{\nu=2}^{\infty} A_{0\nu} c^\nu$$

und folglich

$$\begin{aligned} x = {} & (\tfrac{1}{2} a_2 c^2 - \tfrac{1}{3} a_2^2 c^3 + \ldots) \\ & + (c - \tfrac{1}{8} a c^2 + (\tfrac{29}{144} a_2^2 + \tfrac{1}{32} a_3) c^3 + \ldots) \cos u \\ & + (-\tfrac{1}{6} a_2 c^2 + \tfrac{1}{9} a_2^2 c^3 + \ldots) \cos 2u \\ & + ((\tfrac{1}{48} a_2^2 - \tfrac{1}{32} a_3) c^3 + \ldots) \cos 3u + \ldots. \end{aligned}$$ [1])

Hiermit ist x in eine nach Kosinus der Vielfachen von $u = \frac{\pi}{\omega} t$ fortschreitende Reihe entwickelt, welche Potenzreihen der kleinen Amplitude c zu Koeffizienten hat. Diese trigonometrische Reihe geht aus der in § 3 aufgestellten Reihe

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} c^\nu \cdot \sum_{n=0}^{\nu} A_{n\nu} \cos nu$$

durch Umstellung der Glieder hervor.[2])

1) Korteweg (Arch. néerl., Ser 2, Bd. 1) zeigt ohne Konvergenzuntersuchung, wie sich eine Reihe von dieser Form aus der Differentialgleichung herleiten läfst (auch für mehrere Freiheitsgrade).

2) Als einfaches Beispiel zum ersten Abschnitt kann das nach der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin x$$

schwingende Pendel dienen, welches zwar vermittelst elliptischer Funktionen behandelt werden kann, auf welches aber auch die oben hergeleiteten Formeln unmittelbar Anwendung finden, wenn man die Pendelgleichung in der Form schreibt:

$$\frac{d^2x}{d\left(\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot t\right)^2} + x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

Zweiter Abschnitt.

§ 5.

Wir gehen zur Betrachtung gedämpfter Schwingungen über. Die Kraft Q hänge nicht nur von x, sondern auch von $x' = \frac{dx}{dt}$ ab; es sei

$$Q = -\varkappa^2 x - 2\lambda x' + F(x, x'),$$

wo

$$F(x, x') = \sum_{n=2}^{\infty} F_n(x, x')$$

in eine für hinreichend kleine Werte von $|x|, |x'|$ konvergente Potenzreihe entwickelbar ist und unter $F_n(x, x')$ die Gesamtheit der Glieder $n$ter Dimension verstanden wird; wir setzen

$$F_2 = \alpha x^2 + 2\beta x x' + \gamma x'^2.$$

Die Bewegungsgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \varkappa^2 x = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

stellt, wie wir sehen werden, gedämpfte Schwingungen um die Gleichgewichtslage $x = 0$ dar, wenn wir $\varkappa$ und λ reell positiv und $\varkappa > \lambda$ annehmen.[1])

Unter Vernachlässigung der Funktion F haben wir die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \varkappa^2 x = 0,$$

welche, wenn $\varkappa^2 - \lambda^2 = \mu^2$ gesetzt und die Anfangsbedingungen

$$x = c, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \text{ für } t = 0$$

vorgeschrieben werden, die Lösung

$$x = ce^{-\lambda t}\left(\cos\mu t + \frac{\lambda}{\mu}\sin\mu t\right)$$

besitzt. Die äufsersten Lagen $\left(\frac{dx}{dt} = 0\right)$ werden zu den Zeiten

$$t = \frac{k\pi}{\mu} \qquad (k=0,\ 1,\ 2\ldots)$$

erreicht; die Ausschläge

$$x = c_k = (-1)^k c e^{-k\pi\frac{\lambda}{\mu}} \qquad (k=0,\ 1,\ 2\ldots)$$

---

1) Der Fall $\varkappa \leqq \lambda$ wird in § 8 behandelt.

bilden eine fallende geometrische Reihe. Setzt man $s_k = |c_{k-1}| + |c_k|$, so ist

$$\log \frac{s_{k+1}}{s_k} = \log \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = -\pi \frac{\mu}{\lambda}$$

das logarithmische Dekrement. Durch die Lage $x = 0$ geht das System zu den Zeiten

$$t = \tau + \frac{k\pi}{\mu} \quad (k=1, 2, \ldots),$$

wo τ diejenige Wurzel der Gleichung

$$\operatorname{tg} \mu\tau = \frac{\mu}{\lambda}$$

ist, welche der Bedingung

$$0 < \mu\tau < \frac{\pi}{2}$$

genügt. Die Geschwindigkeiten in der Lage $x = 0$, d. h. die Werte c'_k von $\frac{dx}{dt}$ für $t = \tau + \frac{k\pi}{\mu}$ sind dargestellt durch

$$c'_k = (-1)^k c e^{-\lambda\tau} e^{-k\pi \frac{\lambda}{\mu}} \quad (k=1, 2, \ldots);$$

sie bilden ebenfalls eine fallende geometrische Reihe.

Um nun die Bewegungsgleichung (B) ohne Vernachlässigungen zu integrieren, benutzen wir einen ebenfalls von Poincaré herrührenden Satz.[1]) Die quadratische Gleichung

$$m^2 + 2\lambda m + \varkappa^2 = 0$$

hat die beiden konjugiert komplexen Wurzeln

$$m_1 = -\lambda + i\mu, \quad m_2 = -\lambda - i\mu.$$

Durch die Substitution

$$x_1 = x' - m_2 x \quad x_2 = x' - m_1 x$$

geht das System

$$\frac{dx}{dt} = x'$$

$$\frac{dx'}{dt} = -\varkappa^2 x - 2\lambda x' + F(x, x')$$

über in

$$\frac{dx_1}{dt} = m_1 x_1 + F$$

$$\frac{dx_2}{dt} = m_2 x_2 + F,$$

1) Poincaré, Thèse (Paris 1879). — Picard, Traité d'Analyse, Bd. III, Kap. 1.

wo F als Potenzreihe von x_1, x_2 darzustellen ist, in welcher die Glieder von geringerer als der zweiten Dimension fehlen. Nach dem erwähnten Satze bestehen die Entwicklungen

$$x_1 = A_1 e^{m_1 t} + \mathfrak{P}_1(A_1 e^{m_1 t}, A_2 e^{m_2 t}),$$
$$x_2 = A_2 e^{m_2 t} + \mathfrak{P}_2(A_1 e^{m_1 t}, A_2 e^{m_2 t}),$$

wo A_1, A_2 Integrationskonstante und $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ Potenzreihen der beigefügten Argumente mit Gliedern von mindestens zweiter Dimension sind, welche konvergieren, wenn die absoluten Beträge von $A_1 e^{m_1 t}$, $A_2 e^{m_2 t}$ gewisse Grenzen nicht überschreiten. Setzt man

$$\frac{A_1}{m_1 - m_2} = \frac{A_1}{2i\mu} = C_1, \quad \frac{A_2}{m_1 - m_2} = \frac{A_2}{2i\mu} = C_2,$$

so hat man

$$x = \frac{x_1 - x_2}{m_1 - m_2} = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + \mathfrak{P}(C_1 e^{m_1 t}, C_2 e^{m_2 t}),$$
$$x' = \frac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_1 - m_2} = m_1 C_1 e^{m_1 t} + m_2 C_2 e^{m_2 t} + \overline{\mathfrak{P}}(C_1 e^{m_1 t}, C_2 e^{m_2 t}),$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ Potenzreihen mit Gliedern von mindestens zweiter Dimension sind.

Wir betrachten die durch die Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x = c, \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

bestimmte Lösung der Differentialgleichung (B). Aus den Gleichungen

$$c = C_1 + C_2 + \mathfrak{P}(C_1, C_2),$$
$$0 = m_1 C_1 + m_2 C_2 + \overline{\mathfrak{P}}(C_1, C_2)$$

ergeben sich C_1, C_2 als Potenzreihen von c (ohne konstantes Glied), welche für hinreichend kleine Werte von $|c|$ konvergieren:

$$C_1 = \mathfrak{p}_1(c) = -\frac{m_2}{m_1 - m_2} c + \cdots,$$
$$C_2 = \mathfrak{p}_2(c) = \frac{m_1}{m_1 - m_2} c + \cdots.$$

Die Reihe

$$x = \mathfrak{p}_1(c) e^{m_1 t} + \mathfrak{p}_2(c) e^{m_2 t} + \mathfrak{P}(\mathfrak{p}_1(c) e^{m_1 t}, \mathfrak{p}_2(c) e^{m_2 t})$$

läſst sich als Potenzreihe der Argumente c, $e^{m_1 t}$, $e^{m_2 t}$ auffassen:

$$x = \Sigma A c^{\nu} e^{\nu_1 m_1 t} e^{\nu_2 m_2 t}; \qquad (\nu \geqq \nu_1 + \nu_2 > 0),$$

da $|e^{m_1 t}| = |e^{m_2 t}| = e^{-\lambda t}$ für alle positiven Werte von t kleiner als 1 ist, so ist diese Reihe für $t \geqq 0$ konvergent, wenn man $|c|$ hinreichend klein annimmt.

Die Entwickelung nach Potenzen von c ergiebt

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} c^{\nu} \varphi_{\nu}(t),$$

wo φ_ν eine ganze Funktion νten Grades von $e^{m_1 t}$, $e^{m_2 t}$ ohne konstantes Glied bedeutet. Insbesondere ist

$$\varphi_1 = \frac{-m_2 e^{m_1 t} + m_1 e^{m_2 t}}{m_1 - m_2} = e^{-\lambda t}\left(\cos\mu t + \frac{\lambda}{\mu}\sin\mu t\right).$$

Der Funktion φ_ν können wir die Form geben:

$$\varphi_\nu = \Sigma e^{-p\lambda t}(A\cos q\mu t + B\sin q\mu t), \quad (p=1,\ldots\nu;\, q=p,\, q-2,\, p-4;\ldots > 0)$$

worin A und B reelle Zahlen sind.

Zunächst ist nämlich φ_ν eine Summe von Gliedern

$$e^{(\nu_1 m_1 + \nu_2 m_2)t} = e^{-(\nu_1+\nu_2)\lambda t} \cdot e^{i(\nu_1-\nu_2)\mu t} \quad (\nu_1+\nu_2 = p;\, 0 < p \leqq \nu)$$

mit konstanten Koeffizienten. Ein solches Glied zerfällt, wenn man $\nu_1 - \nu_2 = p - 2\nu_2 = q$ setzt, in die beiden mit konstanten Koeffizienten multiplizierten Ausdrücke $e^{-p\lambda t}\cos q\mu t$ und $e^{-p\lambda t}\sin q\mu t$. W. z. b. w.

In der oben für x aufgestellten Potenzreihe von c, $e^{m_1 t}$, $e^{m_2 t}$ setzen wir

$$e^{m_1 t} = e^{-\lambda t}\cos\mu t + ie^{-\lambda t}\sin\mu t,$$
$$e^{m_2 t} = e^{-\lambda t}\cos\mu t - ie^{-\lambda t}\sin\mu t.$$

Dadurch *wird x eine Potenzreihe von c, $e^{-\lambda t}\cos\mu t$, $e^{-\lambda t}\sin\mu t$, welche, wenn $|\, c\,|$ hinreichend klein ist, für $t \geqq 0$ konvergiert:*

$$x = c\left(e^{-\lambda t}\cos\mu t + \frac{\lambda}{\mu}e^{-\lambda t}\sin\mu t\right) + \cdots.$$

Man kann diese Reihe unmittelbar aus (B) nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten herleiten.

§ 6.

Durch Einsetzung der Reihe

$$x = c\varphi_1 + c^2\varphi_2 + \cdots$$

in die Differentialgleichung (B) und Vergleichen der Koeffizienten von c, c^2, ... erhält man die zur Bestimmung von $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... dienenden Differentialgleichungen

$$\varphi_1'' + 2\lambda\varphi_1' + \varkappa^2\varphi_1 = 0,$$
$$\varphi_2'' + 2\lambda\varphi_2' + \varkappa^2\varphi_2 = \alpha\varphi_1^2 + 2\beta\varphi_1\varphi_1' + \gamma\varphi_1'^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_2(0) = 0, \ldots$$
$$\varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 0, \ldots$$

Zunächst ist

$$\varphi_1 = e^{-\lambda t}\left(\cos\mu t + \frac{\lambda}{\mu}\sin\mu t\right),$$

$$\varphi_1' = -\frac{\varkappa^2}{\mu}e^{-\lambda t}\sin\mu t.$$

Setzt man

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha(\mu^2 - \lambda^2) + 2\beta\varkappa^2\lambda + \gamma\varkappa^4}{2\mu^2}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\alpha\lambda - \beta\varkappa^2}{\mu}, \quad \mathfrak{C} = \frac{\varkappa^2(\alpha - 2\beta\lambda + \gamma\varkappa^2)}{2\mu^2},$$

so lautet die zweite Differentialgleichung

$$\varphi_2'' + 2\lambda\varphi_2' + \varkappa^2\varphi_2 = e^{-2\lambda t}(\mathfrak{A}\cos 2\mu t + \mathfrak{B}\sin 2\mu t + \mathfrak{C});$$

ihr allgemeines Integral ist

$$\varphi_2 = e^{-2\lambda t}(A\cos 2\mu t + B\sin 2\mu t + C) + e^{-\lambda t}(\mathsf{A}\cos\mu t + \mathsf{B}\sin\mu t)$$

mit den Koeffizienten

$$A = \frac{\mathfrak{A}(3\lambda^2 - \mu^2) + 4\mathfrak{B}\lambda\mu}{(3\lambda^2 - \mu^2)^2 + 16\lambda^2\mu^2}, \quad B = \frac{-4\mathfrak{A}\lambda\mu + \mathfrak{B}(3\lambda^2 - \mu^2)}{(3\lambda^2 - \mu^2)^2 + 16\lambda^2\mu^2}, \quad C = \frac{\mathfrak{C}}{\lambda^2 + \mu^2};$$

die Bedingungen $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2'(0) = 0$ ergeben für die Integrationskonstanten A, B die Werte

$$\mathsf{A} = -A - C, \quad \mathsf{B} = (A + C)\frac{\lambda}{\mu} - 2B.$$

So fortfahrend, findet man $\varphi_3, \varphi_4, \ldots$

Damit ist x als Potenzreihe der anfänglichen Amplitude c dargestellt, deren Koeffizienten aus trigonometrischen und Exponentialfunktionen der Zeit t zusammengesetzt sind. Diese Reihe ist für alle $t \geqq 0$ konvergent, wenn $|c|$ unterhalb einer gewissen Grenze liegt.

Wir suchen die Zeiten

$$t = t_k, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

zu welchen das System eine äufserste Lage erreicht, für welche $\frac{dx}{dt} = 0$ ist. Die Gleichung

$$\varphi_1'(t_k) + c\varphi_2'(t_k) + \cdots = 0$$

wird, wenn man

$$t_k = \frac{k\pi}{\mu} + \varepsilon_k$$

setzt und die Gleichungen

$$\varphi_1'(t_k) = \varphi_1''\left(\frac{k\pi}{\mu}\right)\varepsilon_k + \cdots, \quad \varphi_2'(t_k) = \varphi_2'\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + \cdots$$

beachtet,

$$\varepsilon_k\varphi_1''\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + c\varphi_2'\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + \cdots = 0.$$

Daraus berechnet man ε_k und somit auch t_k als Potenzreihe von c:

$$t_k = \frac{k\pi}{\mu} - \frac{\varphi_2'\left(\frac{k\mu}{\mu}\right)}{\varphi_1''\left(\frac{k\pi}{\mu}\right)} c + \cdots;$$

hierin ist

$$\varphi_1''\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) = (-1)^{k+1} \varkappa^2 e^{-k\pi\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Für die aufeinander folgenden Amplituden c_k $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ d. h. für die zu $t = t_k$ gehörigen Werte von x, hat man

$$c_k = c\varphi_1(t_k) + c^2\varphi_2(t_k) + \cdots$$

und, wenn man

$$\varphi_1(t_k) = \varphi_1\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + 0 \cdot \varepsilon_k + \cdots, \quad \varphi_2(t_k) = \varphi_2\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + \cdots$$

setzt,

$$c_k = c\varphi_1\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + c^2\varphi_2\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + \cdots;$$

darin ist

$$\varphi_1\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) = (-1)^k e^{-k\pi\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Für $t = t_k$ ist $x = c_k$, $\frac{dx}{dt} = 0$. Durch die Substitution $t - t_k = \mathfrak{t}$ wird in (B) nur die unabhängige Veränderliche t durch $\mathfrak{t}$ ersetzt. Die Lösung mit den Anfangsbedingungen $\mathfrak{t} = 0$, $x = c_k$, $\frac{dx}{d\mathfrak{t}} = 0$ erreicht das nächste Extremum $x = c_{k+1}$ zur Zeit $\mathfrak{t} = t_{k+1} - t_k$. Ersetzt man also in den obigen Formeln $c_0 = c$ durch c_k, so geht c_1 in c_{k+1} und t_1 in $t_{k+1} - t_k$ über; man hat also

$$c_{k+1} = c_k\varphi_1\left(\frac{\pi}{\mu}\right) + c_k^2\varphi_2\left(\frac{\pi}{\mu}\right) + \ldots,$$

$$t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{\mu} - \frac{\varphi_2'\left(\frac{\pi}{\mu}\right)}{\varphi_1''\left(\frac{\pi}{\mu}\right)} c_k + \cdots.$$

Wir geben schliefslich noch die Zeiten

$$t = \tau_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

an, zu welchen das System durch die Lage $x = 0$ geht, und die zugehörigen Werte c_k' von $\frac{dx}{dt}$:

$$\tau_k = \tau + \frac{k\pi}{\mu} - \frac{\varphi_2\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right)}{\varphi_1'\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right)} c + \cdots,$$

$$c_k' = c\varphi_1'\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right) + c^2\left[\varphi_2'\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right) - \frac{\varphi_1''\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right)\varphi_2\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right)}{\varphi_1'\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right)}\right] + \cdots;$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_2(0) = 0, \ldots$$
$$\varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 0, \ldots$$

Zunächst ist

$$\varphi_1 = e^{-\lambda t}\left(\cos\mu t + \frac{\lambda}{\mu}\sin\mu t\right),$$

$$\varphi_1' = -\frac{\varkappa^2}{\mu}e^{-\lambda t}\sin\mu t.$$

Setzt man

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha(\mu^2 - \lambda^2) + 2\beta\varkappa^2\lambda + \gamma\varkappa^4}{2\mu^2}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\alpha\lambda - \beta\varkappa^2}{\mu}, \quad \mathfrak{C} = \frac{\varkappa^2(\alpha - 2\beta\lambda + \gamma\varkappa^2)}{2\mu^2},$$

so lautet die zweite Differentialgleichung

$$\varphi_2'' + 2\lambda\varphi_2' + \varkappa^2\varphi_2 = e^{-2\lambda t}(\mathfrak{A}\cos 2\mu t + \mathfrak{B}\sin 2\mu t + \mathfrak{C});$$

ihr allgemeines Integral ist

$$\varphi_2 = e^{-2\lambda t}(A\cos 2\mu t + B\sin 2\mu t + C) + e^{-\lambda t}(\mathsf{A}\cos\mu t + \mathsf{B}\sin\mu t)$$

mit den Koeffizienten

$$A = \frac{\mathfrak{A}(3\lambda^2 - \mu^2) + 4\mathfrak{B}\lambda\mu}{(3\lambda^2 - \mu^2)^2 + 16\lambda^2\mu^2}, \quad B = \frac{-4\mathfrak{A}\lambda\mu + \mathfrak{B}(3\lambda^2 - \mu^2)}{(3\lambda^2 - \mu^2)^2 + 16\lambda^2\mu^2}, \quad C = \frac{\mathfrak{C}}{\lambda^2 + \mu^2};$$

die Bedingungen $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2'(0) = 0$ ergeben für die Integrationskonstanten A, B die Werte

$$\mathsf{A} = -A - C, \quad \mathsf{B} = (A + C)\frac{\lambda}{\mu} - 2B.$$

So fortfahrend, findet man $\varphi_3, \varphi_4, \ldots$

Damit ist x als Potenzreihe der anfänglichen Amplitude c dargestellt, deren Koeffizienten aus trigonometrischen und Exponentialfunktionen der Zeit t zusammengesetzt sind. Diese Reihe ist für alle $t \geqq 0$ konvergent, wenn $|c|$ unterhalb einer gewissen Grenze liegt.

Wir suchen die Zeiten

$$t = t_k, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

zu welchen das System eine äufserste Lage erreicht, für welche $\frac{dx}{dt} = 0$ ist. Die Gleichung

$$\varphi_1'(t_k) + c\varphi_2'(t_k) + \cdots = 0$$

wird, wenn man

$$t_k = \frac{k\pi}{\mu} + \varepsilon_k$$

setzt und die Gleichungen

$$\varphi_1'(t_k) = \varphi_1''\left(\frac{k\pi}{\mu}\right)\varepsilon_k + \cdots, \quad \varphi_2'(t_k) = \varphi_2'\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + \cdots$$

beachtet,

$$\varepsilon_k\varphi_1''\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + c\varphi_2'\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + \cdots = 0.$$

Daraus berechnet man ε_k und somit auch t_k als Potenzreihe von c:

$$t_k = \frac{k\pi}{\mu} - \frac{\varphi_2'\left(\frac{k\mu}{\mu}\right)}{\varphi_1''\left(\frac{k\pi}{\mu}\right)} c + \cdots;$$

hierin ist

$$\varphi_1''\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) = (-1)^{k+1}\varkappa^2 e^{-k\pi\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Für die aufeinander folgenden Amplituden c_k $(k=0,1,2\ldots)$ d. h. für die zu $t = t_k$ gehörigen Werte von x, hat man

$$c_k = c\varphi_1(t_k) + c^2\varphi_2(t_k) + \cdots$$

und, wenn man

$$\varphi_1(t_k) = \varphi_1\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + 0\cdot\varepsilon_k + \cdots, \quad \varphi_2(t_k) = \varphi_2\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + \cdots$$

setzt,

$$c_k = c\varphi_1\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + c^2\varphi_2\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) + \cdots;$$

darin ist

$$\varphi_1\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) = (-1)^k e^{-k\pi\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Für $t = t_k$ ist $x = c_k$, $\frac{dx}{dt} = 0$. Durch die Substitution $t - t_k = \mathfrak{t}$ wird in (B) nur die unabhängige Veränderliche t durch $\mathfrak{t}$ ersetzt. Die Lösung mit den Anfangsbedingungen $\mathfrak{t} = 0$, $x = c_k$, $\frac{dx}{dt} = 0$ erreicht das nächste Extremum $x = c_{k+1}$ zur Zeit $\mathfrak{t} = t_{k+1} - t_k$. Ersetzt man also in den obigen Formeln $c_0 = c$ durch c_k, so geht c_1 in c_{k+1} und t_1 in $t_{k+1} - t_k$ über; man hat also

$$c_{k+1} = c_k\varphi_1\left(\frac{\pi}{\mu}\right) + c_k^2\varphi_2\left(\frac{\pi}{\mu}\right) + \ldots,$$

$$t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{\mu} - \frac{\varphi_2'\left(\frac{\pi}{\mu}\right)}{\varphi_1''\left(\frac{\pi}{\mu}\right)} c_k + \cdots.$$

Wir geben schliefslich noch die Zeiten

$$t = \tau_k \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

an, zu welchen das System durch die Lage $x = 0$ geht, und die zugehörigen Werte c_k' von $\frac{dx}{dt}$:

$$\tau_k = \tau + \frac{k\pi}{\mu} - \frac{\varphi_2\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right)}{\varphi_1'\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right)} c + \cdots,$$

$$c_k' = c\varphi_1'\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right) + c^2\left[\varphi_2'\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right) - \frac{\varphi_1''\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right)\varphi_2\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right)}{\varphi_1'\left(\tau + \frac{k\pi}{\mu}\right)}\right] + \cdots;$$

ein, so haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \varkappa^2 x = \pm\gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cdots,$$

worin das Zeichen $+$ oder $-$ gilt, je nachdem $\frac{dx}{dt}$ negativ oder positiv ist. Wenn wir noch a so klein voraussetzen, dafs $\varkappa > \lambda$ wird, so gelten die allgemeinen Formeln mit den Werten

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \gamma; \quad \bar{\alpha} = 0, \quad \bar{\beta} = 0, \quad \bar{\gamma} = -\gamma.$$

§ 8.

Es sei jetzt $\varkappa < \lambda$ (Fall der sog. aperiodischen Bewegung). Die Gleichung

$$m^2 + 2\lambda m + \varkappa^2 = 0$$

hat jetzt zwei reelle negative Wurzeln

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \varkappa^2}, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \varkappa^2}.$$

Durch dieselben Rechnungen wie in § 5 findet man als Lösung von (B)

$$x = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + \mathfrak{P}(C_1 e^{m_1 t}, C_2 e^{m_2 t}),$$
$$x' = m_1 C_1 e^{m_1 t} + m_2 C_2 e^{m_2 t} + \overline{\mathfrak{P}}(C_1 e^{m_1 t}, C_2 e^{m_2 t}),$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ Potenzreihen mit Gliedern von mindestens zweiter Dimension sind, welche für hinreichend kleine Werte von $|C_1| e^{m_1 t}$, $|C_2| e^{m_2 t}$ konvergieren.

Sind die Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x = c, \quad \frac{dx}{dt} = c'$$

vorgeschrieben, so erhält man aus den Gleichungen

$$c = C_1 + C_2 + \mathfrak{P}(C_1, C_2)$$
$$c' = m_1 C_1 + m_2 C_2 + \overline{\mathfrak{P}}(C_1, C_2)$$

C_1 und C_2 als Potenzreihen von c, c':

$$C_1 = \frac{c' - m_2 c}{m_1 - m_2} + \cdots, \quad C_2 = \frac{m_1 c - c'}{m_1 - m_2} + \cdots.$$

Nimmt man $|c|, |c'|$ hinreichend klein, so ist die obige Reihe für x für $t \geqq 0$ konvergent. Man kann x als Potenzreihe von c, c' mit von t abhängigen Koeffizienten oder auch als Potenzreihe von c, c' $e^{m_1 t}, e^{m_2 t}$ auffassen:

$$x = \frac{(c' - m_2 c)\, e^{m_1 t} - (c' - m_1 c)\, e^{m_2 t}}{m_1 - m_2} + \cdots.$$

Man hat $\lim x = 0$, $\lim x' = 0$ für $\lim t = \infty$; es findet asymptotische Annäherung an die Gleichgewichtslage ohne Schwingungen statt.

Wir betrachten schliefslich noch den Fall $\varkappa = \lambda$, in welchem die quadratische Gleichung $m^2 + 2\lambda m + \varkappa^2 = 0$ die Doppelwurzel $m = -\lambda$ besitzt. Durch die Substitution

$$x_1 = \lambda x + x', \quad x_2 = x$$

geht (B) über in das System

$$\frac{dx_1}{dt} = -\lambda x_1 + F(x_2,\, x_2 - \lambda x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\lambda x_2 + x_1 + F(x_2,\, x_1 - \lambda x_2),$$

welches eine Lösung von der Form[1])

$$x_1 = C_1 e^{-\lambda t} + \mathfrak{P}_1(C_1 e^{-\lambda t},\, (C_1 t + C_2)e^{-\lambda t}),$$

$$x_2 = (C_1 t + C_2)e^{-\lambda t} + \mathfrak{P}_2(C_1 e^{-\lambda t},\, (C_1 t + C_2)e^{-\lambda t})$$

besitzt, wo C_1, C_2 Konstante und $\mathfrak{P}$, $\overline{\mathfrak{P}}$ Potenzreihen mit Gliedern von mindestens zweiter Dimension sind, welche konvergieren, wenn die absoluten Beträge der Argumente hinreichend klein sind. Daraus folgt

$$x = (C_1 t + C_2)e^{-\lambda t} + \mathfrak{P}(C_1 e^{-\lambda t},\, (C_1 t + C_2)e^{-\lambda t}),$$

$$x' = (C_1 - \lambda C_2 - \lambda C_1 t)e^{-\lambda t} + \overline{\mathfrak{P}}(C_1 e^{-\lambda t},\, (C_1 t + C_2)e^{-\lambda t}).$$

Die Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x = c, \quad x' = c'$$

ergeben

$$c = C_2 + \mathfrak{P}(C_1,\, C_2), \quad c' = C_1 - \lambda C_2 + \overline{\mathfrak{P}}(C_1,\, C_2),$$

woraus man

$$C_2 = c + \cdots, \quad C_1 = c' + \lambda c + \cdots$$

als Potenzreihen von c, c' erhält. Hiernach ist

$$x = (c + (c' + \lambda c)t)\, e^{-\lambda t} + \cdots$$

eine Potenzreihe der vier Argumente c, c', $e^{-\lambda t}$, $te^{-\lambda t}$, welche bei hinreichend kleinen Werten von $|c|$, $|c'|$ für $t \geqq 0$ konvergiert. Auch jetzt hat man asymptotische Annäherung an die Gleichgewichtslage ohne Schwingungen.

---

1) Vgl. die Arbeit des Verf. Crelle's Journ. Bd. 117, S. 104 ff. u. S. 261 ff.

Dritter Abschnitt.

§ 9.

In der im zweiten Abschnitt behandelten Differentialgleichung (*B*) sei jetzt $\lambda = 0$. Nehmen wir, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet[1]), $\varkappa = 1$ an, so haben wir die Bewegungsgleichung

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + x = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

worin

$$F(x, x') = \alpha x^2 + 2\beta x x' + \gamma x'^2 + \cdots$$

wie früher eine Potenzreihe mit Gliedern von mindestens zweiter Dimension ist. *Hier hängt, wie wir sehen werden, der Charakter der Bewegung wesentlich von der Funktion F ab, die Beschränkung auf die linearen Glieder giebt im allgemeinen kein angenähertes Resultat mehr.*

Die durch die Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x = c, \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

bestimmte Lösung x von c kann in eine Potenzreihe von c

$$x = c\varphi_1(t) + c^2\varphi_2(t) + \cdots$$

entwickelt werden, welche, wenn der Zeit t positive Werte unterhalb einer irgendwie vorgeschriebenen Grenze t_0 beigelegt werden, für hinreichend kleine Werte von $|c|$ konvergiert.[2]) Aus den Differentialgleichungen

$$\varphi_1'' + \varphi_1 = 0,$$
$$\varphi_2'' + \varphi_2 = \alpha\varphi_1^2 + 2\beta\varphi_1\varphi_1' + \gamma\varphi_1'^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1'(0) = 0,$$
$$\varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ergiebt sich

$$\varphi_1 = \cos t,$$
$$\varphi_2 = \frac{\alpha+\gamma}{2} - \frac{\alpha+2\gamma}{3}\cos t - \frac{2\beta}{3}\sin t - \frac{\alpha-\gamma}{6}\cos 2t + \frac{\beta}{3}\sin 2t,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wobei zu beachten ist, daſs $\varphi_3, \varphi_4, \ldots$ auſserhalb der trigonometrischen Funktionen t enthalten.

---

1) Man führt $\varkappa t$ als unabhängige Veränderliche ein.

2) Poincaré, Méc. cél. I, S. 58—61.

Wie in § 6 findet man die Ausschläge c_1, c_2 und die Zeiten t_1 t_2, zu welchen sie erreicht werden:

$$c_1 = -c + \varphi_2(\pi)c^2 + \cdots, \quad (\varphi_2(\pi) = \alpha + \gamma)$$
$$c_2 = c + \varphi_3(2\pi)c^3 + \cdots;$$
$$t_1 = \pi - \varphi_2'(\pi)c + \cdots, \quad (\varphi_2'(\pi) = \tfrac{4}{3}\beta)$$
$$t_2 = 2\pi + \varphi_3'(2\pi)c^2 + \cdots$$

als Potenzreihen von c, welche konvergieren, wenn $|c|$ hinreichend klein ist. Ersetzt man c, c_1, c_2 durch c_{2n}, c_{2n+1}, c_{2n+2}, und beachtet man, dafs $|c_{2n}| = c_{2n}$, $|c_{2n+1}| = -c_{2n+1}$, $|c_{2n+2}| = c_{2n+2}$ ist, wenn c positiv angenommen wird, so hat man

$$|c_{2n+1}| = |c_{2n}| - \varphi_2(\pi)\,|c_{2n}|^2 + \cdots,$$
$$|c_{2n+2}| = |c_{2n}| + \varphi_3(2\pi)\,|c_{2n}|^3 + \cdots,$$

wo die Potenzreihen auf der rechten Seite für hinreichend kleine Werte von $|c_{2n}|$ konvergent sind.

Wir setzen

$$C_n = c_{2n}$$

und schreiben

$$C_{n+1} = C_n + a_3 C_n^3 + a_4 C_n^4 + \cdots,$$

wo

$$a_3 = \varphi_3(2\pi)$$

ist.

§ 10.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Bewegung bei hinreichend kleiner Amplitude c periodisch ist, besteht in dem Verschwinden sämtlicher Gröfsen a_3, a_4, ...

Denn ist diese Bedingung erfüllt, so ist $c_2 = c$; man hat für $t = t_2$ dieselben Werte von x und x' wie für $t = 0$. Soll umgekehrt x eine periodische Funktion von t sein, so mufs eine der Gröfsen c_{2n} mit c übereinstimmen; a_λ sei die erste der Gröfsen a_3, a_4 ..., welche nicht verschwindet; aus $c_2 = c + a_\lambda c^\lambda + \cdots$ folgt $c_{2n} = c + n a_\lambda c^\lambda + \cdots$, und die Übereinstimmung von c_{2n} mit c erfordert das Verschwinden von a_λ; es müssen also sämtliche Gröfsen a_3, a_4, ... verschwinden.

Die Periode ist

$$T = t_2 = 2\pi + \varphi_3'(2\pi)c^2 + \cdots,$$

die Ausschläge sind c und $\bar{c} = c_1$,

$$\bar{c} = -c + \varphi_2(\pi)c^2 + \cdots,$$

und die zum Übergang aus der Lage $x = c$ in die Lage $x = \bar{c}$ erforderliche Zeit $t_1 = \pi - \varphi_2'(\pi)c \cdots$.

Wir setzen[1])

$$u = \frac{2\pi t}{T},$$

sodafs x als periodische Funktion von u mit der Periode 2π erscheint:

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} c^{\nu} \psi_{\nu},$$

wo ψ_ν eine Funktion von u mit der Periode 2π ist. Um unter Voraussetzung der Periodizität $\psi_1, \psi_2, \ldots$ in Verbindung mit T zu berechnen, benutzen wir die Differentialgleichung

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{d^2x}{du^2} + x = F\left(x, \frac{2\pi}{T}\frac{dx}{du}\right),$$

worin

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = 1 + \lambda_2 c^2 + \lambda_3 c^3 + \cdots$$

ist. Man findet

$$\psi_1 = \cos u$$

und allgemein

$$\psi_\lambda = A_{0\lambda} + A_{1\lambda}\cos u + \cdots + A_{\lambda\lambda}\cos\lambda u + B_{1\lambda}\sin u + \cdots + B_{\lambda\lambda}\sin\lambda u.$$

Nach Berechnung von $\psi_1, \ldots \psi_{\nu-1}$ und $\lambda_2, \ldots \lambda_{\nu-2}$ hat man nämlich für ψ_ν eine Differentialgleichung von der Form

$$\psi_\nu'' + \psi_\nu + \lambda_2\psi_{\nu-2}'' + \cdots + \lambda_{\nu-1}\psi_1'' = \Sigma C\psi_{\alpha'}\psi_{\alpha''}\ldots\psi_{\beta'}'\psi_{\beta''}'\ldots$$
$$(\alpha' + \alpha'' + \cdots + \beta' + \beta'' + \cdots \leqq \nu)$$

deren rechte Seite $\psi_1, \ldots \psi_{\nu-1}$ enthält, aber von $\lambda_{\nu-1}$ unabhängig ist. Ist die oben angegebene Form von ψ_λ für $\lambda < \nu$ nachgewiesen, so hat unsere Differentialgleichung die Gestalt

$$\psi_\nu'' + \psi_\nu = \mathfrak{A}_{0\nu} + (\lambda_{\nu-1} + \mathfrak{A}_{1\nu})\cos u + \cdots + \mathfrak{A}_{\nu\nu}\cos\nu u$$
$$+ \mathfrak{B}_{1\nu}\sin u + \cdots + \mathfrak{B}_{\nu\nu}\sin\nu u.$$

Die Periodizität von ψ_ν erfordert $\lambda_{\nu-1} = -\mathfrak{A}_{1\nu}$, während $\mathfrak{B}_{1\nu}$ von selbst verschwinden mufs. Aus der Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen $\psi_\nu(0) = 0$, $\psi_\nu'(0) = 0$ erhält man für ψ_ν einen Ausdruck von der oben angegebenen Form.

Ähnlich wie in § 4 läfst sich x in eine nach cos und sin der Vielfachen von u fortschreitende Reihe umwandeln, deren Koeffizienten Potenzreihen von c sind.

Es giebt besondere Fälle, in welchen die Existenz periodischer Lösungen von (C) sich sofort erkennen läfst. Wenn $F(x, x')$ bei einer Zeichenänderung von x' ungeändert bleibt, d. h. wenn die Reihen-

1) Vgl. § 3.

entwickelung von $F(x, x')$ nur gerade Potenzen von x' enthält (z. B. $F(x, x') = \gamma x'^2$), so erkennt man, wie in § 1, dafs x und x' für $t = t_1 + \mathfrak{t}$ dieselben Werte annehmen wie für $t = t_1 - \mathfrak{t}$. Die Werte $x = c$, $x' = 0$, welche wir für $t = 0$ hatten, treten also für $t = 2t_1$ wieder auf, d. h. die Bewegung ist periodisch.

§ 11.

Es seien jetzt $a_3, a_4, \ldots$ nicht sämtlich gleich Null, und zwar sei a_λ ($\lambda \geqq 3$) die erste dieser Gröfsen, welche nicht verschwindet. Dann ist unter Beibehaltung der am Ende von § 9 eingeführten Bezeichnung

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = 1 + a_\lambda C_n^{\lambda-1} + a_{\lambda+1} C_n^\lambda + \cdots,$$

wo die Reihe rechts für hinreichend kleine Werte der positiven[1]) Gröfse C_n konvergent ist. Wir können zwei positive Gröfsen r und g so angeben, dafs für $C_n \leqq r$

$$1 + \frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda} C_n + \frac{a_{\lambda+2}}{a_\lambda} C_n^2 + \cdots > g$$

ist. Nun sind zwei Fälle möglich.

1) Ist $a_\lambda > 0$, so ist für $C_n \leqq r$

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = 1 + a_\lambda C_n^{\lambda-1}\left(1 + \frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda} C_n + \cdots\right) > 1 + g a_\lambda C_n^{\lambda-1} > 1.$$

Man hat also

$$C_0 < C_1 < \cdots < C_n < C_{n+1},$$

falls $C_n \leqq r$ ist, ferner

$$C_n > C_0 (1 + g a_\lambda C_0^{\lambda-1})^n, \quad C_{n+1} > C_n (1 + g a_\lambda C_0^{\lambda-1}).$$

Man kann mithin, so klein auch C_0 angenommen war, die Zahl m so wählen, dafs $C_m \leqq r$, $C_{m+1} > r$ wird. Mit anderen Worten, wenn auch die anfängliche positive Amplitude c noch so klein ist, so kann man doch eine Zahl m so angeben, dafs c_{2m}, d. i. der Wert von x für $t = t_{2m}$, gröfser als r ist. D. h. die Gleichgewichtslage $x = 0$ ist instabil. Dabei ist die folgende Definition der Stabilität zu Grunde gelegt: Das Gleichgewicht ist stabil, wenn nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Gröfse ε eine positive Gröfse η so gewählt werden kann, dafs, wenn die Werte x_0, x_0' von x und x' für $t = 0$ die Bedingung

$$|x_0| < \eta, \quad |x_0'| < \eta$$

1) In § 9 ist c positiv angenommen.

erfüllen, für alle Werte von $t \geqq 0$

$$|x| < \varepsilon, \quad |x'| < \varepsilon$$

bleibt.

2) Ist $a_\lambda < 0$, etwa $a_\lambda = -\alpha_\lambda$, $\alpha_\lambda > 0$, so ist für $C_n \leqq r$

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = 1 - \alpha_\lambda C_n^{\lambda-1}\left(1 + \frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda} C_n + \cdots\right) < 1 - g\alpha_\lambda C_n^{\lambda-1} < 1.$$

folglich $C_{n+1} < C_n$. Die abnehmenden Größsen

$$C_0, C_1, C_2, \ldots$$

besitzen einen positiven oder verschwindenden Grenzwert Γ. Wäre $\Gamma > 0$, so hätte man wegen $C_n > \Gamma$

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} < 1 - g\alpha_\lambda \Gamma^{\lambda-1},$$

folglich

$$C_n < C_0(1 - g\alpha_\lambda \Gamma^{\lambda-1})^n$$

und demnach

$$\lim_{n=\infty} C_n = 0,$$

falls $C_0 \leqq r$ war. Bei hinreichend kleiner Anfangsamplitude c ist

$$\lim_{n=\infty} c_{2n} = 0;$$

aus

$$c_{2n+1} = -c_{2n} + \varphi_2(\pi)c_{2n}^2 + \cdots$$

folgt $\lim\limits_{n=\infty} c_{2n+1} = 0$. Das System nähert sich für $t = \infty$ der Gleichgewichtslage $x = 0$, indem es um dieselbe schwingt.

Wir haben folgendes Ergebnis:

Wenn die Bewegungsgleichung (C) besteht, ist $x = 0$ dann und nur dann eine stabile Gleichgewichtslage, wenn entweder sämtliche Gröfsen a_3, a_4, ... verschwinden oder wenn die erste dieser Gröfsen, welche nicht verschwindet, negativ ist. Bei hinreichend kleiner Amplitude c finden im ersten Falle periodische, im zweiten Falle gedämpfte Schwingungen um die Gleichgewichtslage $x = 0$ statt.

Nachdem man im Falle der gedämpften Schwingungen die aufeinander folgenden Ausschläge $c_1, c_2 \ldots$ vermittelst der Rekursionsformel

$$c_{k+1} = -c_k + \varphi_2(\pi)c_k^2 + \cdots$$

berechnet hat, erhält man die Zeiten $t_1, t_2, \ldots$, zu welchen dieselben erreicht werden, aus

$$t_{k+1} - t_k = \pi - \varphi_2'(\pi)c_k + \cdots;$$

zur Darstellung der Bewegung im Zeitintervall $t_k \leqq t \leqq t_{k+1}$ dient die Gleichung

$$x = c_k \varphi_1(t - t_k) + c_k^2 \varphi_2(t - t_k) + \cdots.$$[1]

§ 12.

Zum Zwecke gewisser physikalischer Anwendungen bedürfen die bisherigen Entwickelungen einer ähnlichen Modifikation wie in § 8.

Es gelte die Gleichung

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + x = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

oder die Gleichung

$$(\overline{\text{C}}) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + x = \overline{F}\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

je nachdem x abnimmt oder zunimmt; es sei

$$F(x, x') = \alpha x^2 + 2\beta x x' + \gamma x'^2 + \cdots,$$

$$\overline{F}(x, x') = \bar{\alpha} x^2 + 2\bar{\beta} x x' + \bar{\gamma} x'^2 + \cdots.$$

Die Lösung von (C) mit den Anfangsbedingungen $t = 0$, $x = c$, $\frac{dx}{dt} = 0$ sei

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} c^\nu \varphi_\nu(t),$$

die Lösung von $(\overline{C})$ mit den Anfangsbedingungen $t = 0$, $x = \bar{c}$, $\frac{dx}{dt} = 0$

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{c}^\nu \overline{\varphi}_\nu(t);$$

dabei ist $\varphi_1 = \overline{\varphi}_1 = \cos t$.

Für $t \leqq t_1$, wo

$$t_1 = \pi - \varphi_2'(\pi) c + \cdots$$

ist, hat man

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} c^\nu \varphi_\nu(t)$$

mit der äufsersten Lage für $t = t_1$

$$x = c_1 = -c + \varphi_2(\pi) c^2 + \cdots.$$

1) Übrigens konvergiert diese Reihe auch für $t_{k+1} < t < t_0$, und zwar ist t_0 um so gröfser, je kleiner $|c_k|$ ist. (Vgl. die zweite Fufsnote zu § 2.)

Für $t_1 \leqq t \leqq t_2$ ist

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_1^{\nu} \bar{\varphi}_{\nu}(t - t_1)$$

mit der äufsersten Lage

$$x = c_2 = -c_1 + \bar{\varphi}_2(\pi) c_1^2 + \cdots.$$

Usw. Dabei ist die Anfangsamplitude c als positiv vorausgesetzt.

Es sei

$$c_2 = c + a_2 c^2 + a_3 c^3 + \cdots$$

mit

$$a_2 = \bar{\varphi}_2(\pi) - \varphi_2(\pi) = \bar{\alpha} - \alpha + \bar{\gamma} - \gamma.$$

Allgemein ist

$$c_{2n+2} = c_{2n} + a_2 c_{2n}^2 + a_3 c_{2n}^3 + \cdots$$

und

$$c_{2n+1} = -c_{2n} + \varphi_2(\pi) c_{2n}^2 + \cdots.$$

Ähnlich wie in § 10 und § 11 findet man, dafs die Gleichgewichtslage $x = 0$ dann und nur dann stabil ist, wenn entweder sämtliche Gröfsen $a_2, a_3, \cdots$ verschwinden oder wenn die erste dieser Gröfsen, welche nicht verschwindet, negativ ist. Im ersten Falle finden periodische, im zweiten gedämpfte Schwingungen um die Gleichgewichtslage $x = 0$ statt.

Als Beispiel betrachten wir das physische Pendel unter einem dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand. Setzt man in dem Beispiel von § 7 $a = 0$, so erhält man die Bewegungsgleichung

$$m\varrho^2 \frac{d^2x}{dt^2} = -mgl \sin x \mp b \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

und zwar gilt im letzten Glied das Zeichen $-$ oder $+$, je nachdem $\frac{dx}{dt}$ positiv oder negativ ist. Diese Gleichung schreibt sich

$$\frac{d^2x}{d\left(\frac{\sqrt{gl}}{\varrho}t\right)^2} + x = \mp \frac{b}{m\varrho^2}\left(\frac{dx}{d\left(\frac{\sqrt{gl}}{\varrho}t\right)}\right)^2 + \frac{x^3}{3!} - \cdots;$$

in den obigen Formeln hat man

$$\alpha = \bar{\alpha} = \beta = \bar{\beta} = 0, \; \gamma = -\bar{\gamma} = \frac{b}{m\varrho^2}$$

zu setzen und $\frac{\sqrt{gl}}{\varrho} t$ statt t zu schreiben. Wegen $a_2 = -2\gamma < 0$ treten gedämpfte Schwingungen auf.

§ 13.

Der dritte Abschnitt läfst sich zu den Untersuchungen von Poincaré über die durch Differentialgleichungen definierten Kurven[1]) in Beziehung setzen. Wenn wir auch von dieser Beziehung keinen

1) Poincaré, Liouv. Journ. 1885. — Picard, Traité Bd. III. S. 207—227.

Gebrauch gemacht haben, so ist doch ein kurzer Hinweis darauf von Interesse.

Aus dem System

$$\text{(a)} \qquad \frac{dx}{dt} = x', \ \frac{dx'}{dt} = -x + F(x, x'),$$

durch welches die Differentialgleichung (*C*) in § 9 ersetzt werden kann, erhält man durch Elimination von dt die Gleichung

$$\text{(b)} \qquad \frac{dx}{x'} = \frac{dx'}{-x + F(x, x')},$$

welche den singulären Punkt $x = 0$, $x' = 0$ besitzt. Ist Φ eine Funktion von x und x', welche der partiellen Differentialgleichung

$$x' \frac{\partial \Phi}{\partial x} - (x - F(x, x')) \frac{\partial \Phi}{\partial x'} = 0$$

genügt, so ist $\Phi =$ const. ein Integral von (*b*). Setzt man für Φ eine Potenzreihe von x, x',

$$\Phi = \Phi_2 + \Phi_3 + \cdots + \Phi_i + \cdots,$$

worin $\Phi_2 = x^2 + x'^2$ und Φ_i eine ganze homogene Funktion $i$ten Grades ist, so erhält man für Φ_i eine Differentialgleichung

$$x' \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi_i}{\partial x'} = H_i,$$

deren rechte Seite H_i von den $\Phi_n (n < i)$ abhängt. Hat man für $\Phi_n (n < i)$ eine ganze homogene Funktion $n$ten Grades gefunden, so ergiebt sich für Φ_i im Falle eines ungeraden i eine ganze homogene Funktion $i$ten Grades, im Falle eines geraden $i \geqq 4$ jedoch nur dann, wenn eine gewisse Konstante $C_0^{(i)}$ verschwindet.[1])

Sind alle Konstanten $C_0^{(i)}$ $(i = 4, 6, 8 \ldots)$ gleich Null, so erhält man für Φ eine Potenzreihe von x, x', welche für hinreichend kleine Werte von $|x|$, $|x'|$ konvergent ist; in diesem Falle wird der singuläre Punkt $x = 0$, $x' = 0$ der Differentialgleichung (*b*) von Poincaré als centre bezeichnet. Das System (*a*) wird durch periodische Funktionen x, x' von t befriedigt, falls die Werte x_0, x_0' von x, x' für $t = 0$ dem absoluten Betrage nach hinreichend klein sind.

Sind die unendlich vielen Bedingungen für das Vorhandensein eines centre nicht erfüllt und ist die erste nicht verschwindende Konstante $C_0^{(i)}$ negativ, so tritt der Punkt (x, x'), welcher sich für $t = 0$ in beliebiger Nähe von $O(x = 0, x' = 0)$ befand, mit wachsendem t aus einer den Anfangspunkt 0 umgebenden geschlossenen Kurve heraus;

---

1) Picard, a. a. O. S. 210.

wenn sich t der Grenze $-\infty$ nähert, nähert sich (x, x') auf einer Spirale der Lage O. Ist die erste nicht verschwindende Konstante $C_k^{(1)}$ positiv, so hat man in dem soeben ausgesprochenen Satze nur das Vorzeichen von t zu vertauschen.

Fafst man x, x' als Koordinaten eines Punktes P in der Ebene auf, der sich den Gleichungen (a) zufolge bewegt, so sind die in der Nähe von O verlaufenden Bahnkurven von P in allgemeinen Spiralen mit dem asymptotischen Punkt O (welcher entweder für $t = -\infty$ oder für $t = +\infty$ erreicht wird), im Falle des centre jedoch geschlossene Kurven, welche O umgeben. Es ist also stets ein Schnittpunkt $x = c (c > 0)$, $x' = 0$ der Bahnkurve mit der x-Achse vorhanden; wir können annehmen, dafs diesem Schnittpunkt die Zeit $t = 0$ entspricht. Damit ist die in § 9 eingeführte Form der Anfangsbedingungen

$$t = 0, \; x = c, \; \frac{dx}{dt} = 0$$

gerechtfertigt. Ohne Bezugnahme auf die soeben kurz zusammengefafsten Resultate von Poincaré erreicht man dieses Ziel auf folgendem Wege.

Die Differentialgleichung (b) geht durch Einführung von Polarkoordinaten, d. h. durch die Substitution

$$x = \varrho \cos\theta, \quad x' = \varrho \sin\theta,$$

über in

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = A\varrho^2 + B\varrho^3 + \cdots,$$

wo A, B ganze Funktionen von $\cos\theta$, $\sin\theta$ sind.[1]) Die durch den Punkt

$$x_0 = \varrho_0 \cos\theta_0, \quad x_0' = \varrho_0 \sin\theta_0 \qquad (0 \geq \theta \geq 2\pi)$$

gehende Integralkurve wird durch die Gleichung

$$\varrho = \alpha_1 \varrho_0 + \alpha_2 \varrho_0^2 + \cdots$$

dargestellt, deren rechte Seite eine Potenzreihe von ϱ_0 mit von θ abhängigen Koeffizienten dargestellt wird, welche für Werte von ϱ_0 unter einer gewissen Grenze konvergiert, wenn θ auf das Intervall $0 \cdots 2\pi$ beschränkt wird. Setzt man darin $\theta = 0$ oder $= 2\pi$, so erhält man für ϱ einen gewissen Wert c. So ergiebt sich $x = c$, $x' = 0$ als Schnittpunkt der Integralkurve mit der x-Achse, welchem wir die Zeit $t = 0$ zuordnen können.

1) Picard, a. a. O. S. 214.

Über die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenkmechanismus und ihre Bedeutung für die technische Mechanik.

Von O. Fischer in Leipzig.

Bei meinen Untersuchungen über die Mechanik des menschlichen Körpers[1]) bin ich darauf geführt worden, gewisse Massensysteme und feste Punkte innerhalb der einzelnen Glieder in die Betrachtung hereinzuziehen, welche sowohl in kinematischer, als auch in kinetischer Hinsicht eine wesentliche Vereinfachung und auch zugleich gröfsere Anschaulichkeit der Untersuchung bedingen. Die an dem speziellen Beispiel des menschlichen Körpers gewonnenen Gesichtspunkte lassen sich leicht für jeden beliebigen Gelenkmechanismus verwerten. Ich entspreche daher gern der an mich ergangenen Aufforderung, dieselben im folgenden auseinander zu setzen, und ihre Anwendbarkeit auf die in der Technik verwendeten Gelenkmechanismen an einigen speziellen Beispielen darzulegen.

A. Das dreigliedrige Gelenksystem.

1. Voraussetzungen und Definitionen.

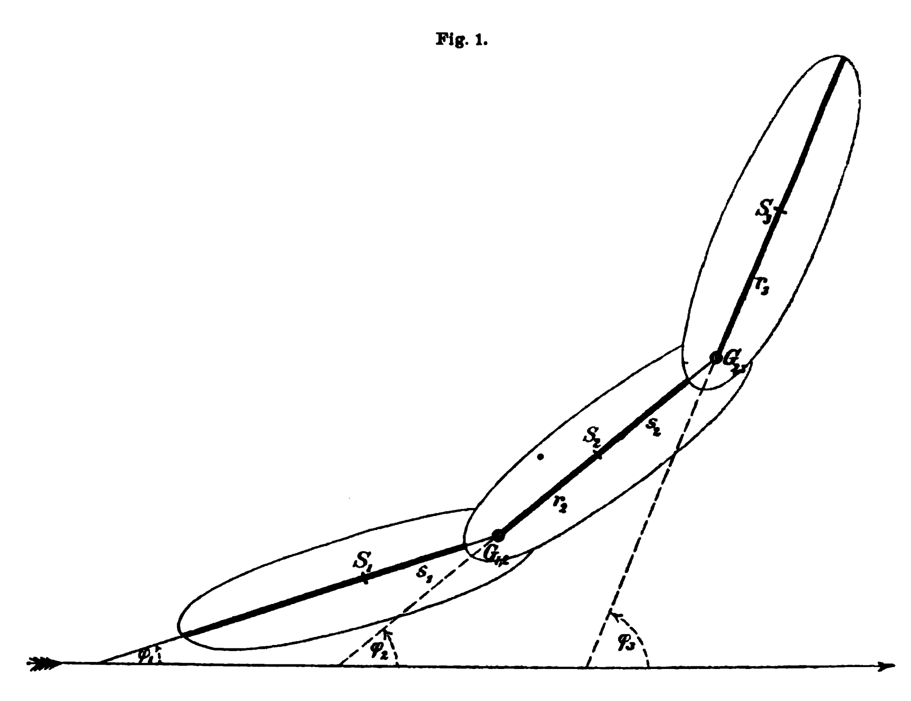
Es möge zunächst ein System von drei Körpern in Betracht gezogen werden, bei welchem sowohl der erste und zweite, als auch der zweite und dritte Körper durch je ein Charniergelenk mit einander in Verbindung stehen. Die beiden Gelenkachsen seien gleich gerichtet, und der Schwerpunkt des mittleren Körpers liege mit denselben in einer Ebene. Ferner möge die Ebene, welche man in irgend einer beliebigen Stellung des Systems durch die Schwerpunkte der drei Körper hindurch gelegt denkt, auf der gemeinsamen Richtung der Gelenkachsen senkrecht stehen; dann wird dies in allen anderen Stellungen der Körper zu einander auch der Fall sein. Macht man noch die Voraussetzung, dafs die durch die drei Schwerpunkte bestimmte Ebene im Raum fest bleibt, so vermag das System der drei Körper nur ebene Bewegungen auszuführen. Es genügt daher in diesem Falle, die Projektion der Bewegung auf die feste Ebene zu untersuchen.

---

1) veröffentlicht in den Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Band XX, XXII, XXIII, XXV und XXVI.

Es sollen nun folgende Bezeichnungen eingeführt werden. Die Massen der drei Körper seien m_1, m_2, m_3 und die Schwerpunkte derselben S_1, S_2, S_3. Die Durchschnittspunkte der beiden Gelenkachsen mit der festen Ebene mögen die Mittelpunkte der beiden Gelenke heifsen und mit $G_{1,2}$ resp. $G_{2,3}$ bezeichnet sein (vgl. Fig. 1). Die Verbindungslinien $\overline{S_1 G_{1,2}}$, $\overline{G_{1,2} G_{2,3}}$ und $\overline{G_{2,3} S_3}$, bezüglich deren Verlängerungen, welche nach der gemachten Voraussetzung immer in die feste Ebene hineinfallen, sollen die Längsachsen der drei Körper genannt sein; die Längsachse des zweiten Körpers wird dann gleichzeitig

Fig. 1.



den Schwerpunkt S_2 enthalten. Es ist nun noch nötig, auf jeder der drei Längsachsen eine positive und eine negative Richtung zu unterscheiden. Die positive Richtung soll diejenige sein, in welcher die Längsachse durchlaufen wird, wenn man von S_1 aus den gebrochenen Linienzug $S_1 G_{1,2} G_{2,3} S_3$ beschreibt. Endlich soll vorausgesetzt werden, dafs die Längsachse eines jeden der drei Körper eine Hauptträgheitsachse für seinen Schwerpunkt darstellt, und dafs die Trägheitsmomente für alle zur Längsachse senkrechten Achsen durch einen Schwerpunkt gleich grofs sind. Dann stellt auch die zu den Gelenkachsen parallele Schwerpunktsachse eines jeden der drei Körper eine Hauptträgheitsachse dar; der zu der letzteren gehörige Trägheitsradius, welcher zu-

nächst allein in Frage kommt, sei für die drei Körper des Systems bezüglich mit $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ bezeichnet.

Das Körpersystem besitzt nun im allgemeinsten Falle ebener Bewegung 5 Grade der Freiheit; es mufs daher seine Lage im Raume durch 5 allgemeine Koordinaten eindeutig bestimmt werden können. Ist insbesondere die ebene Bewegung noch in der Weise beschränkt, dafs dabei ein Punkt des Körpersystems in der festen Ebene seine Lage beibehält, so bleiben dem Gelenkmechanismus nur 3 Grade von Bewegungsfreiheit, so dafs also die Anzahl der allgemeinen Koordinaten sich noch um 2 verringert. In diesem speziellen Falle, der gerade in der Technik oft vorkommt, wählt man als allgemeine Koordinaten zweckmäfsiger Weise die Winkel φ_1, φ_2, φ_3 (Fig. 1), welche die positiven Richtungen der drei Längsachsen mit einer bestimmten Richtung in der festen Ebene bilden. Auch im allgemeinen Falle kann man diese Winkel als drei Koordinaten für das Körpersystem auffassen; man hat denselben dann nur noch zwei Koordinaten hinzuzufügen, welche die Lage irgend eines, etwa in der Ebene der drei Schwerpunkte liegenden Punktes des Systems in dieser festen Ebene eindeutig bestimmen. Dieser Punkt kann beliebig in irgend einem der drei Körper angenommen werden, es genügt aber auch, wenn er eine bestimmt definierte Lage zu den drei Körpern für jede Stellung derselben besitzt. Das letztere trifft z. B. für den Gesamtschwerpunkt S_0 des Körpersystems zu.

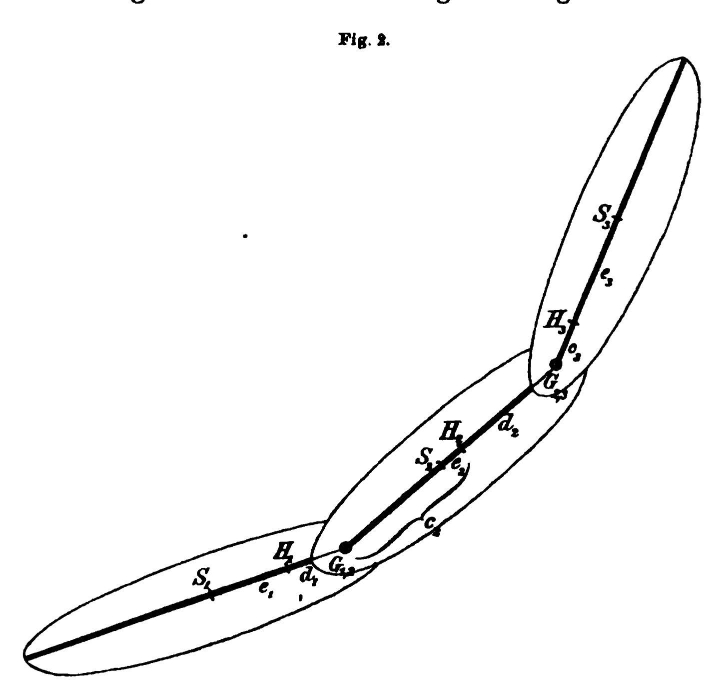
Der auf der Längsachse des ersten Körpers liegende Schwerpunkt S_1 besitze vom Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ die Entfernung s_1, der auf der Längsachse des zweiten Körpers liegende Schwerpunkt S_2 von den beiden Gelenkmittelpunkten $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ bezüglich die Entfernungen r_2 und s_2, und der auf der Längsachse des dritten Körpers liegende Schwerpunkt S_3 endlich vom Gelenkmittelpunkt $G_{2,3}$ die Entfernung r_3. Bedeutet l_2 den Abstand der beiden Gelenkmittelpunkte von einander, so hat man dann noch die Beziehung $r_2 + s_2 = l_2$. Alle diese Strecken sollen in derselben Richtung wie die Längsachsen selbst, auf denen sie liegen, positiv gerechnet werden.

Ich denke mir nun im Punkte $G_{1,2}$ die Massen m_2 und m_3 konzentriert und dem ersten Körper hinzugefügt, ferner für den zweiten Körper im Punkte $G_{1,2}$ die Masse m_1 und im Punkte $G_{2,3}$ die Masse m_3 konzentriert und ihm hinzugefügt, und endlich im Punkte $G_{2,3}$ die Massen m_1 und m_2 konzentriert und dem dritten Körper hinzugefügt. Dabei ist natürlich sowohl $G_{1,2}$ als auch $G_{2,3}$ das eine Mal als fester Punkt des einen, das andere Mal als fester Punkt des andern der beiden durch das betreffende Gelenk verbundenen Körper aufgefafst.

Auf diese Weise entstehen drei Massensysteme von der Gesamtmasse $m_0 = m_1 + m_2 + m_3$ des ganzen Körpersystems. Ich bezeichne sie als *„reduzierte Systeme"*, und zwar im vorliegenden Falle als erstes, zweites oder drittes reduziertes System, je nachdem es sich dabei um den durch die beiden anderen Massen belasteten ersten, zweiten oder dritten Körper des gegebenen Systems handelt. Es läfst sich nun ohne weiteres einsehen, dafs der Schwerpunkt eines jeden der drei reduzierten Systeme einen unveränderlichen Punkt des zu Grunde gelegten Körpers darstellt, der unter den getroffenen Voraussetzungen über die gegenseitige Lage der Gelenkmittelpunkte der drei Körper auf der Längsachse des betreffenden Körpers liegt. Diese Schwerpunkte der drei reduzierten Systeme nenne ich die *„Hauptpunkte"* der drei Körper; sie mögen durch H_1, H_2, H_3 bezeichnet sein.

In der folgenden Figur 2 sind die drei Hauptpunkte auf den Längsachsen eingezeichnet worden. Die genaue Lage derselben richtet

Fig. 2.



sich natürlich nach dem Gröfsenverhältnis der drei Massen und der Lage der Schwerpunkte S_1, S_2, S_3. Führt man folgende Bezeichnungen ein:

$$S_1H_1 = e_1, \quad H_1G_{1,2} = d_1, \quad G_{1,2}H_2 = c_2,$$
$$S_2H_2 = e_2, \quad H_2G_{2,3} = d_2, \quad G_{2,3}H_3 = c_3,$$
$$S_3H_3 = e_3,$$

wobei wieder die einzelnen Strecken in derselben Richtung wie die Längsachsen selbst positiv gerechnet werden sollen, so folgen aus der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der drei reduzierten Systeme bei der in Figur 2 angenommenen Lage von H_2 ohne weiteres zwischen diesen Gröfsen die Relationen:

$$(1) \quad \begin{aligned} -m_1 e_1 + (m_2 + m_3) d_1 &= 0 \\ -m_1 c_2 - m_2 e_2 + m_3 d_2 &= 0 \\ -(m_1 + m_2) c_3 + m_3 e_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die Strecken d_1, c_2, d_2 und c_3, durch welche die Lage der drei Hauptpunkte zu den beiden Gelenkmittelpunkten bestimmt wird, sollen kurz als *Hauptstrecken* bezeichnet sein. Die Gröfse derselben gewinnt man mit Hülfe der leicht abzuleitenden Relationen:

$$(2) \quad \begin{aligned} m_0 d_1 &= m_1 s_1 \\ m_0 c_2 &= m_2 r_2 + m_3 l_2 \\ m_0 d_2 &= m_1 l_2 + m_2 s_2 \\ m_0 c_3 &= m_3 r_3 \end{aligned}$$

Für die Entfernung der Hauptpunkte von den zugehörigen Einzelschwerpunkten hat man endlich noch die Relationen:

$$(3) \quad \begin{aligned} m_0 e_1 &= (m_2 + m_3) s_1 \\ m_0 e_2 &= -m_1 r_1 + m_3 s_3 \\ m_0 e_3 &= (m_1 + m_2) r_3. \end{aligned}$$

Aus allen Relationen geht übereinstimmend hervor, dafs die Lage des Hauptpunktes eines Gliedes nicht von den absoluten Gröfsen der Massen der drei Glieder des Gelenkmechanismus, sondern nur von deren Verhältnissen abhängt.

Die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenkmechanismus spielen nun, wie wir sehen werden, für die Kinetik desselben eine ähnliche Rolle, wie der Schwerpunkt bei einem einzigen starren Körper.

Es wird sich weiterhin zeigen, dafs auch die Trägheitsmomente der reduzierten Systeme in Bezug auf ihre Schwerpunktsachsen, d. h. also die durch den Hauptpunkt der einzelnen Glieder gehenden Achsen, für die Bewegung des ganzen Körpersystems eine ähnliche Bedeutung erlangen, wie die Trägheitsmomente eines einzigen starren Körpers.

Bei den das Problem vereinfachenden Voraussetzungen über die Massenverteilung und die Lage des Schwerpunktes in den einzelnen Gliedern ergiebt sich zunächst, dafs die Längsachse eines jeden Gliedes auch für das entsprechende reduzierte System eine Hauptträgheitsachse darstellt, und dafs auch hier das Trägheitsellipsoid ein Rotations-

ellipsoid mit der Längsachse des Gliedes als Rotationsachse ist. Daher stellt auch die zu den Gelenkachsen parallele Hauptpunktsachse eine Hauptträgheitsachse des reduzierten Systems dar. Bezeichnet man den zu letzterer gehörenden Trägheitsradius für die drei Glieder bezüglich mit k_1, k_2, k_3 und beachtet, daſs jedes reduzierte System die Gesamtmasse m_0 besitzt, so ergeben sich aus der Zusammensetzung der drei reduzierten Systeme folgende Werte der entsprechenden Trägheitsmomente:

$$\begin{aligned} m_0 k_1^2 &= m_1(\varkappa_1^2 + e_1^2) + (m_2 + m_3) d_1^2 \\ m_0 k_2^2 &= m_2(\varkappa_2^2 + e_2^2) + m_1 c_2^2 + m_3 d_2^2 \\ m_0 k_3^2 &= m_3(\varkappa_3^2 + e_3^2) + (m_1 + m_2) c_3^2. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Zusammenhang der Hauptpunkte mit dem Gesamtschwerpunkt.

Zieht man von einem beliebigen Punkte O aus die Verbindungsvektoren nach den drei Einzelschwerpunkten S_k und dem Gesamtschwerpunkt S_0, so findet bekanntlich die von Leibniz herstammende Relation statt

$$[OS_0] = \frac{1}{m_0} \sum_1^3 m_k [OS_k],$$

wobei die eckige Klammer die Strecken als Vektoren kennzeichnen, und daher das Summenzeichen die geometrische Addition andeuten soll. Läſst man nun den Punkt O der Reihe nach mit H_1, H_2 und H_3 zusammenfallen und ersetzt dabei im ersten Falle die Strecken $[H_1 S_2]$ und $[H_1 S_3]$ durch die Vektorsummen $\bar{d}_1 + \bar{r}_2$ und $\bar{d}_1 + \bar{l}_2 + \bar{r}_3$, im zweiten Falle $[H_2 S_1]$ und $[H_2 S_3]$ durch die Vektorsummen $-\bar{c}_2 - \bar{s}_1$ und $\bar{d}_2 + \bar{r}_3$ und im dritten Falle $[H_3 S_1]$ und $[H_3 S_2]$ durch die Vektorsummen $-\bar{c}_3 - \bar{l}_2 - \bar{s}_1$ und $-\bar{c}_3 - \bar{s}_2$, wobei die nur durch einen einzigen Buchstaben dargestellten Vektoren einfach mit einem über dem Buchstaben befindlichen Strich bezeichnet sind, so erhält man unter Berücksichtigung der Relationen (1) und (2) die einfachen Formeln:

$$(5) \quad [H_1 S_0] = \bar{c}_2 + \bar{c}_3; \quad [H_2 S_0] = -\bar{d}_1 + \bar{c}_3 \quad \text{und} \quad [H_3 S_0] = -\bar{d}_2 - \bar{d}_1.$$

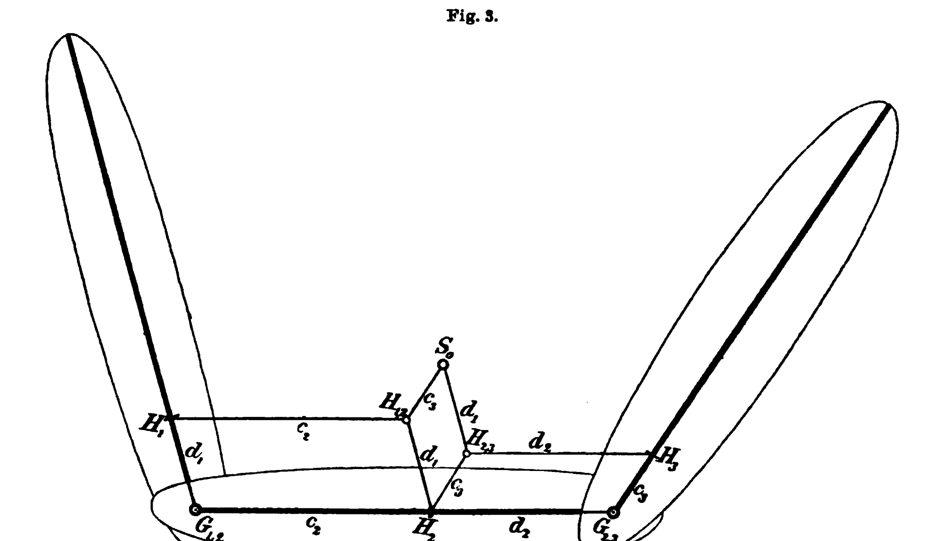
Es gilt also der

Satz: *Man gelangt stets zu dem Gesamtschwerpunkte S_0 des Körpersystems, wenn man von irgend einem Hauptpunkte H_j der drei Körper aus die geometrische Summe der zu den beiden anderen Körpern gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des gebrochenen Linienzuges*

der drei Längsachsen dem jten Körper am nächsten liegen, und dabei diese Hauptstrecken in einer von H_j abgewendeten Richtung verwendet.

Führt man die hierdurch gegebene Konstruktion des Gesamtschwerpunktes auf verschiedene Weise aus, wie es in Fig. 3 geschehen ist, so erkennt man auch leicht die Möglichkeit, sich auf automatischem Wege die Lage des Gesamtschwerpunktes für jede Stellung der drei Körper zu einander abzuleiten. Man braucht nur die in Figur 3 eingezeichneten sechs Hauptstrecken, welche von den Hauptpunkten aus zu S_0 hinführen, als starre Stäbe ausgeführt zu denken, die zum Teil in den Hauptpunkten, zum Teil in den Punkten $H_{1,2}$, $H_{2,3}$ und S_0

Fig. 3.



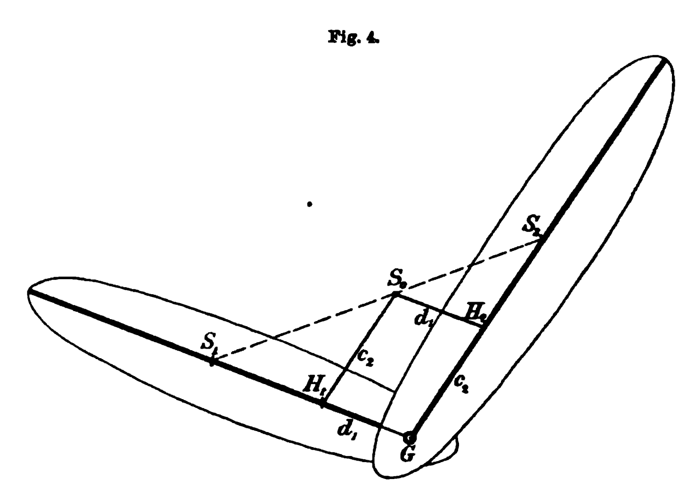
durch Charniergelenke mit den drei Körpern, bezüglich untereinander gelenkig verbunden sind, und der Mechanismus für die automatische Einstellung des Gesamtschwerpunktes ist fertig. Natürlich müssen dabei die Achsen der verschiedenen Charniergelenke zu den Achsen der beiden, die drei Körper untereinander verbindenden Gelenke parallel gerichtet sein.

Hätte man ein System von nur zwei Körpern, die durch ein Gelenk mit dem Mittelpunkt G verbunden sind, so würde sich die Konstruktion des Gesamtschwerpunktes mit Hülfe der Hauptpunkte noch einfacher stellen. Unter den Hauptpunkten der beiden Körper sind dabei wieder die Schwerpunkte der beiden reduzierten Systeme zu verstehen, welche man dadurch erhält, dafs man jedem der beiden Körper die im Gelenkmittelpunkt G konzentriert angenommene Masse des

anderen Körpers hinzugefügt denkt. Daraus geht aber hervor, daſs der Hauptpunkt H_1 die Strecke $S_1 G$ auf der Längsachse des ersten Körpers (vgl. Figur 4), und der Hauptpunkt H_2 die Strecke GS_2 auf der Längsachse des zweiten Körpers im gleichen Verhältnis, nämlich im Verhältnis der beiden Massen m_2 und m_1 teilt.

Da nun auch der Gesamtschwerpunkt S_0 des Systems der zwei Körper die Verbindungsstrecke $S_1 S_2$ der beiden Einzelschwerpunkte in demselben Verhältnis teilt, so ist aus Figur 4 ohne weiteres zu erkennen, daſs die vier Punkte S_0, H_1, G und H_2 die Ecken eines Parallelogramms darstellen. Bezeichnet man wieder die Hauptstrecke $H_1 G$ mit d_1 und

Fig. 4.



die Hauptstrecke GH_2 mit c_2 und rechnet dieselben in der Richtung, in welcher sie von S_1 über G nach S_2 durchlaufen werden, positiv, so ist demnach

(6) $$[H_1 S_0] = + \bar{c}_2 \quad \text{und} \quad [H_2 S_0] = - \bar{d}_1.$$

Es gilt also für das zweigliedrige System der

Satz: *Man gelangt zu dem Gesamtschwerpunkt S_0 des Systems zweier Körper, wenn man von einem der beiden Hauptpunkte aus die zum anderen Körper gehörende Hauptstrecke in der von ihm abgewendeten Richtung abträgt.*

Mit Hülfe dieses Satzes über das System zweier Körper kann man sich nun leicht Rechenschaft über die Bedeutung der beim dreigliedrigen System in Figur 3 mit $H_{1,2}$ und $H_{2,3}$ bezeichneten Kreuzungspunkte je dreier Hauptstrecken geben.

Denkt man sich nämlich beim dreigliedrigen System einmal die beiden ersten Körper gegen einander festgestellt, so hat man nur

ein Gelenksystem von zwei Körpern mit den Massen $(m_1 + m_2)$ und m_3 vor sich. Die Hauptpunkte H_1 und H_2 verlieren dann ihre Bedeutung, und an ihre Stelle tritt ein einziger Hauptpunkt des aus den beiden ersten Körpern zusammengesetzten starren Systems. Dieser Hauptpunkt ist nun gerade der in Figur 3 mit $H_{1,2}$ bezeichnete Punkt. Davon kann man sich leicht auf folgende Weise überzeugen.

Zunächst ist ersichtlich, dafs H_3 nach wie vor seine Bedeutung als Hauptpunkt eines der beiden Körper des nunmehr zweigliedrigen Systems beibehält; denn seine Lage hing ja auch beim dreigliedrigen System nur von der Gesamtmasse $m_1 + m_2$ der beiden anderen Körper, nicht aber von der gegenseitigen Stellung derselben ab. Da ferner $G_{2,3}$ der Mittelpunkt des einzigen Verbindungsgelenks darstellt, so stellt auch c_3 die eine der beiden Hauptstrecken dar. Der Hauptpunkt des aus den ersten beiden Körpern zusammengesetzten starren Systems mufs daher nach dem obigen Satze über das zweigliedrige System mit dem Endpunkt des vom Gesamtschwerpunkt S_0 aus in umgekehrter Richtung abgetragenen Vektors $\bar{c}_3$, d. h. also mit dem Punkte $H_{1,2}$ zusammenfallen. Gleichzeitig folgt hieraus, dafs die zum ersten der beiden Glieder gehörende Hauptstrecke mit der Verbindungsstrecke $H_{1,2}G_{2,3}$ identisch ist, und dafs deren Verlängerung durch den Gesamtschwerpunkt $S_{1,2}$ des ersten und zweiten Körpers hindurchgeht, wobei

$$S_{1,2}H_{1,2} : H_{1,2}G_{2,3} = m_3 : (m_1 + m_2).$$

In der That stellt sich auch heraus, dafs die Strecke $[H_3S_0]$ gleich der Strecke $[G_{2,3}H_{1,2}]$ ist, wie es nach dem obigen Satze der Fall sein mufs.

So lange die beiden ersten der drei Körper gegeneinander festgestellt sind, ist auch $H_{1,2}$ ein fester Punkt in diesem starren System. Wenn dagegen den beiden ersten Körpern wieder Beweglichkeit gegen einander verliehen wird, so ändert der Punkt $H_{1,2}$ bei der Bewegung im ersten Zwischengelenk $(G_{1,2})$ fortwährend seine Lage relativ zu den beiden Körpern, wie ja auch der gemeinsame Schwerpunkt $S_{1,2}$ dieser beiden Körper nicht festliegt. Auch in dem Falle freier Beweglichkeit soll für den Punkt $H_{1,2}$ die Bezeichnung als *„Hauptpunkt des Systems der beiden ersten Körper“* beibehalten werden.

Man erkennt nun ohne weiteres, dafs der in Figur 3 mit $H_{2,3}$ bezeichnete Punkt den in seiner Lage veränderlichen Hauptpunkt des aus dem zweiten und dritten Körper bestehenden Gelenksystems darstellt. Die zugehörige veränderliche Hauptstrecke ist $G_{1,2}H_{2,3}$; auf ihrer Verlängerung liegt der veränderliche Gesamtschwerpunkt $S_{2,3}$ des zweiten und dritten Körpers, und zwar so, dafs

$$G_{1,2}H_{2,3} : H_{2,3}S_{2,3} = (m_2 + m_3) : m_1.$$

Die beiden veränderlichen Systemhauptpunkte $H_{1,2}$ und $H_{2,3}$ lassen sich für jede Gelenkstellung leicht mit Hülfe der Hauptpunkte und Hauptstrecken der drei Körper bestimmen. Um zu $H_{1,2}$ zu gelangen, braucht man nur entweder von H_1 aus den Vektor $+\bar{c}_2$ oder von H_2 aus den Vektor $-\bar{d}_1$ zu ziehen. In entsprechender Weise stellt sich $H_{2,3}$ als Endpunkt des von H_2 aus gezogenen Vektors $+\bar{c}_3$, oder des von H_3 aus gezogenen Vektors $-\bar{d}_2$ dar. Man gewinnt also den veränderlichen Hauptpunkt eines Systems zweier durch ein Gelenk verbundenen Körper auf ganz entsprechende Weise wie den Gesamtschwerpunkt dieses zweigliedrigen Systems. Man hat dabei nur nicht aufser Acht zu lassen, dafs die dem System der drei Körper angehörenden Hauptpunkte H_1 und H_2 natürlich nicht mit den Hauptpunkten zusammenfallen, welche man für die beiden ersten Körper erhält, wenn man den dritten Körper ganz vom System abgelöst denkt. Die letzteren sind es aber, welche der Konstruktion des Gesamtschwerpunktes $S_{1,2}$ der beiden ersten Körper zu Grunde gelegt werden müssen. Ebenso wenig darf man bei der Konstruktion des Gesamtschwerpunktes $S_{2,3}$ des zweiten und dritten Körpers von den dem System der drei Körper angehörenden Hauptpunkten H_2 und H_3 ausgehen, sondern von den Hauptpunkten, die man nach Abtrennen des ersten Körpers erhält. Man hat eben immer im Auge zu behalten, dafs der Hauptpunkt eines Körpers nicht allein durch die Massenverteilung innerhalb desselben, sondern auch durch den Zusammenhang dieses Körpers mit allen anderen Körpern des Gelenksystems bestimmt wird. Scheidet ein Körper aus dem System aus, so verlieren die sämtlichen Hauptpunkte ihre Bedeutung und sind durch andere, den abgeänderten Verhältnissen entsprechende, zu ersetzen.

3. Bestimmung der Bewegung des Gesamtschwerpunktes mit Hülfe der Hauptpunkte und Hauptstrecken.

Der enge Zusammenhang zwischen dem Gesamtschwerpunkt und den Hauptpunkten ermöglicht nun eine sehr einfache Ableitung sowohl der Bahnkurve, als auch der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gesamtschwerpunktes. Die Bewegung des letzteren kann nach den Erörterungen des vorigen Abschnittes (vgl. Figur 3) z. B. aufgefafst werden als die Resultante, aus der Bewegung des Hauptpunktes H_1, der Bewegung des Systemhauptpunktes $H_{1,2}$ relativ zu H_1 und der Bewegung des Gesamtschwerpunktes S_0 relativ zu $H_{1,2}$. Natürlich könnte man auch von der Bewegung des zweiten oder dritten Hauptpunktes ausgehen und würde dann zu ganz entsprechenden Ergebnissen

gelangen. Die Bewegung von $H_{1,2}$ relativ zu H_1 findet auf einem Kreise mit dem Radius c_2, und die Bewegung von S_0 relativ zu $H_{1,2}$ auf einem Kreise mit dem Radius c_3 statt. Dabei besitzt $H_{1,2}$ relativ zu H_1 dieselbe Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung, mit der die Längsachse des zweiten Körpers im Raume ihre Richtung ändert. Desgleichen dreht sich S_0 und $H_{1,2}$ mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung, mit welcher die Längsachse des dritten Körpers im Raume ihre Richtung verändert. Dies ergiebt sich einfach aus dem Umstande, dafs während irgend einer Bewegung des Körpersystems stets $H_1 H_{1,2} \parallel G_{1,2} H_2$ und $H_{1,2} S_0 \parallel G_{2,3} H_3$ (vgl. Figur 3) bleiben mufs.

Macht man nun noch die bei Problemen der Technik vielfach verwirklichte Annahme, dafs ein Punkt O der Längsachse des ersten Körpers festbleibt, und also der erste Körper nur Drehungen um eine zu den übrigen beiden Gelenkachsen parallele Achse durch O auszuführen vermag, so ist auch der Hauptpunkt H_1 auf einen Kreis um O gezwungen.

Die auf der Längsachse des ersten Körpers liegende Strecke $[OH_1]$ sei kurz durch $\bar{c}_1$ bezeichnet und ebenfalls eine Hauptstrecke des ersten Körpers genannt. Dann hat man zunächst für den veränderlichen Vektor $\bar{c}_0$ zwischen O und dem Gesamtschwerpunkt S_0

(7) $$\bar{c}_0 = \sum_1^3{}^h \bar{c}_h.$$

Ferner ergeben sich ohne weiteres für die Geschwindigkeit $\bar{v}_0$ und die Beschleunigung $\bar{b}_0$ des Gesamtschwerpunktes die Formeln

(8) $$\bar{v}_0 = \sum_1^3{}^h \overline{c_h \varphi_h'}$$

und

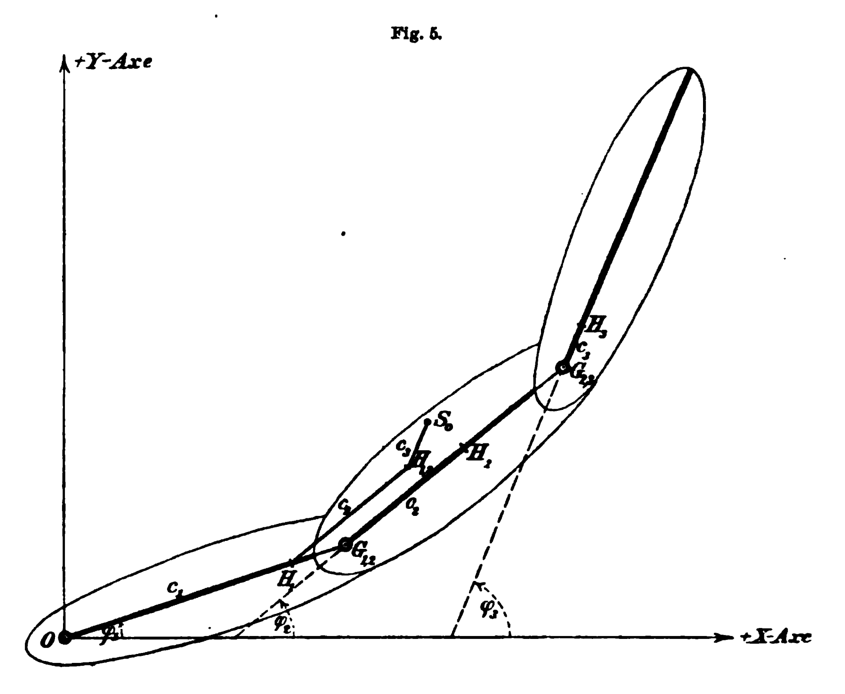
(9) $$\bar{b}_0 = \sum_1^3{}^h [\overline{c_h \varphi_h'^2} + \overline{c_h \varphi_h''}],$$

unter φ_h' und φ_h'' die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der Drehung des $h$ten Körpers verstanden. Dabei ist zu beachten, dafs jede lineare Geschwindigkeit $\overline{c_h \varphi_h'}$ ebenso wie jede Tangentialbeschleunigung $\overline{c_h \varphi_h''}$ senkrecht zu c_h, dagegen jede Normalbeschleunigung $\overline{c_h \varphi_h'^2}$ entgegengesetzt wie diese Hauptstrecke gerichtet ist.

Es möge nun O zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems (XY) innerhalb der im Raume festen Ebene der drei

Schwerpunkte gewählt werden (vgl. Fig. 5). Die positive X-Achse soll dabei die Richtung besitzen, von der aus die Winkel φ_h gemessen werden. Dann hat man für die Koordinaten x_0, y_0 des Gesamtschwer-

Fig. 5.



punktes S_0 und die in die Richtung der Achsen fallenden Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten x_0', y_0' und x_0'', y_0'' desselben die Werte

$$(7') \quad \begin{aligned} x_0 &= \sum_1^3{}_h\, c_h \cos \varphi_h \\ y_0 &= \sum_1^3{}_h\, c_h \sin \varphi_h \end{aligned}$$

$$(8') \quad \begin{aligned} x_0' &= -\sum_1^3{}_h\, c_h \sin \varphi_h \cdot \varphi_h' \\ y_0' &= \sum_1^3{}_h\, c_h \cos \varphi_h \cdot \varphi_h' \end{aligned}$$

$$(9') \quad \begin{aligned} x_0'' &= -\sum_1^3{}_h \left[c_h \cos \varphi_h \cdot \varphi_h'^2 + c_h \sin \varphi_h \cdot \varphi_h''\right] \\ y_0'' &= -\sum_1^3{}_h \left[c_h \sin \varphi_h \cdot \varphi_h'^2 - c_h \cos \varphi_h \cdot \varphi_h''\right]. \end{aligned}$$

Mit Hülfe des Ausdruckes (9) für die Beschleunigung von S_0 läſst sich nun in verhältnismäſsig einfacher Weise der resultierende Druck D zur Darstellung bringen, welcher ausschlieſslich infolge der Massenbewegung der drei Körper des Systems auf die Achse in O, bezüglich auf das Fundament, mit welchem das System in O drehbar verbunden ist, ausgeübt wird. Dieser *„totale Massendruck"*, wie man ihn in der Technik nennt, wird durch das Produkt aus der Gesamtmasse m_0 des Systems in die Beschleunigung b_0 des Gesamtschwerpunktes gemessen und besitzt eine dieser Beschleunigung entgegengesetzte Richtung. Man hat daher für denselben

$$(10) \qquad D = -m_0\overline{b_0} = -m_0\sum_1^3 {}^{k}\left[\overline{c_k\varphi_k'^2} + \overline{c_k\varphi_k''}\right]$$

und für seine Komponenten X, Y in der Richtung der Koordinatenachsen

$$(10') \qquad \begin{aligned} X &= m_0\sum_1^3 {}^{k}\left[c_k \cos\varphi_k \cdot \varphi_k'^2 + c_k \sin\varphi_k \cdot \varphi_k''\right] \\ Y &= m_0\sum_1^3 {}^{k}\left[c_k \sin\varphi_k \cdot \varphi_k'^2 - c_k \cos\varphi_k \cdot \varphi_k''\right]. \end{aligned}$$

Es ist bemerkenswert, daſs in diesen Ausdrücken die Einzelmassen m_k gar nicht auftreten, sondern nur die Gesamtmasse m_0. Der Einfluſs, welchen die Einzelmassen auf die Gröſse des Massendruckes ausüben, kommt ausschlieſslich in der Gröſse der Hauptstrecken c_k zur Geltung.

4. Der resultierende Massendruck am Schubkurbelgetriebe.

Die in der Technik verwendeten ebenen dreigliedrigen Gelenkmechanismen unterscheiden sich von dem bisher in Betracht gezogenen System von drei Körpern im wesentlichen nur dadurch, daſs ihre Bewegungsfreiheit auf einen Grad beschränkt ist. Die Stellung des Systems muſs daher schon durch eine einzige Koordinate eindeutig bestimmt werden können. Im übrigen lassen sich aber die bisher erhaltenen Resultate ohne weiteres auf jeden derartigen speziellen Mechanismus anwenden.

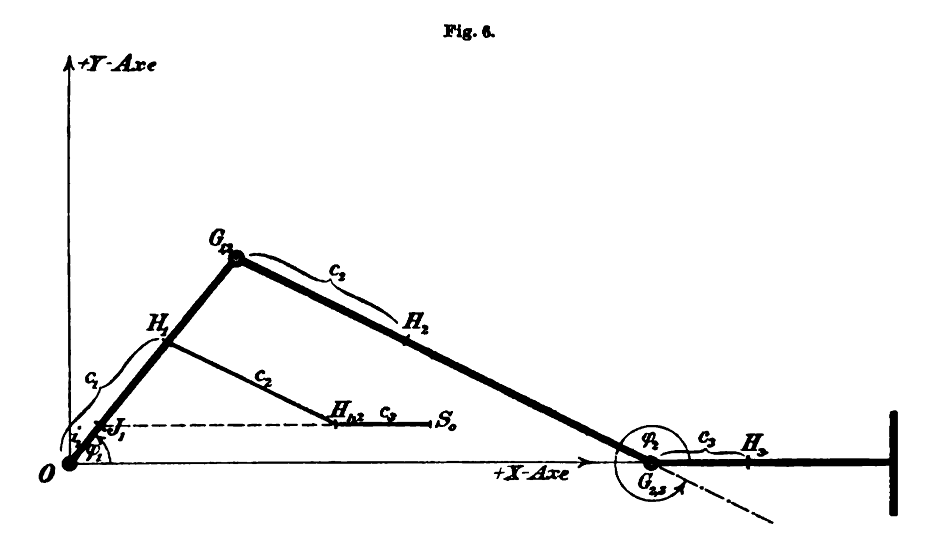
Als Beispiel möge das *Schubkurbelgetriebe* in Betracht gezogen werden, da über die Kinetik desselben sehr eingehende Arbeiten[1]) vorliegen, und man daher besser in der Lage ist, sich über die Bedeutung

1) Man vergl. insbesondere H. Lorenz, Dynamik der Kurbelgetriebe. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 44. Band, 1899 und 45. Band 1900.

der Hauptpunkte und Hauptstrecken für derartige Untersuchungen ein Urteil zu bilden.

Figur 6 stelle ein Schema dieses Schubkurbelgetriebes dar. Der erste der drei Körper des Gelenkmechanismus wird hier durch das aus Schwungrad, Welle, Kurbel und Kurbelzapfen bestehende starre System gebildet. Wenn nun auch die Berücksichtigung der Massen des Schwungrades und der Welle die Untersuchung in keiner Weise komplizieren würde, so sollen dieselben doch zunächst, wie bei H. Lorenz, aufser Betracht bleiben, da sie auf den resultierenden Massendruck keinen Einflufs ausüben. Es wird sich später zeigen, inwieweit die Formeln sich ändern, wenn man dem ersten Körper die Massen des

Fig. 6.



Schwungrades und der Welle hinzufügt. Vorläufig soll also unter m_1 nur die Masse der Kurbel mit dem Kurbelzapfen verstanden sein. Der zweite Körper des dreigliedrigen Gelenksystems wird durch die sogenannte Schubstange, und der dritte durch das aus Kreuzkopf, Kolbenstange und Kolben bestehende Gleitstück gebildet.

Der Drehpunkt O der Kurbel liege in der Verlängerung der Gleitbahn und die letztere stelle die X-Achse des Koordinatensystems dar. Dann nimmt in diesem speziellen Falle des Schubkurbelgetriebes der früher mit φ_3 bezeichnete Winkel den Wert Null an. Zwischen φ_1 und φ_2 (vgl. Fig. 6) besteht dagegen die Beziehung

$$\sin \varphi_1 : - \sin \varphi_2 = l_2 : l_1,$$

wo unter l_1 die zwischen den Gelenkpunkten O und $G_{1,2}$ gemessene

Länge der Kurbel und unter l_2, wie früher, der Abstand der beiden Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ verstanden werden soll. Nimmt man φ_1 als Koordinate für die Stellung des ganzen Mechanismus, so hat man also in den bisher aufgestellten Formeln zu setzen

$$(11) \qquad \sin\varphi_2 = -\frac{l_1}{l_2}\sin\varphi_1 \quad \text{und} \quad \cos\varphi \sqrt{1-\frac{l_1^2}{l_2^2}\sin^2\varphi_1},$$

wozu noch kommt

$$(11') \qquad \sin\varphi_3 = 0 \quad \text{und} \quad \cos\varphi_3 = 1.$$

Unter dem *Hauptpunkt* H_1 *der Kurbel* hat man im Falle der Nichtberücksichtigung der Massen von Schwungrad und Welle den Schwerpunkt des Massensystems zu verstehen, welches man dadurch erhält, dafs man die Massen m_2 der Schubstange und m_3 des Gleitstücks im Punkt $G_{1,2}$ der Kurbel hinzugefügt denkt. Die zwischen O und H_1 sich hinziehende Hauptstrecke der Kurbel sei, wie früher, mit $\bar{c}_1$ bezeichnet. Den *Hauptpunkt* H_2 *der Schubstange* erhält man als Schwerpunkt des aus der Schubstange durch Hinzufügen der Masse m_1 von Kurbel und Kurbelzapfen im Punkte $G_{1,2}$ und der Masse m_3 des Gleitstücks im Punkte $G_{2,3}$ entstehenden Massensystems. Die Hauptstrecke $[G_{1,2}H_2]$ sei wieder durch $\bar{c}_2$ bezeichnet. Endlich erhält man den *Hauptpunkt* H_3 *des Gleitstücks*, indem man in $G_{2,3}$ die Massen m_1 und m_2 dem Gleitstück hinzugefügt denkt und von diesem fingierten Massensystem den Schwerpunkt aufsucht. Die Hauptstrecke $[G_{2,3}H_3]$ des Gleitstücks sei $\bar{c}_3$.

Die geometrische Addition der drei Hauptstrecken $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ und $\bar{c}_3$ von O aus führt sofort zu dem Gesamtschwerpunkt S_0 des Schubkurbelgetriebes (mit Ausnahme von Schwungrad und Welle). Soweit sind die Verhältnisse wie beim allgemeinen Gelenksystem von drei Körpern. Geht man nun aber zu den Koordinaten x_0 und y_0 des Gesamtschwerpunktes über, so stellen sich doch wesentliche Vereinfachungen gegenüber dem allgemeinen Falle ein. Verlängert man nämlich die zur X-Achse parallele Verbindungsstrecke $S_0H_{1,2}$ über $H_{1,2}$ hinaus bis zum Schnittpunkt J_1 mit $OG_{1,2}$ (vgl. Fig. 6), so läfst sich leicht einsehen, dafs dieser Punkt J_1 infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke $J_1H_1H_{1,2}$ und $OG_{1,2}G_{2,3}$ eine feste Lage auf der Längsachse der Kurbel besitzt. Sein Abstand von H_1 ist $\frac{l_1}{l_2}c_2$, und daher der von O gleich $c_1 - \frac{l_1}{l_2}c_2$; der letztere möge kurz durch i_1 bezeichnet sein.

Der Punkt J_1 besitzt nun stets dieselbe Ordinate, und infolgedessen auch dieselben y-Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung

wie der Gesamtschwerpunkt S_0. Es ergiebt sich daher ohne weiteres für die letzteren

$$y_0 = i_1 \sin \varphi_1$$
$$y_0' = i_1 \cos \varphi_1 \cdot \varphi_1'$$
$$y_0'' = - i_1 \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 + i_1 \cos \varphi_1 \cdot \varphi_1''.$$

Infolgedessen erhält man für die Komponente des totalen Massendrucks in der Richtung der positiven Y-Achse den Wert:

(13) $$Y = m_0 i_1 [\sin \varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 - \cos \varphi_1 \cdot \varphi_1'']$$

wobei $i_1 = c_1 - \frac{l_1}{l_2} c_2$ ist, und φ_1' die Winkelgeschwindigkeit, dagegen φ_1'' die Winkelbeschleunigung darstellt, mit denen sich die Kurbel um O dreht.

In der Richtung der X-Achse gestalten sich die Verhältnisse zwar nicht ganz so einfach wie in der Y-Richtung, aber doch auch wesentlich einfacher als beim allgemeinen dreigliedrigen Gelenksystem. Da c_3 bei allen Bewegungen der X-Achse parallel bleibt, so mufs der Hauptpunkt $H_{1,2}$ der ersten beiden Körper in jeder Beziehung genau die gleiche Bewegung ausführen wie der Gesamtschwerpunkt S_0. Die Bahnkurve des letzteren ist nur um den Vektor $\bar{c}_3$ gegen die von $H_{1,2}$ verschoben. Dagegen sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigung für den ganzen Ablauf der Bewegung bei beiden Punkten gleich. Man kann daher der Bestimmung der X-Komponente des totalen Massendrucks den Punkt $H_{1,2}$ zu Grunde legen. Führt man im Interesse der Einfachheit der Darstellung zunächst noch den von φ_1 abhängigen Winkel φ_2, sowie auch die Winkelgeschwindigkeit φ_2' und die Winkelbeschleunigung φ_2'' in die Formeln ein, so erhält man für den Gesamtschwerpunkt S_0

(14)
$$x_0 = c_1 \cos \varphi_1 + c_2 \cos \varphi_2 + c_3$$
$$x_0' = - c_1 \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1' - c_2 \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2'$$
$$x_0'' = - c_1 \cos \varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 - c_2 \cos \varphi_2 \cdot \varphi_2'^2 - c_1 \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1'' - c_2 \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2''$$

und daraus für den totalen Massendruck in der Richtung der positiven X-Achse

$$X = m_0 c_1 (\cos \varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 + \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1'') + m_0 c_2 (\cos \varphi_2 \cdot \varphi_2'^2 + \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2'').$$

Hierbei sind nun noch der Winkel φ_2 und seine Ableitungen vermöge der Relation $l_2 \sin \varphi_2 = - l_1 \sin \varphi_1$ durch den Winkel φ_1, bezüglich dessen Ableitungen, auszudrücken.

Durch wiederholte Differentiation dieser Relation und geeignete Zusammenfassung erhält man schliefslich als Wert der X-Komponente des totalen Massendrucks beim Schubkurbelgetriebe:

$$(15)\quad \begin{aligned} X = m_0 \left\{ c_1 \cos\varphi_1 + c_2 \frac{l_1^2}{l_2^2}\left(1 - \frac{l_1^2}{l_2^2}\sin^2\varphi_1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos 2\varphi_1 + \frac{l_1^2}{l_2^2}\sin^4\varphi_1\right)\right\} \varphi_1'^2 \\ + m_0 \left\{ c_1 \sin\varphi_1 + c_2 \frac{l_1^2}{2 l_2^2}\left(1 - \frac{l_1^2}{l_2^2}\sin^2\varphi_1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \sin 2\varphi_1 \right\} \varphi_1''. \end{aligned}$$

Nach Angabe von H. Lorenz[1]) besitzt bei den in der Praxis vorkommenden Getrieben das Verhältnis $l_1 : l_2$ in der Regel einen so kleinen Wert, dafs die höheren Potenzen dieses Verhältnisses nur einen sehr geringen Einflufs auf die Gröfse des Massendrucks ausüben. Denkt man sich daher in dem Ausdruck für die X-Komponente des totalen Massendrucks die beiden Potenzen mit gebrochenen Exponenten nach dem Vorgange von H. Lorenz in Reihen entwickelt, die angedeuteten Multiplikationen ausgeführt, darauf nach Potenzen von $\frac{l_1}{l_2}$ geordnet, und schliefslich alle Glieder, welche eine höhere als die zweite Potenz dieses Verhältnisses enthalten, vernachlässigt, so erhält man die Annäherungsformel

$$(15') \quad X = m_0\left[c_1 \cos\varphi_1 + c_2 \frac{l_1^2}{l_2^2}\cos 2\varphi_1\right]\varphi_1'^2 + m_0\left[c_1 \sin\varphi_1 + c_2 \frac{l_1^2}{2 l_2^2}\sin 2\varphi_1\right]\varphi_1''.$$

Dieser steht zur Seite die absolut genaue Formel für die Y-Komponente des totalen Massendrucks

$$(13') \qquad Y = m_0\left(c_1 - \frac{l_1}{l_2}\,c_2\right)(\sin\varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 - \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1'').$$

Diese beiden Formeln stimmen natürlich mit den von H. Lorenz auf weniger einfachem Wege gewonnenen Formeln (23) und (24) auf Seite 9 der zitierten Arbeit genau überein. Man kann sich leicht unter Berücksichtigung der Bedeutung der Hauptpunkte davon überzeugen, dafs die in der letzteren auftretenden Ausdrücke

$$\frac{1}{g}[Ks'' + (G + P)\,r], \quad \frac{1}{g}[G(l - s') + Pl] \quad \text{und} \quad \frac{1}{g}[Ks'' + G\frac{r}{l}\,s']$$

bezüglich mit den Gröfsen $m_0 c_1$, $m_0 c_2$ und $m_0 i_1$ identisch sind.

Mit Hülfe der Hauptpunkte kann man nun auch in einfacher und vor allen Dingen sehr anschaulicher Weise, ohne alle Rechnung, die Bedingungen für den Ausgleich der Massendrücke darstellen.

---

1) a. a. O. Seite 5.

Der totale Massendruck verschwindet im vorliegenden Falle nur dann, wenn der Gesamtschwerpunkt S_0 bei allen Bewegungen des Systems seinen Ort im Raume beibehält. Dazu ist keineswegs unbedingt erforderlich, dafs S_0 bei allen Stellungen des Systems mit dem festen Drehpunkte O zusammenfällt. Es wird nach den obigen Darlegungen S_0 auch dann im Raume fest bleiben, wenn der Hauptpunkt $H_{1,2}$ des Systems von Kurbel und Schubstange (vgl. Fig. 6) nach O fällt und während des Ablaufs der Bewegung diesen Ort unverändert beibehält. *Hierfür ist aber die notwendige und hinreichende Bedingung die, dafs der Hauptpunkt H_1 der Kurbel mit dem Drehpunkt O, und der Hauptpunkt H_2 der Schubstange mit dem Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ zusammenfällt*, d. h. also mit anderen Worten, dafs die beiden Hauptstrecken c_1 und c_2 die Länge Null besitzen. Die Erfüllung dieser Bedingung ist theoretisch wohl möglich, sie erfordert nach dem Zusammenhang der Hauptpunkte mit den Massen, Dimensionen und der Lage der Schwerpunkte der einzelnen Glieder nur, dafs

$$m_1 r_1 + (m_2 + m_3) l_1 = 0$$

und

$$m_2 r_2 + m_3 l_2 = 0$$

ist, unter r_1 den Abstand des Schwerpunktes der Kurbel (incl. Kurbelzapfen) von O und unter r_2 den Abstand des Schwerpunktes der Schubstange von $G_{1,2}$ verstanden.

Die erste Bedingung wird erfüllt, wenn der Schwerpunkt S_1 der Kurbel nicht auf dem Kurbelradius $OG_{1,2}$ selbst, sondern auf dessen Rückwärtsverlängerung über O hinaus, und zwar in der Entfernung $\frac{m_2 + m_3}{m_1} l_1$ liegt. Die zweite Bedingungsgleichung verlangt dagegen, dafs der Schwerpunkt S_2 der Schubstange nicht zwischen $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$, sondern auf der Rückwärtsverlängerung der Längsachse der Schubstange über $G_{1,2}$ hinaus, und zwar in der Entfernung $\frac{m_3}{m_2} l_2$ liegt. Um diese Forderung zu realisieren, müfste sich also sowohl die Kurbel weit über O hinaus als auch die Schubstange weit über $G_{1,2}$ hinaus fortsetzen. Es müfste auch der gröfsere Teil der Masse der Kurbel einerseits und der Schubstange andrerseits auf diesen, der Funktion der beiden Glieder des Mechanismus nicht zugute kommenden, Fortsätzen verteilt sein. Sollen dabei die für die Energieübertragung in erster Linie in Frage kommenden Teile $OG_{1,2}$ und $G_{1,2}G_{2,3}$ von Kurbel und Schubstange nicht an Festigkeit einbüfsen, so folgt aus einer derartigen Massenverteilung, dafs sowohl das Gewicht $m_1 g$ der Kurbel incl. Fortsatz als auch das Gewicht $m_2 g$ der Schubstange incl. Fortsatz verhältnismäfsig grofs sein müssen.

Es mag dahingestellt beiben, ob eine derartige Umgestaltung der Kurbel und der Schubstange in der Praxis ausführbar ist, und nicht etwa beträchtliche Nachteile anderer Art für die Maschine im Gefolge hat. So viel geht aber aus den bisherigen Erörterungen hervor, *dafs rein theoretisch betrachtet ein vollkommener Ausgleich des totalen Massendrucks schon bei einem einzigen Schubkurbelbetriebe sehr wohl möglich ist.* Allerdings läfst sich die vollständige Ausgleichung nicht dadurch erzielen, dafs man nur der Kurbel gegenüber auf der Welle eine Masse anbringt, und dadurch gewissermafsen die Kurbel über die Welle hinaus fortsetzt, sondern man mufs auch gleichzeitig die Schubstange über den Kurbelzapfen hinaus bedeutend verlängern und durch beträchtliche Massen beschweren. Eine so starke einseitige Belastung der Schubstange würde aber wohl aufsergewöhnlich hohe Anforderungen an die Festigkeit derselben stellen, da es sich ja hier im Wesentlichen um hin- und hergehende Bewegungen der einzelnen Massenteilchen, und nicht blofs um fortlaufende Rotation handelt.

Wäre es praktisch durchführbar, auf die beschriebene Weise den totalen Massendruck zum Verschwinden zu bringen, so würde der Gesamtschwerpunkt S_0 bei der Bewegung einen festen Ort auf der Verlängerung der Gleitbahn zwischen O und $G_{2,3}$ einnehmen. Seine Entfernung von O wäre dann gerade c_3.

Schliefslich ist es theoretisch möglich, wenn auch für die Praxis kaum von grofsem Wert, den Gesamtschwerpunkt S_0 nach der Wellenachse O selbst zu verlegen. Dazu wäre nur nötig, dafs der Schwerpunkt S_3 des Gleitstücks im Mittelpunkt $G_{2,3}$ des Kreuzkopfzapfens liegt, eine Forderung, welche durch Verlängerung der Kolbenstange über den Kreuzkopfzapfen hinaus und Anbringung neuer Massen auf dieser Verlängerung verwirklicht werden könnte. Dann würde auch der Hauptpunkt H_3 des Gleitstücks nach $G_{2,3}$ fallen, und die Hauptstrecke c_3, d. h. also die Entfernung des Gesamtschwerpunktes S_0 von O, wäre in der That auf Null gebracht.

In gleich anschaulicher Weise wie für den vollkommenen Ausgleich kann man auch Bedingungen der nur teilweise stattfindenden Ausgleichung der Massendrücke aufstellen. Soll z. B. nur die Komponente des totalen Massendrucks in der Richtung der Y-Achse verschwinden, so ist die hierfür notwendige und hinreichende Bedingung, dafs der Punkt J_1 auf dem Kurbelradius (vgl. Fig. 6) mit dem Drehpunkt O zusammenfällt. Dies ist der Fall, wenn

$$i_1 = c_1 - \frac{l_1}{l_2} c_2 = 0$$

wird. Damit befindet sich aber die Forderung von H. Lorenz (a. a. O.

Seite 10), der Kurbel gegenüber auf der Welle eine Masse vom Moment $G\frac{r}{l}s' + K''s''$ anzubringen, in genauem Einklang. Die Erfüllung dieser Bedingung bewirkt nun im allgemeinen nicht auch gleichzeitig das Verschwinden der X-Komponente des totalen Massendrucks. Die für letztere auf Seite 445 angegebene Näherungsformel (15') erhält aber jetzt die einfachere Form

$$(15'') \quad X = m_0 c_1 \left\{ \left(\cos\varphi_1 + \frac{l_1}{l_2}\cos 2\varphi_1\right)\varphi_1'^2 + \left(\sin\varphi_1 + \frac{l_1}{2l_2}\sin 2\varphi_1\right)\varphi_1'' \right\}.$$

Bei allen bisherigen Erörterungen über das Schubkurbelgetriebe waren die Massen der Welle und des Schwungrades aufser Betracht gelassen worden. Die Untersuchung gestaltet sich nun in keiner Weise dadurch komplizierter, dafs man diese mit der Kurbel starr verbundenen Massen hinzunimmt. Es möge dabei nur die Voraussetzung gemacht werden, dafs der in die Wellenachse fallende gemeinsame Schwerpunkt von Welle und Schwungrad in der Ebene der Schwerpunkte der übrigen Teile des Mechanismus, d. h. also direkt im Punkte O angenommen werden darf. Diese Voraussetzung liefse sich beispielsweise durch zwei symmetrisch zu O verteilte Schwungräder und gekröpfte Achse streng verwirklichen.

Das Hinzufügen der neuen Massen bewirkt zunächst eine Änderung in der Lage der Hauptpunkte aller drei Glieder des Mechanismus; denn dieselben hängen ja nicht nur von der Verteilung der Masse innerhalb des Gliedes ab, dem sie angehören, sondern sie werden auch durch die Verteilung der Gesamtmasse des ganzen Systems auf die drei Glieder beeinflufst; die letztere ist aber sofort geändert, wenn nur einem der drei Glieder neue Masse hinzugefügt wird. Es ist auch leicht einzusehen, dafs jetzt alle Hauptpunkte innerhalb des gebrochenen Linienzuges der drei Längsachsen der Glieder dem Drehpunkt O näher rücken; denn für alle drei reduzierten Systeme tritt in dem O am nächsten liegenden Gelenkmittelpunkt des zu Grunde liegenden Gliedes die Masse der Welle mit dem Schwungrad hinzu. Man braucht nun nicht erst wieder auf die Einzelschwerpunkte der drei Glieder zurückzugreifen, um die Lage der neuen Hauptpunkte zu bestimmen. Man kann vielmehr gleich von den alten Hauptpunkten H_1, H_2, H_3 ausgehen. Bezeichnet man die neuen Hauptpunkte mit H_1', H_2', H_3' (vgl. Fig. 7), und die Masse der Welle mit dem Schwungrad durch m_s, so stellt sich H_1' dar als Schwerpunkt der in O und H_1 konzentriert gedachten Massen m_s und m_0. Desgleichen bildet H_2' den Schwerpunkt der in $G_{1,2}$ und H_2 konzentriert angenommenen Massen m_s und m_1, und endlich H_3' den Schwerpunkt der in $G_{2,3}$ und H_3 konzentriert

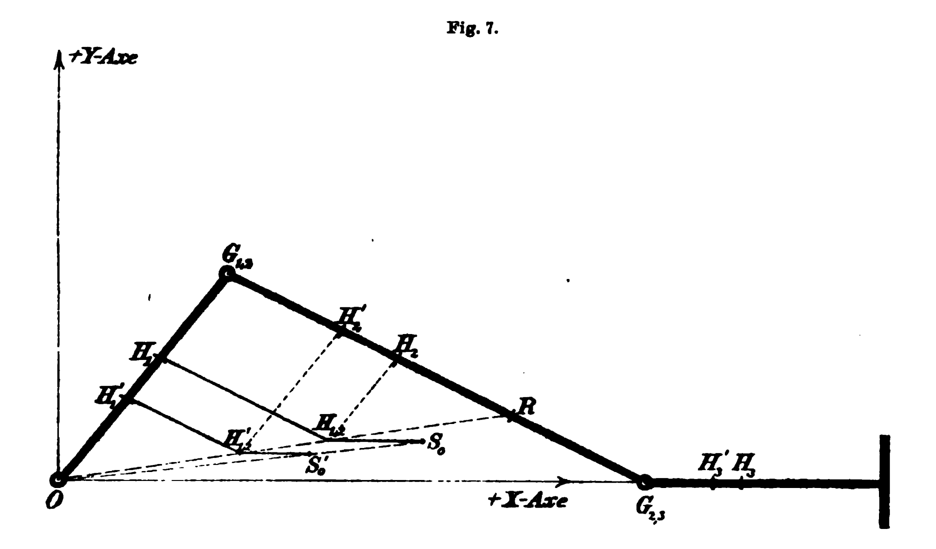
gedachten Massen m_s und m_0. Die drei neuen Hauptpunkte sind daher auch wieder auf den Längsachsen der drei Glieder des Mechanismus zu suchen.

Bedeuten c_1', c_2', c_3' die neuen Hauptstrecken OH_1', $G_{1,2}H_2'$ und $G_{2,3}H_3'$ und m_0' die Summe der Massen m_0 und m_s, d. h. also die Gesamtmasse des Systems der drei Körper nach Hinzufügen der Massen der Welle und des Schwungrades, so hat man demnach die Relationen

$$(16) \qquad m_0'c_1' = m_0c_1; \quad m_0'c_2' = m_0c_2 \text{ und } m_0'c_3' = m_0c_3.$$

Beachtet man nun, dafs man unter Zugrundelegung der neuen Hauptstrecken und der neuen Gesamtmasse natürlich zu Formeln für die

Fig. 7.



Komponenten des totalen Massendrucks gelangt, welche sich von den Formeln (13), (15), (13'), (15') und (15'') nur dadurch unterscheiden, dafs an Stelle der Gröfsen m_0, c_1, c_2, c_3 die neuen Gröfsen m_0', c_1', c_2', c_3' getreten sind, so erhält man in Rücksicht auf (16) das Resultat, dafs der totale Massendruck durch das Hinzutreten der Massen der Welle und des Schwungrades in seiner Gröfse nicht geändert wird. Daher war es erlaubt, zum Zwecke der Ableitung des Massendrucks zunächst ganz von der Welle und dem Schwungrad abzusehen.

Während der totale Massendruck von diesen beiden Teilen des Gelenkmechanismus unabhängig ist, wird natürlich die Lage des Gesamtschwerpunktes des Systems sehr wesentlich durch dieselben beeinflufst. Der neue Gesamtschwerpunkt S_0' wird mit Hülfe der neuen Hauptpunkte auf dieselbe Art gefunden, wie S_0 unter Zugrundelegung der

alten Hauptpunkte (vgl. Fig. 7). Gleichzeitig wird man bei der Konstruktion desselben auf den neuen Hauptpunkt $H'_{1,2}$ des Systems der ersten beiden Glieder geführt. Da nach (16)

$$OH'_1 : OH_1 = G_{1,2}H'_2 : G_{1,2}H_2 = G_{2,3}H'_3 : G_{2,3}H_3 = m_0 : m'_0,$$

so erkennt man aus Figur 7, dafs $H'_{1,2}$ auf $OH_{1,2}$ und S'_0 auf OS_0 liegen mufs, und zwar so, dafs auch

$$OH'_{1,2} : OH_{1,2} = OS'_0 : OS_0 = m_0 : m'_0.$$

Zu diesem Resultat gelangt man noch auf einfachere Weise, wenn man beachtet, dafs infolge der Bedeutung von $H_{1,2}$ und $H'_{1,2}$ der letztere Punkt den Schwerpunkt der in O und $H_{1,2}$ konzentriert gedachten Massen m_s und m_0, und ferner auch S'_0 den Schwerpunkt der in O und S_0 konzentrierten Massen m_s und m_0 bilden mufs. Man erkennt hieraus auch, dafs die Punkte $H'_{1,2}$ und S'_0 bei der Bewegung des Systems Bahnen beschreiben, welche den Bahnen der Punkte $H_{1,2}$ und S_0 ähnlich, und zwar im Verhältnis $m_0 : m'_0$ verkleinert, sind.

Endlich soll noch auf eine Thatsache hingewiesen werden, welche unter Umständen eine praktische Bedeutung gewinnen kann. Denkt man sich nämlich die Verbindungslinie $OH'_{1,2}H_{1,2}$ über $H_{1,2}$ hinaus verlängert bis zum Schnittpunkt R mit der Längsachse $G_{1,2}G_{2,3}$ der Schubstange (vgl. Fig. 7), so läfst sich leicht einsehen, dafs die Lage dieses Punktes von der jeweiligen Gelenkstellung des Mechanismus ganz unabhängig ist, und dafs sein Abstand von O in einem ganz bestimmten Verhältnis zu $OH'_{1,2}$ bezüglich $OH_{1,2}$ steht. Man hat nämlich einfach

$$(17) \qquad OR = \frac{l_1}{c'_1} \cdot OH'_{1,2} = \frac{l_1}{c_1} \cdot OH_{1,2}.$$

Da nun die Bewegung von $H'_{1,2}$ genau mit der von S'_0 und die Bewegung von $H_{1,2}$ genau mit der von S_0 übereinstimmt, so folgt hieraus, dafs die Bewegung des Punktes R sowohl ähnlich der Bewegung des Gesamtschwerpunktes S'_0 des ganzen Systems incl. Welle und Schwungrad, als auch ähnlich der Bewegung des Gesamtschwerpunktes S_0 des Systems ohne Welle und Schwungrad ist. *Man kann also an der Bewegung des auf der Längsachse der Schubstange festen Punktes R, für den ich bei einer anderen Gelegenheit den Namen „Richtpunkt“ eingeführt habe, direkt die Bewegung des Gesamtschwerpunktes des Systems, und zwar sogar in vergröfsertem Mafsstabe, erkennen.* Die Bahnkurve von R erscheint nämlich im Verhältnis $l_1 : c'_1$ gröfser als die von S'_0, und im Verhältnis $l_1 : c_1$ gröfser als die von S_0.

Die praktische Bedeutung, welche dieses Ergebnis gewinnen kann, scheint mir darin zu liegen, dafs man dadurch in den Stand gesetzt

wird, die Bewegung des Gesamtschwerpunktes bei irgend einem Schubkurbelgetriebe auf graphischem oder auch auf photographischem Wege zu registrieren. Man könnte z. B. an der Stelle R der Schubstange in sehr kurzen aber genau abgemessenen Zeitintervallen kleine elektrische Funken erzeugen, oder ein kleines Geifslersches Röhrchen intermittierend aufleuchten lassen, und würde dann beim Photographieren im verdunkelten Raume mit offenstehender Camera die Bewegung von R auf der lichtempfindlichen Platte in einer grofsen Anzahl von Bewegungsphasen aufgezeichnet finden. Diese Methode, welche wir seiner Zeit für die photographische Registrierung des menschlichen Ganges[1]) verwendet haben, giebt sehr genaue Resultate. Sie liefert nicht nur die Bahnkurve des Punktes, sondern sie ermöglicht sogar eine ziemlich genaue Bestimmung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen desselben für den ganzen Ablauf der Bewegung. Vorbedingung hierfür ist nur ein äufserst genaues Regulieren der Unterbrechungen am Induktionsapparat. Dies läfst sich aber durch Anwendung eines Stimmgabelunterbrechers erreichen. Hat man auf diese Weise die zu jedem Moment gehörende Beschleunigung des Gesamtschwerpunktes abgeleitet, so hat man damit auch ein Mafs für den totalen Massendruck im ganzen Verlaufe der Bewegung gewonnen.

5. Die lebendige Kraft des Systems.

Wenn das in den Abschnitten 1. bis 3. betrachtete allgemeine System von drei Körpern in beliebiger Bewegung begriffen ist, so kann die lebendige Kraft desselben als Summe zweier Bestandteile aufgefafst werden. Der eine Teil ist gleich der lebendigen Kraft der im Gesamtschwerpunkt S_0 vereinigt gedachten Gesamtmasse; bezeichnet v_0 die Geschwindigkeit von S_0, so hat dieser Beitrag zur lebendigen Kraft die Gröfse $\frac{1}{2} m_0 v_0^2$. Der andere Teil stellt sich als Summe der lebendigen Kräfte dar, welche den auf den Gesamtschwerpunkt bezogenen relativen Bewegungen der einzelnen Körper des Systems entsprechen.

Wie die Geschwindigkeit v_0 des Gesamtschwerpunktes, und damit der eine Bestandteil der gesamten lebendigen Kraft, auf verhältnismäfsig einfache Weise mit Hülfe der Hauptpunkte gewonnen werden kann, so stellt sich nun auch heraus, dafs die Hauptpunkte sehr wesentliche Dienste bei der Bestimmung des zweiten Bestandteiles der lebendigen Kraft leisten.

---

1) Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. XVII Nr. II und Bd. XXI Nr. IV.

Die Bewegung, welche jeder der drei Körper des Systems relativ zum Gesamtschwerpunkt S_0 besitzt, kann man zerlegt denken in eine Translation von der Geschwindigkeit v_k seines Einzelschwerpunktes S_k relativ zu S_0 und eine Rotation um eine zu den Gelenkachsen parallele Achse durch S_k von der Winkelgeschwindigkeit φ_k'. Die lebendige Kraft jedes einzelnen Körpers relativ zum Gesamtschwerpunkt stellt sich infolgedessen ebenfalls als Summe zweier Bestandteile dar. Der eine Bestandteil ist die lebendige Kraft, welche die Masse m_k des Körpers besitzt, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit v_k bewegt, die der Einzelschwerpunkt S_k relativ zum Gesamtschwerpunkt S_0 besitzt, der andere Bestandteil ist die lebendige Kraft, welche aus der Winkelgeschwindigkeit φ_k' des Körpers um die Achse durch S_k resultiert.

Nimmt man vorläufig an, dafs der Gesamtschwerpunkt fest bleibt, so ist eine beliebige unendlich kleine Verrückung des Systems dadurch eindeutig charakterisiert, dafs die drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 bestimmte unendlich kleine Änderungen $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$ erfahren. Eine solche Verrückung kann man sich in drei Schritte zerlegt denken. Bei dem einen soll nur der Winkel φ_1 der Änderung $d\varphi_1$ unterworfen werden, während die beiden anderen Winkel φ_2 und φ_3 konstant bleiben, beim zweiten und dritten Schritte soll die Verrückung nur in einer Änderung von φ_2 bezüglich φ_3 um die Gröfse $d\varphi_2$ bezüglich $d\varphi_3$ bestehen, während jedesmal die beiden anderen Winkel ihren Wert beibehalten. Es kommt also jeder der drei Schritte darauf hinaus, einem der drei Körper eine unendlich kleine Rotation zu erteilen, während die beiden anderen, welche infolge des Zusammenhangs der Körper dabei nicht in Ruhe bleiben können, gleichzeitig nur Translationen ausführen dürfen. Die Translation jedes der anderen beiden Körper ist gegeben durch die Translation desjenigen Gelenkpunktes, welcher die unmittelbare oder mittelbare Verbindung des betreffenden Körpers mit dem in Rotation begriffenen darstellt.

Soll nun bei der unendlich kleinen Rotation $d\varphi_k$ eines der drei Körper, verbunden mit Translationen der beiden anderen Körper, der Gesamtschwerpunkt S_0 des Systems seinen Ort im Raume beibehalten, so *mufs diese Rotation um die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den Hauptpunkt des betreffenden Körpers stattfinden*. Dies lehrt ein Blick auf Figur 3 (Seite 435). Dreht man beispielsweise das ganze System um eine zu den Gelenkachsen parallele Achse durch H_1 in der Weise, dafs dabei der zweite und dritte Körper nur Translationen ausführen, so behalten die Längsachsen der letzteren beiden Körper bei der Bewegung ihre Richtung im Raume bei, und der gebrochene Linienzug $H_1 H_{1,2} S_0$ nimmt infolgedessen an der Bewegung nicht teil.

Dreht man dagegen um die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch H_2 bezüglich H_3 und läfst dabei den ersten und dritten bezüglich ersten und zweiten Körper nur Translationen ausführen, so bleibt dabei der gebrochene Linienzug $H_2 H_{1,2} S_0$ bezüglich $H_3 H_{2,3} S_0$ fest liegen. Es behält also in allen drei Fällen der Gesamtschwerpunkt S_0 seine Lage im Raume bei. Es ist dabei auch ganz gleichgültig, ob die Rotation um einen unendlich kleinen oder um einen beliebigen endlichen Winkel stattfindet.

Man hat daher den

Satz: *Jede Verrückung des Systems der drei Körper relativ zum Gesamtschwerpunkt S_0 aus der Lage φ_1, φ_2, φ_3 in die unendlich benachbarte $\varphi_1 + d\varphi_1$, $\varphi_2 + d\varphi_2$, $\varphi_3 + d\varphi_3$ kann zerlegt werden in drei unendlich kleine Rotationen um Achsen durch die drei Hauptpunkte verbunden mit Translationen der beiden anderen Körper, welchen der betreffende Hauptpunkt nicht angehört.*

Infolge dieser drei Verrückungen des Systems, welche bezüglich einer alleinigen Änderung eines der drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 entsprechen, erleidet jeder der Einzelschwerpunkte drei unendlich kleine Verschiebungen, deren geometrische Summe die Gesamtverschiebung des betreffenden Einzelschwerpunktes relativ zum Gesamtschwerpunkt S_0 darstellt. Beachtet man, dafs die Abstände von den Hauptpunkten positiv oder negativ zu rechnen sind, je nachdem sie in positiver oder negativer Richtung auf den Längsachsen verlaufen, so ergiebt sich demnach bei der in Figur 2 (Seite 432) angenommenen Lage der Hauptpunkte gegenüber den Einzelschwerpunkten für die

$$\begin{array}{llll} & \text{Verschiebung von } S_1 \text{ relativ zu } S_0: & -\overline{e_1 \cdot d\varphi_1} - \overline{c_2 \cdot d\varphi_2} - \overline{c_3 \cdot d\varphi_3} \\ (18) & \quad\text{"} \qquad \text{"} \quad S_2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad S_0: & +\overline{d_1 \cdot d\varphi_1} - \overline{e_2 \cdot d\varphi_2} - \overline{c_3 \cdot d\varphi_3} \\ & \quad\text{"} \qquad \text{"} \quad S_3 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad S_0: & +\overline{d_1 \cdot d\varphi_1} + \overline{d_2 \cdot d\varphi_2} + \overline{e_3 \cdot d\varphi_3}, \end{array}$$

wobei wieder die Striche über den Buchstaben die geometrische Addition andeuten sollen. Dabei sind alle von der unendlich kleinen Rotation $d\varphi_1$ herrührenden Verschiebungskomponenten senkrecht zur Längsachse des ersten Körpers, die mit $d\varphi_2$ bezüglich $d\varphi_3$ zusammenhängenden Verschiebungskomponenten senkrecht zur Längsachse des zweiten bezüglich dritten Körpers gerichtet. Die drei Komponenten der Verschiebung eines Einzelschwerpunktes besitzen daher dieselben Richtungsunterschiede wie die drei Längsachsen. Es bilden also die erste und zweite den Winkel $\varphi_1 - \varphi_2$, die erste und dritte den Winkel $\varphi_1 - \varphi_3$ und die zweite und dritte den Winkel $\varphi_2 - \varphi_3$ mit einander.

Indem man durch Division der in einem bestimmten Moment stattfindenden unendlich kleinen Verschiebungen der Einzelschwerpunkte relativ zum Gesamtschwerpunkt mit dem Zeitdifferential dt zu den Geschwindigkeiten v_h der Punkte S_h relativ zu S_0 übergeht, kann man leicht den Beitrag angeben, welchen jeder Schwerpunkt infolge seiner Geschwindigkeit v_h zu dem Ausdruck für die lebendige Kraft des Systems relativ zum Gesamtschwerpunkt liefert. Derselbe besitzt die Gröſse $\frac{1}{2}m_h v_h^2$. Auſserdem hat man nur noch den Einfluſs zu berücksichtigen, den die Rotation eines jeden der drei Körper um seinen Schwerpunkt S_h auf die Gröſse der lebendigen Kraft ausübt. Bezeichnet man allgemein mit $\varkappa_h$ den Trägheitsradius des $h$ten Körpers in Bezug auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch seinen Schwerpunkt S_h, so ist der von der Winkelgeschwindigkeit φ_h' des $h$ten Körpers herrührende Beitrag zur lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2}m_h\varkappa_h^2 \cdot \varphi_h'^2.$$

Bezeichnet man die lebendige Kraft des ganzen Systems relativ zum Gesamtschwerpunkt mit T_r, so hat man demnach

$$T_r = \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}^h m_h[v_h^2 + \varkappa_h^2 \cdot \varphi_h'^2].$$

Berechnet man auf Grund von (18) die Werte von v_h^2, so ergiebt sich nach einiger Umformung unter Berücksichtigung der Relationen (1) und (4) für die lebendige Kraft des ganzen Systems relativ zum Gesamtschwerpunkt S_0 der verhältnismäſsig einfache Wert

$$(19)\qquad \begin{aligned} T_r = {} & \tfrac{1}{2}m_0k_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_0k_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + \tfrac{1}{2}m_0k_3^2 \cdot \varphi_3'^2 \\ & + m_0 d_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \varphi_1'\varphi_2' + m_0 d_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \cdot \varphi_1'\varphi_3' \\ & + m_0 d_1 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)\varphi_2'\varphi_3'. \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, daſs auch hierbei die einzelnen Massen m_h gar nicht explizit auftreten. Dies ist wieder der Einführung der reduzierten Systeme und Hauptpunkte zu verdanken. Denn die Gröſsen der Trägheitsradien k_h und der Hauptstrecken c_h und d_h hängen ja hauptsächlich von der Masse und Massenverteilung der einzelnen Körper ab, und der Einfluſs, den die einzelnen Massen auf den Wert der lebendigen Kraft ausüben, macht sich allein in der Länge dieser Strecken geltend.

Bisher war nur die lebendige Kraft relativ zum Gesamtschwerpunkt S_0 in Betracht gezogen worden. Bleibt nun der letztere nicht fest, sondern bewegt er sich mit der Geschwindigkeit v_0 im Raume fort, so kommt bekanntlich zu der relativen lebendigen Kraft noch die

lebendige Kraft $\frac{1}{2} m_0 v_0^2$ der Bewegung des Gesamtschwerpunktes hinzu. Bezeichnet man die totale lebendige Kraft mit T, so hat man demnach

$$T = T_r + \tfrac{1}{2} m_0 v_0^2.$$

Für den schon im dritten Abschnitt in Betracht gezogenen speziellen Fall, dafs bei der ebenen Bewegung des Systems ein Punkt O der Längsachse des ersten Körpers (Figur 5) festbleibt, läfst sich nach (8) v_0 leicht durch die drei Winkelgeschwindigkeiten ausdrücken. Berücksichtigt man, dafs die drei in Formel (8) auf der rechten Seite auftretenden Geschwindigkeitskomponenten wieder senkrecht zu den drei Längsachsen gerichtet sind, so erhält man

$$(20) \quad \begin{aligned} v_0^2 &= c_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + c_2^2 \varphi_2'^2 + c_3^2 \varphi_3'^2 + 2 c_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \varphi_1' \varphi_2' \\ &\quad + 2 c_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \varphi_1' \varphi_3' + 2 c_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \varphi_2' \varphi_3'. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert und den aus (19) sich ergebenden Wert von T_r in den Ausdruck für T ein, so läfst sich der letztere wieder durch geeignete Zusammenfassung auf sechs Glieder reduzieren. Das ist natürlich immer der Fall, denn die lebendige Kraft ist ja eine homogene Funktion zweiten Grades der drei Winkelgeschwindigkeiten. Die jetzt auftretenden Klammerausdrücke haben nun auch wieder sehr bemerkenswerte Bedeutung. Der erste ist, wie man leicht sieht, $(m_0 k_1^2 + m_0 c_1^2)$. Derselbe drückt nichts anderes als das Trägheitsmoment des ersten reduzierten Systems in Bezug auf die durch O gehende zu den Gelenkachsen parallele Achse aus; denn H_1 ist ja der Schwerpunkt des ersten reduzierten Systems und c_1 der Abstand des Punktes O von H_1 (Figur 5). Bezeichnet man den auf die Achse durch O bezogenen Trägheitsradius mit λ_1, so läfst sich also der Klammerausdruck durch $m_0 \lambda_1^2$ ersetzen. Die beiden nächsten Klammerausdrücke sind

$$(m_0 k_2^2 + m_0 c_2^2) \text{ und } (m_0 k_3^2 + m_0 c_3^2).$$

Dieselben sind die Trägheitsmomente des zweiten und dritten reduzierten Systems in Bezug auf die Gelenkachsen $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$. Man kann für dieselben daher auch $m_0 \lambda_2^2$ und $m_0 \lambda_3^2$ schreiben, unter λ_2, λ_3 die zugehörigen Trägheitsradien verstanden. Beachtet man noch, dafs $c_1 + d_1$ durch l_1 und $c_2 + d_2$ durch l_2 ersetzt werden können, so hat man für die totale lebendige Kraft in dem speziellen Falle bedingter Beweglichkeit von drei Graden der Freiheit

$$(21) \quad \begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_3^2 \cdot \varphi_3'^2 \\ &\quad + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \varphi_1' \varphi_2' + m_0 l_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \varphi_1' \varphi_3' \\ &\quad + m_0 l_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \varphi_2' \varphi_3'. \end{aligned}$$

Bei einem System von nur zwei durch ein Charniergelenk mit einander verbundenen Körpern nimmt die lebendige Kraft relativ zum Gesamtschwerpunkt, wie man leicht erkennt, die einfachere Form an

$$(19') \quad T_r = \tfrac{1}{2} m_0 k_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 k_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + m_0 d_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_1'\varphi_2'.$$

Ist insbesondere ein Punkt O der ersten Längsachse fest, so hat man für die totale lebendige Kraft

$$(21') \quad T = \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_1'\varphi_2'.$$

Die vorstehende Gleichung (21′) liefert z. B. sofort den Ausdruck für die lebendige Kraft eines Doppelpendels, d. h. eines durch ein Zwischengelenk mit zur Aufhängungsachse paralleler Achse gegliederten Pendels. Sie erfordert nur die Bestimmung der Trägheitsradien λ_1 und λ_2 der beiden reduzierten Systeme und der Hauptstrecke c_2 des zweiten Körpers. Die Formel behält auch dann ihre Richtigkeit, wenn der Schwerpunkt des ersten Körpers nicht auf der Längsachse desselben, sondern auf deren Verlängerung über das Zwischengelenk hinaus liegt, wie es z. B. in dem System Glocke mit Klöppel der Fall ist. Endlich giebt auch die Formel (21′) direkt die *lebendige Kraft für das Schubkurbelgetriebe* an, trotzdem es sich hier um ein dreigliedriges System handelt. Denn in dem speziellen Fall des Schubkurbelgetriebes ist ja die Winkelgeschwindigkeit φ_3' des Gleitstücks konstant gleich Null. Infolgedessen geht aber die hier eigentlich anzuwendende Formel (21) in die einfachere Formel (21′) über. Man darf dabei nur nicht aufser Acht lassen, dafs die reduzierten Systeme, deren Trägheitsradien λ_1 und λ_2 hier allein in Frage kommen, sich auf das dreigliedrige System mit der Gesamtmasse m_0 und nicht etwa auf das nach Lostrennen des Gleitstücks übrig bleibende zweigliedrige System beziehen. Das Gleiche gilt für die Hauptstrecke c_2. Der Einflufs, welchen die Bewegung des Gleitstücks auf die lebendige Kraft T ausübt, kommt dann eben in den Werten für λ_1, λ_2 und c_2 und dem Umstand, dafs in m_0 auch die Masse des Gleitstücks enthalten ist, zur Geltung.

Natürlich mufs sich beim Schubkurbelgetriebe die lebendige Kraft auch allein als Funktion von $\varphi_1'^2$, d. h. des Quadrates der Kolbengeschwindigkeit darstellen lassen. Dies läfst sich leicht auf Grund der schon früher verwendeten Relationen (11) zwischen den beiden Winkeln φ_1 und φ_2 erreichen. Man erhält dann zunächst den genauen Wert

$$(22) \quad T = \tfrac{1}{2} m_0 \left[\lambda_1^2 + \frac{l_1^2}{l_2^2} \cdot \frac{\cos^2\varphi_1}{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2}\sin^2\varphi_1} \lambda_2^2 - 2\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\cos^2\varphi_1}{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2}\sin^2\varphi_1} l_1 c_2 + 2\frac{l_1^2}{l_2^2} \cdot \frac{\sin^2\varphi_1 \cos\varphi_1}{\sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2}\sin^2\varphi_1}} l_1 c_2 \right] \varphi_1'^2$$

Denkt man sich in diesem etwas unbequemen Ausdruck die Potenzen

$$\left(1-\frac{l_1^2}{l_2^2}\sin^2\varphi_1\right)^{-1} \quad \text{und} \quad \left(1-\frac{l_1^2}{l_2^2}\sin^2\varphi_1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

in Reihen entwickelt, darauf nach Potenzen von $\frac{l_1}{l_2}$ geordnet, und schliefslich in Rücksicht auf den kleinen Wert des Verhältnisses $l_1:l_2$ wieder alle höheren als die zweite Potenz von $\frac{l_1}{l_2}$ vernachlässigt, so erhält man den Näherungswert:

$$(22') \qquad T = \frac{1}{2}m_0\left[\lambda_1^2 + \frac{l_1^2}{l_2^2}\cos^2\varphi_1\cdot\lambda_2^2 - 2\frac{l_1}{l_2}\left(\cos^2\varphi_1 - \frac{l_1}{2l_2}\sin\varphi_1\sin 2\varphi_1\right)l_1c_2\right]\varphi_1'^2.$$

A. Das allgemeine Gelenksystem.

Die an dem speziellen Beispiel eines dreigliedrigen Gelenkmechanismus abgeleiteten Resultate lassen sich nun leicht für jedes beliebige System von Körpern, welche in irgend einer Weise durch Drehgelenke von 1, 2 oder 3 Graden der Freiheit mit Mittelpunkt verbunden sind, verallgemeinern. Es ist dabei nicht einmal nötig, dafs die Glieder des Mechanismus in einer Reihe hintereinander geschaltet sind, sodafs sich jeder Körper mit höchstens zwei anderen in Gelenkverbindung befindet, sondern es dürfen an einem Körper beliebig viele andere eingelenkt sein. Ein solches allgemeineres Gelenksystem stellt z. B. der menschliche Körper dar, wo der Rumpf mit vier Extremitäten und mit dem Kopf durch Gelenke verbunden ist, wenn man von den innerhalb des Rumpfes selbst liegenden Gelenken zwischen Wirbeln und Rippen ganz absieht. Ferner liefern auch die mehrkurbeligen Maschinen ein hierher gehörendes Beispiel; denn das aus Welle, Schwungrad und Kurbel zusammengesetzte starre System (Kurbelsystem), welches hier nur ein Glied des ganzen Mechanismus repräsentiert, ist mit so viel Schubstangen gelenkig verbunden, als Kurbeln vorhanden sind.

Nur eine einzige Voraussetzung mufs im Interesse der Eindeutigkeit der Untersuchung für das System gemacht werden. Bilden nämlich mehrere Körper des Systems eine geschlossene Kette, so mufs man sich an einem Gelenk innerhalb dieser Kette die Verbindung gelöst denken, und die Sache so auffassen, als ob bei den Bewegungen des ganzen Systems die dieses Gelenk bildenden Enden der beiden in Frage kommenden Körper immer gerade identische Bewegungen ausführten, ohne mit einander in direktem Zusammenhange zu stehen. Durch diese Annahme wird erreicht, dafs man von irgend einem Glied

des Systems zu irgend einem anderen immer nur auf einem einzigen Wege im Innern des Systems gelangen kann, und daſs, wenn man die sämtlichen Gelenkverbindungen eines bestimmten Körpers gelöst denkt, die einzelnen Teile, in welche der Mechanismus dann zerfällt, und welche im allgemeinen immer noch kleinere Gelenksysteme darstellen, nicht mehr mit einander in Zusammenhang stehen. Diese Bedingung findet man z. B. im Bau des menschlichen Körpers ohne weitere Voraussetzung erfüllt; denn zertrennt man etwa die fünf Hauptgelenke des Rumpfes, so löst man dadurch den Kopf und die vier Extremitäten vom Rumpfe, und es zeigt sich dann, daſs diese abgetrennten fünf Körperteile auch nicht mehr mit einander im Zusammenhang stehen. Auch bei den mehrkurbligen Maschinen trifft, wie man leicht sieht, im allgemeinen, wenn man von kleineren mehr accessorischen Teilen absieht, diese Voraussetung zu. Natürlich darf man dabei nicht, wie es Reuleaux aus rein kinematischen Rücksichten thut, das Maschinenbett als Glied des Gelenkmechanismus auffassen.

Zu jedem Glied eines derartigen allgemeinen Gelenksystems kann man nun wieder in ganz entsprechender Weise wie beim dreigliedrigen System ein *reduziertes System* konstruieren. Man braucht sich zu diesem Zwecke nur im Mittelpunkt eines jeden Gelenks des betreffenden Gliedes die Masse des Teilsystems konzentriert zu denken, welches sich beim Trennen dieser Gelenkverbindung vom ganzen Mechanismus ablösen würde. So erhält man z. B. beim menschlichen Körper das „reduzierte Rumpfsystem“, wenn man im Mittelpunkt des Kopfgelenks die Masse des Kopfes, im Mittelpunkte eines jeden Schultergelenks die Masse eines ganzen Armes und im Mittelpunkt eines jeden Hüftgelenks die Masse eines ganzen Beins konzentriert denkt und dem Rumpfe hinzufügt. Oder man gelangt zu dem rechten „reduzierten Oberschenkelsystem“, wenn man im Mittelpunkt des rechten Kniegelenks die Massen des rechten Unterschenkels und rechten Fuſses, dagegen im Mittelpunkt des rechten Hüftgelenks die ganze Masse, welche dem menschlichen Körper nach Amputation des rechten Beins im Hüftgelenk noch bleiben würde, konzentriert annimmt und dem rechten Oberschenkel hinzufügt. Beim Mehrkurbelgetriebe erhält man das „reduzierte Kurbelsystem“, wie ich es kurz nennen will, indem man im Mittelpunkte eines jeden Kurbelzapfens die Massen der zugehörigen Schubstange und des zugehörigen Gleitstücks konzentriert denkt, und dem aus Welle, Schwungrad und Kurbeln bestehenden starren System hinzufügt.

Es ist ersichtlich, daſs auch die reduzierten Systeme des allgemeinen Gelenksystems stets als Masse die Gesamtmasse des ganzen beweglichen Systems besitzen.

Der Schwerpunkt eines jeden reduzierten Systems stellt nun wieder, wie man ohne Weiteres einsieht, einen festen Punkt des dem reduzierten System zu Grunde liegenden Gliedes des Mechanismus dar. Derselbe soll auch beim allgemeinen Gelenksystem den Namen *Hauptpunkt* des betreffenden Gliedes führen. Ferner mögen wieder alle Strecken, welche den Hauptpunkt eines Gliedes mit den Mittelpunkten der an dem Glied befindlichen Gelenke verbinden, als *Hauptstrecken* bezeichnet sein. Man hat demnach im allgemeinen Falle unter Umständen mehr als zwei Hauptstrecken in einem Glied. Der Rumpf besitzt z. B. fünf Hauptstrecken, das aus Welle, Schwungrad und Kurbeln bestehende Glied eines Mehrkurbelgetriebes so viele, als Kurbeln vorhanden sind.

Die reduzierten Systeme und Hauptpunkte spielen nun für die Kinetik der allgemeineren Gelenksysteme die entsprechende Rolle wie beim dreigliedrigen System. Den Beweis hierfür im einzelnen Falle zu erbringen, unterliegt nach den, vielleicht mehr als unbedingt nötig, ausführlichen Darlegungen der Verhältnisse beim dreigliedrigen System keinen prinzipiellen Schwierigkeiten. Es sollen daher im folgenden nur rein historisch die wesentlichsten Verallgemeinerungen der beim dreigliedrigen System erlangten Resultate kurz angeführt, und im übrigen auf meine Abhandlung: „Die Arbeit der Muskeln und die lebendige Kraft des menschlichen Körpers[1]" verwiesen werden; in letzterer sind die erforderlichen Beweise für das verhältnismäfsig komplizierte System des menschlichen Körpers erbracht. Ich kann mich bei der vorliegenden Schrift um so mehr mit einigen kurzen Andeutungen begnügen, als ich mit derselben vorläufig nur den Zweck verbinde, auf die Bedeutung aufmerksam zu machen, welche die Einführung der reduzierten Systeme und Hauptpunkte für zahlreiche Untersuchungen der technischen Mechanik, insbesondere die kinetische Untersuchung der Kurbelgetriebe hat.

Es ergiebt sich nun zunächst, dafs auch beim allgemeinen Gelenksystem die Hauptpunkte der einzelnen Glieder in sehr engem Zusammenhang mit dem Gesamtschwerpunkt S_0 des Systems stehen. Man kann die Beziehungen zwischen den ersteren und dem letzteren in den ganz allgemein giltigen Satz zusammenfassen:

Satz: *Man gelangt bei jedem Gelenksystem immer zu dem Gesamtschwerpunkte S_0, wenn man von dem Hauptpunkte H_j des beliebig zu wählenden j ten Gliedes aus die geometrische Summe der zu den übrigen Gliedern gehörenden Hauptstrecken bildet, auf welche man in jedem*

1) Abhandl. der math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellsch. d. W. Bd. XX, Nr. I.

Gliede zuerst stöfst, wenn man von H_j aus nach den verschiedenen Richtungen hin je einen über die Hauptpunkte der betreffenden Glieder hinweggehenden gebrochenen Linienzug jedesmal bis ans Ende führt.

Legt man beispielsweise beim Mehrkurbelgetriebe für die Konstruktion des Gesamtschwerpunktes den Hauptpunkt des Kurbelsystems zu Grunde, so hat man von diesem aus nur die der Welle innerhalb des ganzen Systems am nächsten liegenden Hauptstrecken der sämtlichen Schubstangen und Gleitstücke in irgend einer Reihenfolge geometrisch zu addieren, um den Gesamtschwerpunkt als Endpunkt dieses Streckenzuges zu erhalten. Es kommen also dabei irgend welche Hauptstrecken des Kurbelsystems, d. h. also des aus Welle, Schwungrad und Kurbeln bestehenden starren Systems, gar nicht zur Verwendung. Besteht nun das Mehrkurbelgetriebe aus lauter Schubkurbelgetrieben, welche sich in parallelen Ebenen bewegen, die alle zur Wellenachse senkrecht stehen, so erkennt man ohne weiteres, dafs der zum Gesamtschwerpunkt führende Zug der Hauptstrecken von Schubstangen und Gleitstücken auch vollständig in eine Ebene hineinfällt. Diese Ebene geht durch den Schwerpunkt des Kurbelsystems und steht ebenfalls auf der Wellenachse in einem Punkte O derselben senkrecht; sie soll der Kürze der Darstellung halber die *Hauptebene* des in Betracht gezogenen Mehrkurbelgetriebes genannt werden.

Numeriert man die n Schubkurbelgetriebe, welche den mehrkurbligen Mechanismus zusammensetzen, fortlaufend von 1 bis n, und giebt den Hauptstrecken c_2 und c_3 der Schubstange und des Gleitstücks eines jeden Schubkurbelgetriebes noch die Nummer des letzteren als zweiten Index hinzu, bezeichnet man ferner die in der Hauptebene liegende kürzeste Verbindungsstrecke OH_1 zwischen der Wellenachse und dem Hauptpunkt H_1 mit c_1, so hat man für die ebenfalls in der Hauptebene liegende kürzeste Verbindungsstrecke OS_0 zwischen der Wellenachse und dem Gesamtschwerpunkt S_0, welche mit c_0 bezeichnet sein soll, die geometrische Summe

$$\overline{c_0} = \overline{c_1} + \sum_1^n{}^h \overline{c_{2h}} + \sum_1^n{}^h \overline{c_{3h}}. \tag{23}$$

Dabei ist zu beachten, dafs die Hauptstrecken c_{2h} und c_{3h} des $h$ten Schubkurbelgetriebes nicht identisch mit den entsprechenden Hauptstrecken c'_{2h} und c'_{3h} des isoliert in Betracht gezogenen Schubkurbelgetriebes sind; sie besitzen kleinere, aber proportionale Längen und gleiche Richtung wie diese. Das Verkleinerungsverhältnis ist für die beiden Hauptstrecken eines Getriebes dasselbe, und zwar gleich

$m_{0h} : m_0$; dabei bedeutet m_{0h} die Masse des $h$ten Schubkurbelgetriebes (ohne die Massen von Welle und Schwungrad) und m_0 die Gesamtmasse des ganzen Mehrkurbelgetriebes, die Massen der Welle und des Schwungrades, bezüglich der Schwungräder, mit einbegriffen.

Die Hauptstrecke c_1 des aus Welle, Schwungrad und den n Kurbeln bestehenden starren Systems hängt in sehr einfacher Weise mit den Hauptstrecken c'_{1h} der Kurbeln sämtlicher isoliert in Betracht gezogenen Schubkurbelgetriebe (mit Hinweglassung der Welle und des Schwungrades) zusammen. Denkt man sich eine jede dieser Hauptstrecken ebenfalls im Verhältnis $m_{0h} : m_0$ verkleinert, so stellt c_1, wie man nach den früheren Auseinandersetzungen beim dreigliedrigen System leicht einsehen wird, einfach die vom Punkte O der Wellenachse aus genommene geometrische Summe dieser n im Verhältnis $m_{0h} : m_0$ verkleinerten Hauptstrecken c'_{1h} dar. Denkt man sich einmal die sämtlichen Kurbeln nicht fest, sondern drehbar mit der Welle verbunden, so hätte man dieselben als selbständige Glieder des ganzen Mechanismus mit besonderen Hauptpunkten H_{1h} aufzufassen. Die Hauptstrecken c_{1h}, welche den auf der Wellenachse und in der Ebene des betreffenden Schubkurbelgetriebes liegenden Drehpunkt O_h einer jeden Kurbel mit ihrem Hauptpunkt H_{1h} verbinden, wären dann aber gerade die im Verhältnis $m_{0h} : m_0$ verkleinerten Hauptstrecken c'_{1h} der isolierten Schubkurbelgetriebe. Man erhält daher c_1 auch als geometrische Summe dieser fingierten n Hauptstrecken c_{1h}.

Mit Hülfe des obigen Satzes über die Gewinnung des Gesamtschwerpunktes kann man in ganz entsprechender Weise wie beim dreigliedrigen System die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gesamtschwerpunktes, bezüglich deren Projektionen auf die drei Achsen eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems, ableiten.

Beim Mehrkurbelgetriebe vereinfacht sich insbesondere diese Untersuchung einerseits dadurch, dafs die Bewegungen aller Punkte parallel einer zur Wellenachse senkrechten Ebene, z. B. der Hauptebene, stattfinden, und andererseits durch den Umstand, dafs die Hauptstrecken c_{3h} sämtlicher Gleitstücke auch bei diesem allgemeineren Getriebe keinen Einflufs auf die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gesamtschwerpunktes ausüben. Dies gilt auch dann, wenn die einzelnen Gleitbahnen ganz verschiedene Richtungen besitzen. Denn denkt man sich die Konstruktion des Gesamtschwerpunktes mit Hilfe der Hauptstrecken in der durch Formel (23) angedeuteten Reihenfolge ausgeführt, so ist der aus den letzten n Hauptstrecken $\overline{c_{3h}}$ gebildete Vektor konstant. Denkt man sich daher rückwärts vom Gesamtschwerpunkte S_0 aus den ent-

gegengesetzt gleichen Vektor $-\sum_1^n{}^h\overline{c_{3h}}$ abgetragen, so gelangt man zu einem Punkte, welcher in Bezug auf Geschwindigkeiten und Beschleunigungen genau die gleiche Bewegung ausführt, wie der Gesamtschwerpunkt S_0 selbst. Man kann daher jenen an Stelle von diesem zur Untersuchung des Bewegungszustandes verwenden. Ferner erkennt man auch leicht, dafs jener Punkt den veränderlichen Hauptpunkt des aus dem Kurbelsystem und den sämtlichen Schubstangen bestehenden Teiles des ganzen Gelenkmechanismus darstellt. Er entspricht also dem Punkte $H_{1,2}$ (Figg. 3, 5 und 6) beim dreigliedrigen System.

Man hat demnach für die Geschwindigkeit v_0 des Gesamtschwerpunktes S_0 beim Mehrkurbelgetriebe die aus $n+1$ Gliedern bestehende geometrische Summe:

$$v_0 = \overline{c_1\,\varphi_1'} + \sum_1^n{}^h\overline{c_{2h}\,\varphi_{2h}'}. \tag{24}$$

Dabei bedeutet φ_1' die Drehungsgeschwindigkeit der Welle und allgemein φ_{2h}' die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Längsachse der $h$ten Schubstange ihre Richtung im Raume ändert. Die linearen Geschwindigkeiten $c_1\varphi_1'$ und $c_2\varphi_{2h}'$ sind natürlich stets senkrecht zu den Hauptstrecken c_1 und c_{2h} gerichtet. Da das ganze System nur einen Grad von Bewegungsfreiheit besitzt, so müssen sich die sämtlichen Winkelgeschwindigkeiten φ_{2h}' durch die Drehungsgeschwindigkeit φ_1' der Welle ausdrücken lassen. Dies kann man nach dem Früheren auch leicht erreichen; man darf nur nicht aufser Acht lassen, dafs die Längsachsen der Kurbeln und die verschiedenen Gleitbahnen zwar alle parallel der Hauptebene verlaufen sollen, im übrigen aber im allgemeinen ihre Richtung ganz beliebig sein darf. Bezeichnet man die Winkel, welche die Längsachsen der Kurbeln mit einer bestimmten zur Hauptebene parallelen Richtung bilden, mit φ_{1h} und die entsprechenden Winkel für die Schubstangen mit φ_{2h}, so werden die Beziehungen zwischen denselben und zwischen ihren, die Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen messenden ersten und zweiten Differentialquotienten auch die Winkel enthalten, welche die Richtungen der Gleitbahnen bestimmen. Ferner werden die φ_{1h} sich untereinander nur durch konstante Winkel unterscheiden, so dafs man leicht alle φ_{1h} und dadurch alle φ_{2h} und ihre Differentialquotienten durch den Richtungswinkel φ_1 einer bestimmten Kurbel ausdrücken kann. Insbesondere erkennt man, dafs die Winkelgeschwindigkeiten φ_{1h}' der einzelnen Kurbeln alle gleich der Winkelgeschwindigkeit φ_1' sind. Es lassen sich daher die in Frage stehenden Relationen nach dem Früheren leicht aufstellen.

Endlich erhält man in Verallgemeinerung der für das dreigliedrige System angestellten Betrachtungen als Beschleunigung $\overline{b_0}$ des Gesamtschwerpunktes S_0 beim Mehrkurbelgetriebe die aus $2n+2$ Gliedern bestehende geometrische Summe

$$(25) \qquad \overline{b_0} = \overline{c_1 \varphi_1'^2} + \overline{c_1 \varphi_1''} + \sum_1^n{}^{\lambda} [\overline{c_{2\lambda} \varphi_{2\lambda}'^2} + \overline{c_{2\lambda} \varphi_{2\lambda}''}]$$

und hieraus für den totalen, in Wirklichkeit auf verschiedene Stellen der Wellenachse verteilten Massendruck des Mehrkurbelgetriebes

$$(26) \qquad D = -m_0 [\overline{c_1 \varphi_1'^2} + \overline{c_1 \varphi_1''}] - m_0 \sum_1^n{}^{\lambda} [\overline{c_{2\lambda} \varphi_{2\lambda}'^2} + \overline{c_{2\lambda} \varphi_{2\lambda}''}].$$

Man ist weiterhin auch imstande, ohne alle Rechnung die Bedingungen anzugeben, unter denen der totale Massendruck die Gröfse Null erhält. Dazu ist offenbar hinreichend und notwendig, dafs einerseits der Hauptpunkt des aus Welle, Schwungrad und Kurbeln bestehenden starren Systems in die Wellenachse, und andererseits die Hauptpunkte sämtlicher Schubstangen in die Achsen der entsprechenden Kurbelzapfen hineinfallen.

Damit der Hauptpunkt des ersteren Systems in die Wellenachse fällt, ist nun keineswegs erforderlich, dafs auch die weiter oben mit $H_{1\varkappa}$ bezeichneten Hauptpunkte der einzelnen Kurbeln für den Fall, dafs die letzteren mit der Welle nicht fest, sondern gelenkig verbunden wären, in die Wellenachse hineinfallen. Oder mit anderen Worten: Für das Verschwinden des totalen Massendrucks ist nicht erforderlich, dafs die Massendrücke der einzelnen Schubkurbelgetriebe für sich zu Null werden. Es läfst sich daher die erste Bedingung, dafs H_1 in die Achse fällt, leicht durch geeignete Stellung der Kurbeln erreichen. Man hat dieselben nur so gegen einander zu richten, dafs die oben mit $c_{1\lambda}$ bezeichneten Strecken die Vektorsumme Null ergeben, also ein geschlossenes Polygon zusammensetzen. Bei drei Schubkurbelgetrieben läfst sich dies immer erreichen, falls die Summe der absoluten Längen je zweier $c_{1\lambda}$ nicht kleiner als die Länge der dritten Strecke ist. Bei vier und mehr Schubkurbelgetrieben kann man dagegen im allgemeinen auf sehr verschiedene Arten den Hauptpunkt H_1 nach der Wellenachse bringen.

Die zweite Bedingung, dafs der Hauptpunkt einer jeden Schubstange in den Mittelpunkt des Kurbelzapfens fällt, liefse sich auf die schon früher beim dreigliedrigen System angegebene Weise im Prinzip auch erreichen. Ob dies praktisch ausführbar ist, soll vollständig dahingestellt bleiben, *jedenfalls ist auch beim Mehrkurbelgetriebe eine Ausgleichung der Gröfsen der einzelnen Massendrücke theoretisch möglich.*

Hat man die Gröfse des totalen Massendrucks zum Verschwinden gebracht, so werden nun im allgemeinen damit noch nicht die Drehungsmomente für Achsen, welche der Hauptebene parallel laufen, vermieden sein. Es werden sich dann in der Regel die von den verschiedenen Schubkurbelgetrieben hervorgerufenen Massendrücke zu einem einzigen Kräftepaar zusammensetzen, dessen Achse aber auf der Wellenachse senkrecht steht. Zur Bestimmung des Momentes dieses Kräftepaares mufs man sich daher zunächst für jedes Schubkurbelgetriebe mit Hülfe der beiden Hauptstrecken c_{1k} und c_{2k} in der früher beschriebenen Weise den Massendruck aufsuchen. Dann läfst sich unter Berücksichtigung der Abstände der einzelnen Getriebeebenen leicht das Moment des resultierenden Kräftepaares berechnen. Dadurch wird man aber in den Stand gesetzt, die Bedingungen anzugeben, unter denen auch noch dieses Kräftepaar zum Verschwinden gebracht werden kann, und somit ein vollständiger Ausgleich aller Massenwirkungen erreicht ist.

Handelt es sich um eine für die Praxis genügend genaue Annäherung an den vollkommenen Ausgleich der Massendrücke, für welche die Bedingungen von H. Lorenz in der zitierten Arbeit aufgestellt worden sind, so gestatten die Hauptpunkte in vielen Fällen eine geometrische Interpretation. So sagen beispielsweise die oberen beiden Bedingungsgleichungen (I) und (II) von H. Lorenz (Seite 16), welche die Gröfsen a nicht enthalten, in ihrer Vereinigung nichts anderes aus, als dafs das Polygon sämtlicher Hauptstrecken c_{1k} geschlossen sein, d. h. also, dafs der Hauptpunkt H_1 auf die Wellenachse fallen mufs u. s. w.

Die Ableitung des Ausdruckes für die lebendige Kraft kann mit Hülfe der Hauptpunkte und Hauptstrecken auch beim allgemeinen Gelenksystem im Prinzip auf ganz dieselbe Weise wie beim dreigliedrigen System geschehen. Es gestalten sich nur die Verhältnisse dadurch verwickelter, dafs die Glieder des Systems unter Umständen durch Gelenke von zwei oder drei Graden der Freiheit verbunden sein können, und infolgedessen die Bewegungsfreiheit des ganzen Systems eine viel gröfsere ist, als wenn zwei benachbarte Körper immer nur durch ein Charniergelenk mit einander verbunden wären. Hat man n Glieder, und besitzen alle Verbindungsgelenke drei Grade der Freiheit, so hat das ganze System selbst $3n + 3$ Grade der Freiheit. Man braucht dann ebensoviel allgemeine Koordinaten zur eindeutigen Bestimmung der Stellung des Systems im Raume, nämlich drei räumliche Koordinaten für einen Punkt, etwa den Gesamtschwerpunkt des Systems, und je 3 Winkel φ_j, ϑ_j, ϱ_j zur Bestimmung der Orientierung im Raume für einen jeden der n Körper, welche das System zusammensetzen.

Man kann dann bei festgehaltenem Gesamtschwerpunkt das ganze

System aus einer Stellung in eine unendlich benachbarte dadurch überführen, dafs man demselben successive unendlich kleine Verrückungen erteilt, bei welchen jeweilig nur die drei Winkel φ_j, ϑ_j, ϱ_j des $j$ten Gliedes geändert werden, während die zu den übrigen Gliedern gehörenden Winkel konstant bleiben. *Es gilt nun der folgende*

Satz: Für eine solche Verrückung mufs das j^{te} Glied bei gleichzeitiger Translation aller übrigen eine unendlich kleine, durch $d\varphi_j$, $d\vartheta_j$, $d\varrho_j$ charakterisierte Rotation um eine Achse durch seinen Hauptpunkt H_j erfahren, wenn der Gesamtschwerpunkt des Systems während der Verrückung an seiner Stelle bleiben soll.

Dieser Satz ist die direkte Verallgemeinerung des Satzes vom Dreikörpersystem für eine gröfsere Anzahl durch Gelenke verbundener Körper, gröfsere Freiheit von Gelenken und beliebige Richtung der Rotationsachse. Er ermöglicht es, die Verschiebung des Schwerpunktes eines jeden Gliedes relativ zum Gesamtschwerpunkt für jede beliebige Verrückung des ganzen Systems festzustellen. Zieht man dann noch die Rotation eines jeden Gliedes um eine Achse durch seinen Schwerpunkt in Betracht, so hat man alle Mittel, um die lebendige Kraft T_r des ganzen Systems relativ zum Gesamtschwerpunkt ableiten zu können. Man erhält auf diese Weise wieder den Ausdruck für T_r in der knappsten Form. Trotzdem enthält er natürlich sehr viel Glieder, denn T_r mufs sich ja als eine homogene Funktion zweiten Grades der Winkelgeschwindigkeiten φ'_j, ϑ'_j, ϱ'_j darstellen. Aufser den Quadraten und Produkten dieser Winkelgeschwindigkeiten und den Winkeln φ_j, ϑ_j, ϱ_j selbst treten in dem fertigen Ausdruck nur noch die Trägheitsradien der sämtlichen reduzierten Systeme in Bezug auf Achsen durch die Hauptpunkte, ferner Hauptstrecken der einzelnen Glieder und die Gesamtmasse m_0 des Systems auf. Die Massen m_j der einzelnen Glieder und Strecken, welche sich auf die Lage des Schwerpunktes innerhalb eines einzelnen Gliedes beziehen, kommen in dem auf die beschriebene Weise gewonnenen Ausdruck für T_r nicht vor; denn sie sind nur insoweit bestimmend für die Gröfse von T_r, als sie einen Einflufs auf die Trägheitsradien der reduzierten Systeme und die Schwerpuukte der letzteren, d. h. aber die Hauptpunkte der Glieder besitzen.

Für die gesamte lebendige Kraft T des Systems kommt zu T_r noch die lebendige Kraft $\frac{1}{2}m_0v_0^2$, welche aus der Bewegung des Gesamtschwerpunktes resultiert, hinzu.

Bleibt ein Punkt irgend eines Gliedes bei der Bewegung des Systems fest, so hat dasselbe im allgemeinsten Falle nur noch $3n$ Grade der Freiheit, und es genügen die $3n$ Winkel φ_j, ϑ_j, ϱ_j zur eindeutigen Charakterisierung der Stellung des ganzen Systems. Dies kommt bei

der Ableitung der lebendigen Kraft dadurch zum Ausdruck, dafs die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Gesamtschwerpunktes sich als Funktionen der Winkel φ_j, ϑ_j, ϱ_j unter Verwendung der Hauptstrecken darstellen, und also durch dieselben ersetzen lassen. In dem fertigen Ausdruck für die totale lebendige Kraft T findet man jetzt nicht mehr die Trägheitsradien der reduzierten Systeme auf Achsen durch die Hauptpunkte, sondern auf Gelenkachsen bezogen, wie sich das schon beim dreigliedrigen Systeme [Formel (21)] herausgestellt hatte.

Beim Mehrkurbelgetriebe gestaltet sich das Problem der Ableitung der lebendigen Kraft infolge des Umstandes, dafs alle Glieder durch Gelenke von 1 Grad der Freiheit mit parallelen Achsen verbunden sind, viel einfacher. Es fallen die Winkel ϑ_j und ϱ_j vollständig bei der Untersuchung fort, und man hat nur Verrückungen in Betracht zu ziehen, welche einer unendlich kleinen Veränderung eines Winkels φ_j entsprechen. Trotzdem besitzt der Ausdruck für die lebendige Kraft auch in diesem Falle eine ziemlich ausgedehnte Form. Es mag derselbe daher hier nicht hergeschrieben, sondern auf meine schon oben angeführte Abhandlung: „Über die Arbeit der Muskeln und die lebendige Kraft des menschlichen Körpers“ verwiesen werden. Daselbst findet sich für ein ganz ähnliches System, nämlich den menschlichen Körper, für den Fall, dafs derselbe nur ebene, zur Medianebene des Körpers parallele Bewegungen ausführt, der Ausdruck für die lebendige Kraft in extenso aufgeführt (Seite 71 und 75).

Schliefslich sei noch erwähnt, dafs man aus dem Werte der lebendigen Kraft nun ohne weiteres die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der zweiten Form ableiten kann. Die letzteren finden sich in jener Abhandlung ebenfalls angegeben (Seite 54, 80—83), so dafs auch in dieser Hinsicht auf dieselbe verwiesen werden kann. Es zeigt sich auch bei den Bewegungsgleichungen recht deutlich, wie viel die Formeln bei Anwendung der Trägheitsradien der reduzierten Systeme und der Hauptstrecken an Ausdehnung verlieren, dafür aber an Klarheit und Anschaulichkeit gewinnen. Dies tritt um so mehr hervor, je gröfser die Anzahl der Glieder ist, welche den Mechanismus zusammensetzen.

Diese kurzen Andeutungen über den Nutzen der reduzierten Systeme und ihrer Schwerpunkte für die Kinetik der Gelenkmechanismen allgemeinster Art mögen genügen. Es kam mir dabei weniger darauf an, ausgedehnte Formeln mitzuteilen, als vielmehr die Methode zu ihrer Ableitung anzugeben, und dadurch vielleicht auch das Interesse der Techniker für die reduzierten Systeme zu erwecken.

Über ein Konstruktionsprinzip und seine Verwertung bei der Schattenbestimmung an Drehflächen.

Von O. Unger in Breslau.

Monge, der geniale Begründer der „géométrie descriptive" weist seiner Wissenschaft einen zweifachen Zweck zu: Erstens soll sie die Methoden liefern, um auf einem Zeichenblatte alle Raumgebilde abzubilden, vorausgesetzt, daſs diese Gebilde streng definiert werden können, und zweitens soll sie das Verfahren lehren, um aus einer genauen Zeichnung die Gestalt der Raumgebilde erkennen und alle Sätze, welche aus der Gestalt und der gegenseitigen Lage der Raumgebilde folgen, ableiten zu können.[1])

Prüft man an der Hand dieses Programms den Weg, den die Entwicklung der darstellenden Geometrie in den hundert Jahren ihres Bestehens genommen hat, so zeigt sich, daſs besonders jener Teil, welcher die zweite der Mongeschen Forderungen in sich begreift, in ganz hervorragender Weise weiter entwickelt worden ist.

Weniger intensiv erscheint mir, — mindestens so weit die veröffentlichte Litteratur darüber Auskunft giebt —, dasjenige Gebiet bearbeitet zu sein, welches uns die Methoden liefern soll, um die Konstruktionen des Raumes auf dem Zeichenblatte *wirklich*, d. h. mit dem Zirkel und Bleistift in der Hand, zur Darstellung zu bringen, insbesondere wenn dabei *Genauigkeit* und *Einfachheit* als unerläſsliche Bedingungen hingestellt werden.[2])

---

1) Siehe: „Darstellende Geometrie von Gaspard Monge" (1798), übersetzt und herausgegeben von R. Haussner, (Ostwalds Klassiker), Leipzig 1900, Seite 3.

2) Wie hoch selbst Mathematiker von dem Range eines Steiner diese reelle Seite des Konstruierens bewerten, darüber vergleiche man dessen Bemerkung in der Abhandlung: „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises", wo er im § 19 unter anderem sagt: „— — — daſs es eine ganz andere Sache sei, die Konstruktionen in der That, d. h. mit den Instrumenten in der Hand, oder — — — bloſs mittelst der Zunge auszuführen. Es läſst sich gar leicht sagen: ich thue das, und dann das, und dann jenes; allein die Schwierigkeit, und man kann in gewissen Fällen sagen, die Unmöglichkeit, Konstruktionen, welche in einem hohen Grade zusammengesetzt sind, wirklich zu vollenden, verlangt, daſs man bei einer vorgelegten Aufgabe genau erwäge, welches von den verschiedenen Verfahren bei der gänzlichen Ausführung das einfachste, oder welches unter besonderen Umständen das zweckmäſsigste sei, und wie viel von dem, was die Zunge etwas leichtfertig ausführt, zu umgehen sei, wenn es darauf ankommt, alle überflüssige Mühe zu sparen, oder

Abgesehen davon, dafs eine Anzahl wertvoller Konstruktionen existieren mag, welche nicht die ihnen gebührende allgemeine Verbreitung gefunden haben, so dürfte auch manche der gebräuchlichen Darstellungsmethoden noch nicht bis zu jenem Grade der Verfeinerung fortentwickelt worden sein, die sie befähigt, sich all den vielgestaltigen Anforderungen des modernen technischen Zeichnens ungezwungen anzupassen. Auch sollten wir nicht darauf verzichten, immer wieder von neuem die uns im Laufe der Zeit bekannt werdenden Konstruktionsverfahren darauf hin zu prüfen, ob sie sich durch Hervorheben gemeinsamer Hauptgedanken zu allgemeinen Zeichenmethoden zusammenfassen lassen, oder zu untersuchen, wie weit es möglich ist, einzelne, der stillen Arbeit am Reifsbrette entsprungene Zeichenvorteile und Kunstgriffe zu allgemein verwertbaren Konstruktionsprinzipien zu erweitern.

Auf einen derartigen Zeichenvorteil, der meiner Meinung nach es verdient, zu einem bewufst angewandten Konstruktionsprinzip erhoben zu werden, möchten auch die nachfolgenden Zeilen aufmerksam machen. Es sei gestattet, die Entstehung und Verwendbarkeit des Prinzipes an jenen Aufgaben zu erläutern, die mich zu dessen Aufstellung führten.

1. Das im technischen Zeichnen am häufigsten verwendete orthogonale Grund- und Aufrifsverfahren arbeitet mit zwei, auf dem Zeichenblatte räumlich getrennten Projektionen. Für den Theoretiker sind beide Projektionen vollständig gleichwertig; dem praktischen Konstrukteur hingegen ist es nicht selten um die Erlangung nur *einer* Ansicht (meist des Aufrisses) des darzustellenden Gegenstandes zu thun. Die andere Projektion (der Grundriss) wird in diesem Falle zu einer Hilfsfigur, die man am liebsten ganz umgehen möchte.[1])

Eine nahe liegende Lösung für diese, zunächst einem Bedürfnisse des praktischen Zeichnens entsprungene Aufgabe wird dadurch erhalten, dafs man *die Konstruktionslinien des Grundrisses an passender Stelle in den Aufrifs einzeichnet.*

Um zu zeigen, worin die Vorteile bestehen, die durch diese Abänderung eines gebräuchlichen Konstruktionsverfahrens erzielt werden, soll die Aufgabe gelöst werden: Für den Parallelkreis p einer Dreh-

---

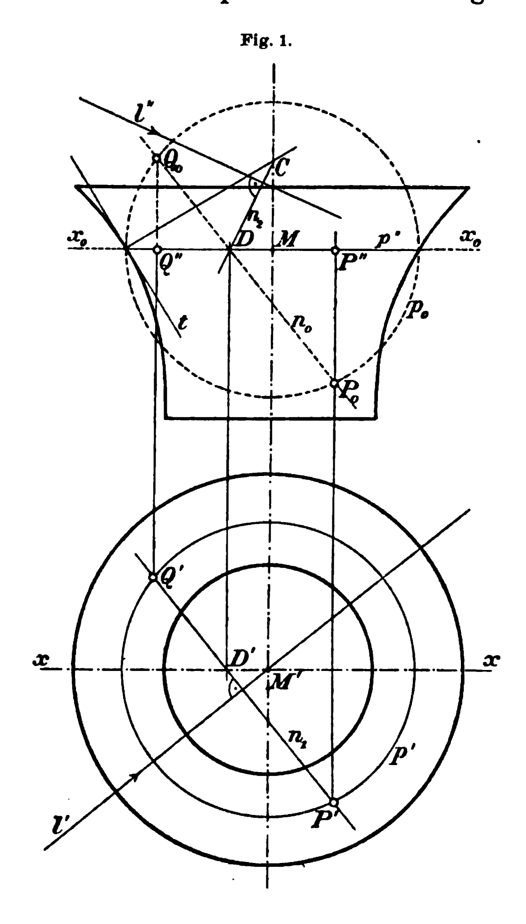
die gröfste Genauigkeit zu erreichen, oder den Plan (das Papier), worauf gezeichnet wird, möglichst zu schonen, u. s. w. . ." —
J. Steiners Gesammelte Werke, Berlin 1881, Bd. I, Seite 510. —

1) Vergleiche z. B. diese Zeitschrift **46** (1901), S. **244**: Eine Schattenkonstruktion, von R. Mehmke. Daselbst wird in einer Anmerkung darauf hingewiesen, dafs J. Pillet in seinem mir leider unzugänglichen „Traité de Perspektive . . ." Schattenkonstruktionen für Drehungsflächen angiebt, die ebenfalls allein im Aufrifs ausführbar sind.

fläche $\varDelta$ sind die Selbstschattenpunkte P und Q, insbesondere deren vertikale Projektionen zu ermitteln.[1])

Figur 1 enthält die Lösung nach dem sogenannten Kugelverfahren in der üblichen Form.[2]) — C ist der Mittelpunkt der Berührungskugel. Von C ausgehend sind an Konstruktionslinien zu ziehen: Durch C eine Normale n_2 zu l'', giebt D in p''; D ist nach D' in x zu projizieren; durch D' eine Normale n_1 zu l', giebt mit p' zum Schnitt gebracht P' und Q'; durch Loten nach p'' erhält man schliefslich P'' und Q''. —

Fig. 1.



Die Punkte P'' und Q'' würden wir auch erhalten haben, wenn wir gleich von der Stelle aus, wo wir mit dem Zirkel einsetzen mufsten, um den Radius für Kreis p' abzugreifen (also von M aus) den Kreis p_0 geschlagen, und durch D (statt durch D') die Normale (n_0) zu l' gezogen hätten. Dieser Vorgang ist aber gleichbedeutend mit einer Verschiebung der Konstruktionslinien des Grundrisses in die, in Figur 1 durch Striche (- - - -) bezeichnete Lage des Aufrisses, oder, den Vorgang räumlich aufgefafst: mit einer Verlegung der horizontalen Projektionsebene Π_1 in die Ebene des Parallelkreises p.

---

1) Das Bedürfnis, nur mit *einer* Projektion zu arbeiten, tritt hauptsächlich bei solchen Darstellungen auf, bei denen die, durch das Fehlen einer zweiten und dritten Projektion erschwerte Verständlichkeit der Abbildung durch andere Mittel ergänzt wird, also bei Abbildungen mit Schattengebung, Kontourbestimmungen etc.

2) S. z. B. R. Müller, Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie . . ., Braunschweig 1899, Seite 52.

Der Wert dieses Konstruktionsgedankens beschränkt sich nicht darauf, daſs damit die Möglichkeit gegeben ist, Konstruktionen (scheinbar!) *ohne Benutzung einer zweiten Projektion* durchzuführen. Für die von mir befürwortete allgemeinere Verwendung[1]) kommt vielmehr in Betracht, daſs durch das Ineinanderschieben der Konstruktionslinien die Länge der Ordinaten (z. B. $P'P''$ in Fig. 1) zumeist bedeutend reduziert und so die *Genauigkeit* der Zeichnung erhöht wird, und daſs es in vielen Fällen gelingt, durch Ausnützung des Zusammenfallens von Punkten und Linien die Zeichenarbeit bedeutend zu *vereinfachen.*[2]) Genauigkeit und Einfachheit in der Durchführung sind aber, wie schon eingangs erwähnt, zwei Anforderungen, auf die der zeichnende Techniker keinesfalls verzichten kann. — Auch ist es möglich auf Grund der einfachen Lagebeziehungen Konstruktionen abzuleiten, denen eine gewisse Selbständigkeit inne wohnt, so daſs sich damit unser Konstruktionsgedanke —, wenn es erlaubt ist, sich dieses Ausdruckes zu bedienen —, als *Methode bildender Faktor* erweist. —

2. Die Entfernung der durch die angeführte Konstruktion erhaltenen Punkte P_0 und P'' ist gleich dem Abstande des Punktes P von der Hauptmeridianebene. Von jedem Punkte P, welcher zur Ermittelung der Selbstschattengrenze c bestimmt wird, erhält man also die vertikale Projektion P'' und unmittelbar daran angetragen die Ordinate $P''P_0$. Diese Lage der Punkte P'' und P_0 erweist sich als besonders geeignet, um daraus eine *schiefe Projektion* abzuleiten.[3]) Wird nämlich mit $A_0A''A_s$ (Fig. 2) das Projektionsdreieck der schiefen Projektion bezeichnet, so hat man nur durch P'' eine Parallele zu $A''A_s$, und durch P_0 eine Parallele zu A_0A_s zu ziehen; der Schnittpunkt P_s dieser Geraden ist die schiefe Projektion des Punktes P. Wird das Projektions-

---

1) Auch mein Studien- und Fachgenosse E. Müller in Königsberg i. Pr. hat anläſslich der Besprechung des „Lehrbuches der darst. Geometrie von Rohn und Papperitz" die Verwendung dieses Konstruktionsprinzipes empfohlen. — Vergleiche Zeitschrift für Math. und Physik, Band 44, Histor.-litterarische Abteilung, Seite 177.

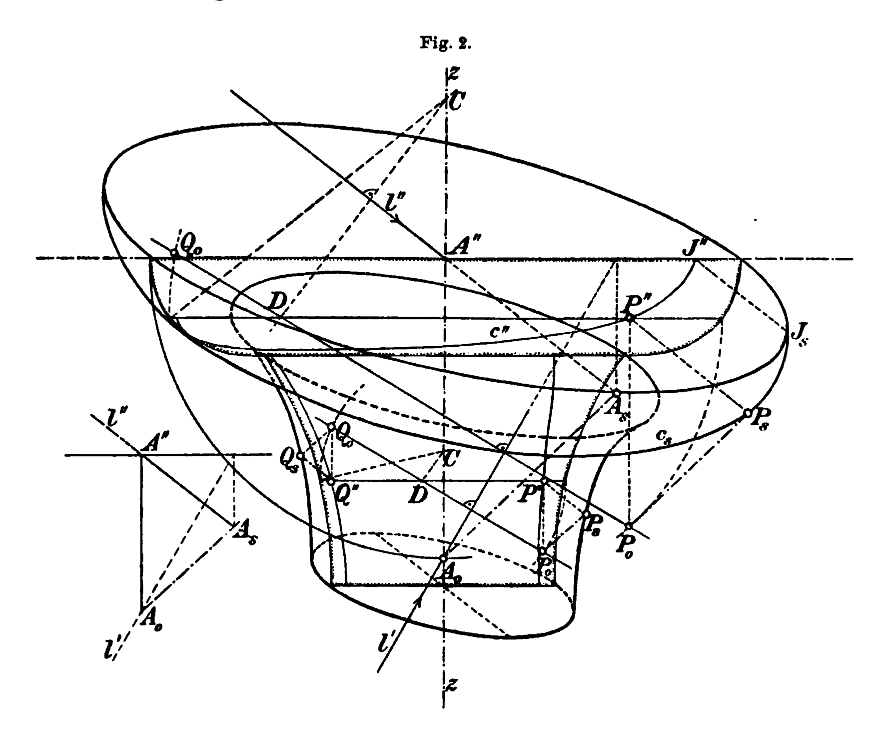
2) Bei Monge, a. a. O. Seite 57, finde ich folgende Stelle: „Die Lösung hätten wir viel eleganter gestalten können, wenn wir die Projektionsebenen durch den Kugelmittelpunkt gelegt hätten. Dann würden die beiden Projektionen der Kugel *in ein und denselben Kreis gefallen und die geraden Linien weniger lang zu ziehen* gewesen sein." — Daraus geht hervor: Das Ineinanderlegen der Projektionen mit seinen Folgen —, kurze Ordinatenlinien und zusammenfallende Zeichenelemente —, hat auch Monge schon gekannt; für uns eine um so gröſsere Verpflichtung, seine Anregungen auch zu verwerten.

3) Vergl. Schlesinger, die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie (Wien 1870), Seite 223.

dreieck für $l'l''$ als Richtung der Sehstrahlen abgeleitet, so ist c_s (die schiefe Projektion von c) der scheinbare Umrifs der Drehfläche Δ.

In Figur 2 ist die Bestimmung des scheinbaren Umrisses einer Drehfläche nach dieser Methode durchgeführt. Bemerkt sei hierzu, dafs man nicht nötig hat, all die Konstruktionslinien, die das Verfahren erläutern sollen, bei der Anwendung auf dem Reifsbrette zu zeichnen. Es dürfte genügen, für jeden benutzten Parallelkreis die Linie der

Fig. 2.



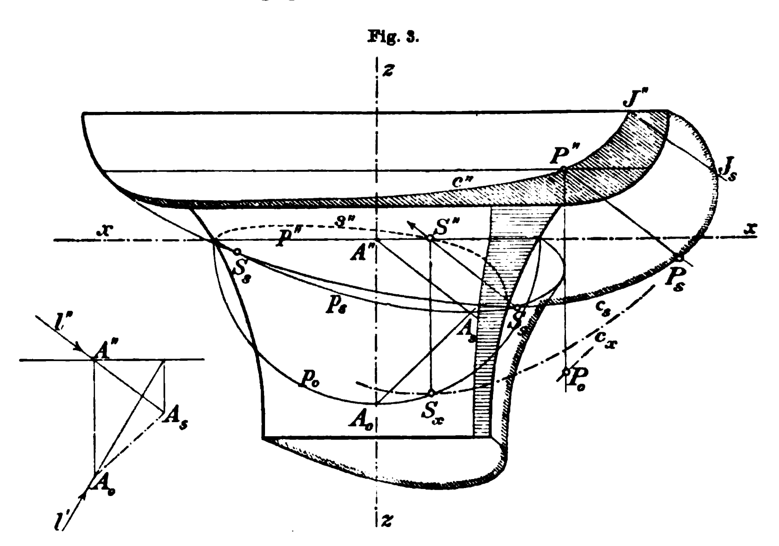
Punkte $P_0 Q_0$ zu ziehen; alle übrigen Punkte lassen sich durch Einschneiden fixieren. In der Figur sind die entbehrlichen Linien durch Striche (- - - -) angedeutet.

3. Der scheinbare Umrifs c_s in schiefer Projektion ist identisch mit dem Schlagschatten der Drehfläche auf die Hauptmeridianebene M, für $l''l'$ als Richtung der Lichtstrahlen. Figur 2 kann also auch aufgefafst werden als *orthogonale* Projektion einer Drehfläche, für welche die Schattenkonstruktion durchgeführt wurde. Figur 3 bringt diese Auffassung zur Anschauung. Zum vollständigen Abschlufs der Schattenkonstruktion fehlt noch der Schlagschatten s, den die Selbstschattengrenze c des Wulstes auf den darunter befindlichen Teil des Rotationskörpers wirft. Die Frage liegt nahe, ob es nicht möglich

ist, den Schatten s im Anschlufs an die vorliegende Konstruktion zu finden.

Nach dem allgemein gebräuchlichen Verfahren[1]) würde man s erhalten durch „Zurückführen“ der Schnittpunkte, welche der Schatten von c und die Schatten einer Anzahl von Parallelkreisen auf einer (horizontalen) Ebene bestimmen. Der Schatten von c auf eine (allerdings vertikale) Ebene M ist in unserem Beispiele bereits vorhanden. Wir hätten also noch die Schatten p_s der in Betracht kommenden Parallelkreise —, im vorliegenden Falle Ellipsen! —, zu konstruieren und dann wie oben angegeben zu verfahren. Ein solches Verfahren

Fig. 3.



ist möglich und wurde in Figur 3 zur Bestimmung des Punktes S'' angewandt. Indes: das Verzeichnen einer Anzahl von Ellipsen erfordert verhältnismäfsig viel Zeit, die Schattenpunkte S_s ergeben sich als Schnittpunkte zweier punktweise bestimmten und freihändig gezeichneten Kurven, unsicher und ungenau. Das Verfahren erweist sich mithin in dieser Form als wenig konstruktionsmäfsig. — Es ist aber möglich, es derart abzuändern, dafs das Zeichnen der Schattenellipsen umgangen wird.

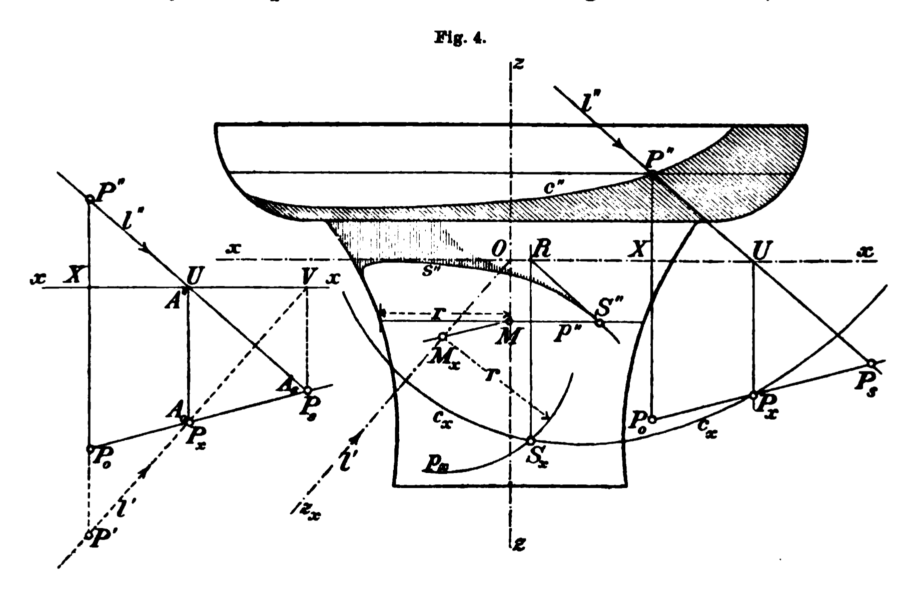
Wir gehen dabei von der Bemerkung aus, dafs die Schattenellipse p_s zum Kreise p_0 affin ist und perspektivisch liegt, für xx ($= p''$) als Affinitätsachse und A_sA_0 als Richtung der Affinitätsstrahlen. Dies führt darauf, S_s nicht direkt als Schnitt von p_s mit c_s zu bestimmen,

1) S. z. B. Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie (Leipzig 1884—87). Band II, Seite 177.

sondern S_s, bezw. S'', abzuleiten aus S_x, dem Schnittpunkte von p_0 mit der zu c_s affinen Kurve c_x. Da die Schlagschatten aller Parallelkreise Ellipsen sind, die ein Paar konjugierte Durchmesser parallel zu p'', bezw. $A''A_s$ haben, so werden denselben im System der Kurve c_x (Σ_x) durchweg Kreise entsprechen. Die Konstruktion ist damit zurückgeführt auf die Ermittelung der Schnittpunkte von Kreisen mit einer Kurve c_x. — Im folgenden soll dieses abgeänderte Verfahren noch näher erläutert und dabei gezeigt werden, wie man c_x direkt erhalten kann, ohne c_s darstellen zu müssen.

4. Die affine Beziehung zwischen dem direkten Schattensystem Σ und dem System Σ_x ist nach **3.** dadurch hergestellt worden, dafs wir

Fig. 4.



A_s und A_0 als zwei entsprechende Punkte erkannten (Fig. 3 und Nebenfigur von Fig. 4). Es entspricht also der Richtung A_sA'' ($\parallel l''$) in Σ, die Richtung A_0A'' ($\parallel zz$) in Σ_x, und ebenso A_sV ($\parallel zz$) in Σ, die Richtung A_0V ($\parallel l'$) in Σ_x.

Sind $P''P_0$ (Fig. 4) die beiden zusammengehörigen Punkte, wie sie sich nach **1** ergeben, und ist P_s der Schatten von P auf die Hauptmeridianebene M, so sind die Seiten des Dreiecks $P_0P''P_s$ parallel den Seiten des Projektionsdreiecks $A_0A''A_s$. Daraus folgt unter Berücksichtigung der oben angeführten affinen Beziehungen, dafs wir den Punkt P_x der Kurve c_x erhalten können, wenn wir durch U, den Schnittpunkt der Geraden $P''P_s$ mit der Affinitätsachse xx[1]) eine

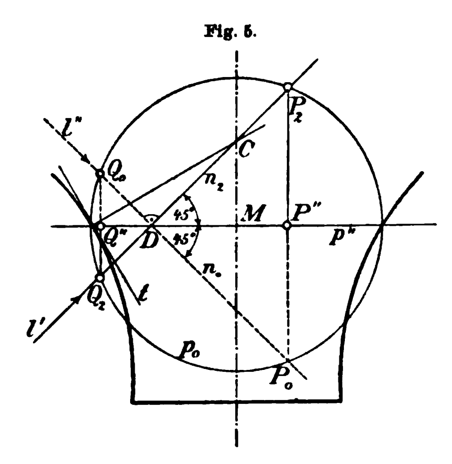
1) Die Achse xx ist horizontal, im übrigen aber beliebig anzunehmen.

Parallele zu P_0P'' ziehen und diese Parallele mit P_0P_s (in P_x) zum Schnitt bringen. Wir ersehen zugleich, daſs man durch Ziehen der Linien $P''U \parallel l''$, $UP_x \parallel zz$ und $P_0P_x \parallel A_0A_s$ den Punkt P_x *direkt* aus P_0 und P'' ableiten kann, also auch die *Kurve* c_x erhält, ohne c_s zeichnen zu müssen.

Um die *Kreise* p_x, welche bei unserem Verfahren die Schattenellipsen der Fig. 3 ersetzen sollen, möglichst einfach zu erlangen, beachten wir, daſs die Mittelpunkte der Ellipsen in der Drehachse z liegen. Die Mittelpunkte der affinen Kreise liegen daher in der Geraden z_x, welcher z in Σ entspricht, und die nach früherem parallel zu l' ist. Ziehen wir also durch den Schnittpunkt O von x und z eine Parallele zu l', so ist dies die Gerade der Kreismittelpunkte. Den Mittelpunkt M_x eines bestimmten Schattenkreises p_x erhält man als Schnitt von z_x mit dem durch M gezogenen Affinitätsstrahl.

Die Punkte S_x, in welchen der aus M_x mit dem Radius r gezeichnete Schattenkreis p_x die Kurve c_x schneidet, entsprechen jenen Deckpunkten S_s des direkten Schattensystems Σ, aus welchen man durch das sogenannte Zurückführen die Punkte S'' ermittelt. Ziehen wir durch S_x eine Parallele zu z bis R in x, und weiter durch R eine Parallele zu l'', bis diese p'' in S'' schneidet, so ist S'' ein Punkt des gesuchten Schlagschattens. — Die Gerade durch RS'' ist nämlich in Σ die entsprechende Gerade zu RS_x in Σ_x; sie geht also durch S_s, und da sie auch parallel zu l'', so fällt sie zusammen mit der vertikalen Projektion des Lichtstrahls, welcher, von S_s zurückgeführt, S'' bestimmen würde. S_s selbst braucht nicht ermittelt werden. —

Fig. 5.



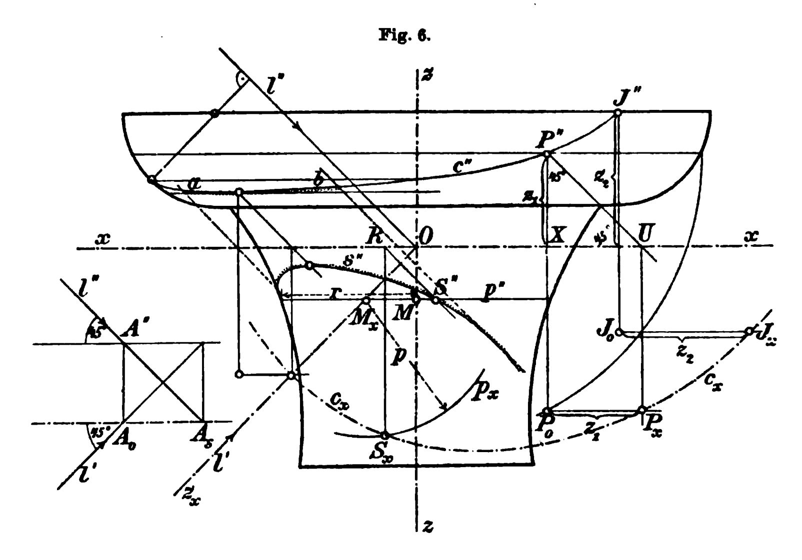
5. Beachtenswert sind die Vereinfachungen, welche sich ergeben, wenn man diese Konstruktion für den gebräuchlichen Lichtstrahl $\left.\begin{matrix} l'' \\ l' \end{matrix}\right\} 45^0$ ausführt.

Zunächst möchte ich hier darauf hinweisen, daſs bei dieser Annahme des Lichtstrahles das unter 1. gegebene Verfahren zur Bestimmung der *„Selbstschattengrenze“* noch eine weitere Vereinfachung zuläſst. P'' und Q'' (vergl. Fig. 1) leitet man in diesem Falle nicht aus P_0 und Q_0 ab, sondern aus jenen Punkten P_2 und Q_2, welche sich ergeben als Schnitte des Kreises p_0 mit einer durch C, senkrecht

zu l'' gezogenen Geraden n_2. Die Richtigkeit des Verfahrens erkennt man ohne weiteres aus den Symmetrieverhältnissen der Fig. 5 bezüglich der Geraden p''.

Wir könnten den Beweis aber auch so führen: Denken wir die horizontale Ebene Π_1 des Parallelkreises p, zusammen mit der horizontalen Projektion l' des Lichtstrahls, entgegen dem gewöhnlichen Gebrauch, dadurch mit der Zeichenebene vereinigt, dafs wir den vorderen Teil von Π_1 nach *oben* umklappen, so stimmt die Richtung von l' überein mit l'', und es fällt mithin die durch C gezogene Normale n_2 ($\perp l''$), zusammen mit der durch D zu ziehenden Normalen n_0 ($\perp l'$)

Fig. 6.



Die Vereinfachungen für die *Schlagschattenkonstruktion* (Fig. 6) ergeben sich aus folgenden speziellen Lagen von Zeichenelementen:

a) Die Richtung der Affinitätsstrahlen ($A_0 A_s$) wird parallel zu xx; die Geraden $P_0 P_x$ lassen sich mithin bequem mit der Reifsschiene ziehen. Da $P'' X U$ ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck bildet, kann P_x auch erhalten werden, indem man die Strecke $X P''$ von P_0 aus bis P_x aufträgt.

b) Aus der horizontalen Richtung der Affinitätsstrahlen folgt weiter, dafs M_x in die Gerade p'' fällt, sich also als Schnitt von z_x mit der vertikalen Projektion p'' des zugehörigen Parallelkreises ergiebt.

Fassen wir den Konstruktionsvorgang, soweit er sich auf den *Schlagschatten* s bezieht, noch einmal kurz zusammen (Fig. 6):

Wir ziehen die *Achse* x horizontal, aber sonst beliebig und legen durch deren Schnitt O mit z eine *Parallele* z_x zu l'.

Die *Kurve* c_x erhalten wir, indem wir für jeden nach 1 bestimmten Selbstschattenpunkt $P'' P_0$ durch P_0 eine Parallele zu x ziehen und $P_0 P_x = XP''$ machen.

Sind s_x und c_x gezeichnet, so erhält man den *Schattenpunkt* S'', den c auf einen beliebigen Parallelkreis p wirft, wie folgt: Kreisbogen aus $M_x (= s_x \times p'')$ mit Radius r schneidet c_x in S_x; durch S_x ein Lot bis R in x; durch R eine Parallele zu l'' giebt S'' in p''. —

6. Ist, wie dies häufig vorkommt, die schattenwerfende Kurve ein *Parallelkreis* (Randkreis) k der Drehfläche, so tritt an Stelle der Kurve c_x ein Kreis k_x. In diesem Falle läfst man zweckmäfsig die Achse x mit der vertikalen Projektion von k zusammenfallen und erhält dann die Konstruktion so, wie in Fig. 7 angegeben.*) Einer besonderen Erklärung bedarf dieselbe nach dem vorhergesagten wohl nicht.

Jedoch kann unter Umständen das Ergebnis folgender Betrachtung für den Zeichner von Wert sein.

Wenn l' und l'' mit der Projektiosachse Winkel von 45° einschliefsen, so liegen die Punkte 1 und 2 in einer Horizontalen, und es ist $\overline{MS''} = \overline{M_x 3}$. — S'' können wir demnach auch durch *wiederholtes Abgreifen* mit dem Zirkel wie folgt erhalten: Radius r in den Zirkel nehmen; von M_x nach S_x in k_x stechen; von S_x die Entfernung bis s abgreifen; mit dieser Zirkelöffnung von M bis 3 stechen und sofort $\overline{3 M_x}$ abgreifen; endlich diese Strecke von M nach S'' abtragen. Wenn man auf diese Weise S'' ermittelt, brauchen also *nur* k_x, s_x und die einzelnen p'' gezeichnet werden.[1])

Nicht unterlassen möchte ich es, noch darauf hinzuweisen, dafs bei Schattenkonstruktionen, wie sie Figur 6 zeigt, jener Teil der schattenwerfenden Selbstschattengrenze c, welcher den sichtbaren Schlagschatten s veranlafst, sich häufig nur über *sehr nahe* liegende Parallelkreise erstreckt (vergleiche z. B. das flache Kurvenstück *ab* in Fig. 6).

Dann ist es in Fällen, wo es nicht auf vollständige Genauigkeit ankommt, möglich, anstatt der Kurve c_x den Schatten k_x jenes Parallelkreises zu verwenden, der in unmittelbarer Nähe des, für die Schattenkonstruktion in Betracht kommenden Teiles von c'' verläuft. Ob und wann diese *Näherungskonstruktion* zulässig erscheint, wird der Zeichner in jedem besonderen Falle leicht beurteilen können.

---

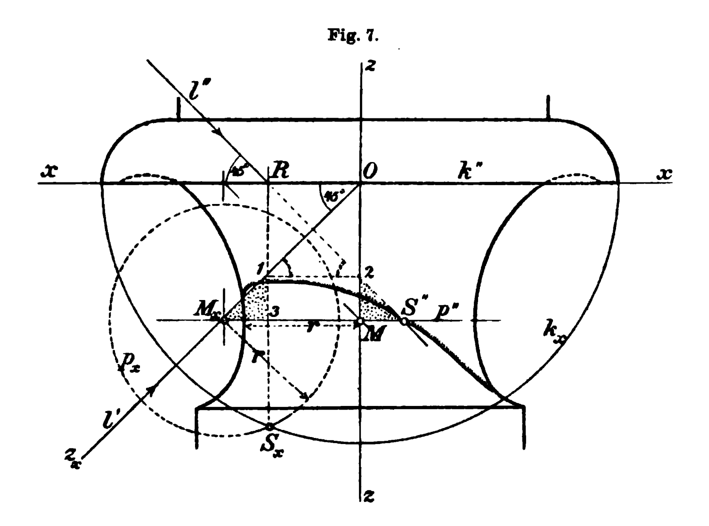
*) Bei dieser Figur sind die Konstruktionslinien, welche bei der Ausführung durch Einschnitte ersetzt werden können, punktiert gezeichnet.

1) Das gleiche Verfahren kann auch bei dem allgemeineren Fall (Fig. 6) angewandt werden; da ja auch dort die Bedingung, dafs $\left.\begin{matrix} l'' \\ l' \end{matrix}\right\} 45^\circ$, erfüllt ist.

7. Die unter 6 gegebene Konstruktion (Fig. 7) hat sich als Spezialfall von 4 (Fig. 4) ergeben. Darnach mufste der Konstruktionsvorgang so aufgefafst werden: Wir bestimmten den Schlagschatten k_s der schattenwerfenden Kurve und die Schatten p_s einzelner Parallelkreise auf die Hauptmeridianebene M, ermittelten die Schnittpunkte S_s zwischen k_s und p_s und erhielten durch Zurückführen die gesuchten Punkte S''; dabei wurden die Schattenellipsen k_s und p_s nicht direkt benützt, sondern dieselben vorerst durch eine affine Transformation in Kreise verwandelt.

Das in Figur 7 enthaltene Verfahren läfst aber noch eine *andere Deutung* zu. Fassen wir die Hauptmeridianebene M —, wie wir dies bis jetzt ohnehin stillschweigend gethan —, als vertikale Projektions-

Fig. 7.



ebene Π_2, und die Ebene des Randkreises k als horizontale Projektionsebene Π_1 auf, so dafs xx thatsächlich die Projektionsachse wird. Dann ist k_x die horizontale Projektion von k und zugleich der Schatten auf Π_1, und die Kreise p_x sind die Schlagschatten der p, gleichfalls auf Π_1. Von letzterem überzeugen wir uns, wenn wir durch $M(= M'')$ und $O(= M')$ Parallele zu l'', bezw. l' ziehen; der horizontale Spurpunkt dieses Lichtstrahls fällt nach M_x. In dieser Auffassung erkennen wir das gebräuchliche Verfahren[1]), allerdings mit Vereinfachungen, welche sich in letzter Linie als Folge des *„Ineinanderlegens der Projektionen“* ergaben.

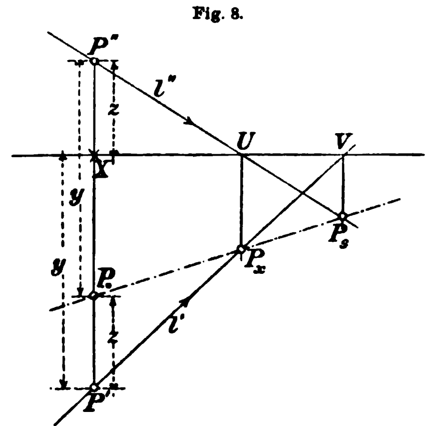
8. Es ist nicht schwer zu zeigen, dafs auch der unter 4 gegebene, allgemeine Fall eine Erklärung zuläfst, welche nicht von dem Schatten auf die Meridianebene ausgeht.

1) Vergl. die Anmerkg. auf Seite 472. —

Denken wir uns in Figur 4, bezw. deren Nebenfigur, die Strecke $P''P_0$ von X aus auf der Verlängerung der XP_0 über P_0 hinaus aufgetragen, so erhalten wir einen Punkt, den wir in Hinblick auf die Achse x als horizontale Projektion von P auffassen können und daher mit P' bezeichnen wollen. Ziehen wir durch P'' und P' die Projektionen des Lichtstrahles und suchen den Schnitt mit der durch xx gelegten horizontalen Ebene Π_1, so würden wir ebenfalls zu P_x gelangt sein. c_x ist demnach identisch mit dem Schatten von c auf Π_1, und ebenso sind die Kreise p_x die Schatten der p auf diese Ebene. Der Übergang vom Schattensystem Σ auf Σ_x stellt sich nach dieser Auffassung dar als eine Ableitung der Schatten auf die Π_1 aus den Schatten auf Π_2.

Die Bemerkung, dafs P_x als Schatten von P auf eine, durch die (in den Aufrifs verlegte) Achse x bestimmte horizontale Ebene Π_1 aufgefafst werden kann, führt im Zusammenhang mit den unter 4 gegebenen Beziehungen der Punkte $P_0 P_x P_s$ zu einem Ergebnis, das sich allgemein so aussprechen läfst:

(Figur 8): Bestimmt man von einem durch Aufrifs P'' und Grundrifs P' gegebenen Punkt P den Schatten P_s auf die Aufrifsebene und den Schatten P_x auf die Grundrifsebene, so liegt in der Geraden $P_x P_s$ auch P_0, der um P'' in die Gerade $P'\ P''$ umgelegte Punkt P (also $P''P_0 = XP'$).[1]) — Die Richtung der Geraden $P_0 P_x P_s$ (Affinitätsstrahlen!) ist dabei nur abhängig von der Richtung der Lichtstrahlen, nicht aber von der Lage des Punktes P. —



Diese geometrische Thatsache, die sich uns als Folge ergeben hat, läfst sich auch unabhängig von allem vorangegangenen, unmittelbar aus Figur 8, bezw. deren räumlicher Deutung ableiten und könnte dann benutzt werden, um aus dem durch $P''P_0$ gegebenen Selbstschattenpunkt den Schatten auf Π_1 (also Punkt P_x) zu bestimmen. Man würde dabei genau dieselben Linien zu ziehen haben, wie bei der unter 4 gegebenen Konstruktion; zur Erklärung würden wir aber

1) P_0 ist auch der *um* P' in die Gerade $P'P''$ umgelegte Punkt P ($P'P_0 = XP''$).

weder die Schatten auf die Hauptmeridianebene, noch deren affine Transformation benötigt haben.

Es mag unentschieden bleiben, welcher von den beiden Auffassungen[1]) man den Vorzug geben soll. Jedenfalls ist ersichtlich, dafs im einen wie im anderen Falle, der Konstruktionsgedanke vom „*Ineinanderlegen der Projektionen*" die Methode wesentlich bedingt und die Einfachheit und Genauigkeit der Zeichenarbeit erhöht hat; dafs somit dieser Konstruktionsgedanke, dessen Ursprung wir nach der Anmerkung 2 auf Seite 470 bis auf Monge zurückführen können, der Beachtung nicht unwert erscheint, die wir ihm durch diese Zeilen verschaffen wollten. —

Über Körper von kinetischer Symmetrie.

Von Robert Mayr in München.

(Auszug aus des Verfassers Inaugural-Dissertation.)

Mit einer Doppeltafel (VI).

I. Einführung.

Mit dem Problem, Körper zu bestimmen, welche *für alle Axen durch den Schwerpunkt gleiche Trägheitsmomente* besitzen, haben sich gegen Ende des 18. Jahrhunderts Laplace und Legendre[2]) beschäftigt. Die von diesen beiden Mathematikern gefundenen, aber noch nicht untersuchten Resultate sollen im Folgenden einer Untersuchung unterzogen werden.

Körper der eben definierten Art nennt man „*Körper von kinetischer Symmetrie*". Siehe theoretische Physik von Thomson u. Tait.

Einfache Körper dieser Art sind alle Körper, welche in Bezug auf drei zu einander senkrechte Ebenen in vollkommen gleicher Weise symmetrisch gebaut sind, so z. B. Würfel, Kugel, reguläres Oktaëder,

1) Da es in der vorliegenden Abhandlung nicht so sehr darauf ankam, auf möglichst kurzem Wege Konstruktionen für die Schattenbestimmung an Drehflächen abzuleiten, sondern vielmehr gezeigt werden sollte, wie der Gedanke vom „Ineinanderlegen der Projektionen" als Grundlage zur Ausgestaltung von Zeichenmethoden verwertet werden kann, so habe ich nicht Anstand genommen, auf beide Auffassungen ein- und desselben Konstruktionsvorganges hinzuweisen.

2) Laplace: „Mémoire sur la figure de la terre" in den Mém. der Pariser Akademie für 1783, p. 17—46. Legendre: „Suite des Recherches sur la figure des planètes par M. Le Gendre" in den Mém. der Pariser Akademie für 1789 (publ. 1793), p. 372—455.

Pyramidenwürfel u. s. w., vorausgesetzt, daſs sie aus homogener Masse bestehen.

Laplace und Legendre haben nun, beide in prinzipiell gleicher Weise, eine sehr allgemeine Gleichung abgeleitet, welche eine unendliche Reihe von Flächen darstellt, die homogene Körper von kinetischer Symmetrie umschlieſsen. Die *Idee* der Ableitung ist, wenn man sich auf homogene Körper beschränkt, kurz folgende:

Die Koordinatenachsen xyz seien die durch den Anfangspunkt der Koordinaten laufenden Trägheitsachsen des Körpers. Dann müssen bekanntlich die Gleichungen bestehen:

$$(1) \qquad \int xy\,dM = 0, \quad \int xz\,dM = 0, \quad \int yz\,dM = 0.$$

dM bedeutet das Massenelement. Da ferner der Körper kinetische Symmetrie besitzen soll, so müssen auch folgende Gleichungen gelten:

$$(2) \qquad \int x^2 dM = \int y^2 dM = \int z^2 dM.$$

In diese Bedingungsgleichungen sind nun Polarkoordinaten einzuführen:

$$x = r \cdot \cos\psi, \qquad y = r \cdot \sin\psi \cos\vartheta, \qquad z = r \cdot \sin\psi \sin\vartheta.$$

Sodann ist der Radius Vektor r der Oberfläche, welcher als obere Grenze in den Integralen erscheint und als Funktion von den Winkeln ψ und ϑ aufzufassen ist, auszudrücken durch die Reihe

$$r^5 = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots,$$

wobei die Y die Kugelfunktionen der zwei Variablen ψ und ϑ sind. Mit Hilfe der Sätze über Kugelfunktionen ergiebt sich dann aus den Bedingungen 1 und 2, daſs in der Reihe das Glied Y_2 verschwinden muſs, so daſs man folgende Gleichung erhält:

$$\begin{aligned} r^5 = a + b \cdot X_1 &+ \frac{dX_1}{dx} \sin\psi\,(b' \cos\vartheta + b'' \sin\vartheta) \\ + c \cdot X_3 &+ \frac{dX_3}{dx} \sin\psi\,(c' \cos\vartheta + c'' \sin\vartheta) \\ &+ \frac{d^2X_3}{dx^2} \sin^2\psi\,(c''' \cos 2\vartheta + c'''' \sin 2\vartheta) \\ &+ \frac{d^3X_3}{dx^3} \sin^3\psi\,(c^{\mathrm{V}} \cos 3\vartheta + c^{\mathrm{VI}} \sin 3\vartheta) \\ + d \cdot X_4 &+ \frac{dX_4}{dx} \sin\psi\,(d' \cos\vartheta + d'' \sin\vartheta) \\ &+ \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

In dieser Gleichung, welche die gesuchten Oberflächen darstellt, sind a, b, b' etc. willkürliche Konstanten. X_n ist die Kugelfunktion n. Grades von einer Variablen.

Also:

$$X_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\Big[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\cdots\Big],$$

wobei die Reihe bis x^0 oder x^1 läuft, und $x = \cos\psi$ zu nehmen ist. ψ bedeutet (nach Legendre) den Winkel des Radius Vektor gegen die x-Achse, ϑ den Winkel der Ebene rx gegen die Ebene xy.

Bei obiger Gleichung ist nun noch nicht beachtet, daſs der Anfangspunkt der Koordinaten auch Schwerpunkt sein soll. Man sieht aber leicht ein, daſs dies eintritt, sobald jede durch den Anfangspunkt laufende Gerade die Fläche in zwei vom Anfangspunkt gleich weit entfernten Punkten trifft, und daſs diese Bedingung wiederum erfüllt ist, sobald alle Glieder, welche Kugelfunktionen mit ungeradem Index enthalten, wegfallen. Man erhält dann

$$A\cdots\left\{\begin{aligned} r^5 = a + d\cdot X_4 &+ \frac{dX_4}{dx}\sin\psi\,(d'\cos\vartheta + d''\sin\vartheta)\\ &+ \frac{d^2X_4}{dx^2}\sin^2\psi\,(d'''\cos 2\vartheta + d''''\sin 2\vartheta)\\ &+ \frac{d^3X_4}{dx^3}\sin^3\psi\,(d^{V}\cos 3\vartheta + d^{VI}\sin 3\vartheta)\\ &+ \frac{d^4X_4}{dx^4}\sin^4\psi\,(d^{VII}\cos 4\vartheta + d^{VIII}\sin 4\vartheta)\\ + f\cdot X_6 + \cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Legendre giebt aber schlieſslich nicht diese Gleichung an, sondern folgende speziellere:

$$B\cdots\left\{\begin{aligned} r^5 = A + BX_4 + B'\frac{d^2X_4}{dx^2}\sin^2\psi\cos 2\vartheta&\\ + B''\frac{d^4X_4}{dx^4}\sin^4\psi\cos 4\vartheta&\\ + CX_6 + C'\frac{d^2X_6}{dx^2}\sin^2\psi\cos 2\vartheta&\\ + \cdots\cdots\cdots& \end{aligned}\right.$$

Das Fehlen der Glieder mit $\sin n\vartheta$ und der Glieder mit ungeraden Potenzen von $\sin\psi$ bewirkt, daſs die durch B dargestellten Flächen orthogonal symmetrisch werden in Bezug auf die drei Koordinatenebenen.

Wir wollen A die *„allgemeine Legendresche Gleichung“* nennen und B die *„spezielle Legendresche Gleichung“*.

Jede dieser Gleichungen stellt eine unendliche Reihe von Flächen dar. Jeder von einer solchen Fläche umschlossene homogene Körper hat kinetische Symmetrie. Er hat für jede Achse durch seinen Schwer-

punkt das Trägheitsmoment $\varrho \cdot \frac{8\pi}{15} \cdot a$ bezw. $\varrho \cdot \frac{8\pi}{15} A$, wenn ϱ seine spez. Dichte ist. Das Trägheitsmoment hängt somit nur vom ersten (konstanten) Glied ab und ist gleich dem einer Kugel vom Radius $\sqrt[5]{a}$ bezw. $\sqrt[5]{A}$ und gleicher Dichte.

II. Diskussion der in den Legendreschen Gleichungen enthaltenen einfachsten Formen.

Der Radius Vektor darf nie sein Zeichen ändern. Liefse man dies nämlich zu, was a priori wohl denkbar ist, so würden die Integrale falsche Trägheitsmomente liefern, da statt Addition aller Elementarträgheitsmomente eine teilweise Subtraktion einträte. Die Konstanten in den Gleichungen müssen also so bestimmt werden, dafs r stets positiv oder stets negativ bleibt.

Ferner soll nur eine *endliche* Anzahl von Gliedern in Betracht gezogen werden. Die Gleichung hat dann die Form $r^5 = C + F(\psi, \vartheta)$, wobei C eine Konstante und $F(\psi, \vartheta)$ eine ganze rationale Funktion von $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sin n\vartheta$, $\cos n\vartheta$ ist. Man beachte auch, dafs gemäfs der Ableitung ϑ von 0 bis 2π, ψ von 0 bis π variieren mufs.

Zur Untersuchung der Gestalt der Flächen legen wir ebene Schnitte durch die x-Achse. Einen solchen Schnitt erhält man, wenn man dem ϑ einen konstanten Wert giebt. Seine Gleichung hat die Form $r^5 = C + f(\psi)$. Man findet, dafs eine solche Kurve an Singularitäten nur Spitzen und Doppelpunkte im Anfangspunkt aufweisen kann.

Wir wollen nun die *einfachsten* der Flächen in der angegebenen Weise untersuchen.

A. Die allgemeine Legendresche Gleichung.

Läfst man in Gleichung A alle Koeffizienten gleich Null werden bis auf a, so hat man $r^5 = a$. Das ist eine Kugel. Als einfachsten Körper von kinetischer Symmetrie erhält man somit hier die Kugel. Trägheitsmoment $= \varrho \frac{8\pi}{15} a = \varrho \frac{8\pi}{15} r^5$.

Die nächst einfache Fläche ergiebt sich, wenn man nur die ersten beiden Koeffizienten von 0 verschieden wählt. Die erhaltene Gleichung $r^5 = a + dX_4$ stellt eine *Rotationsfläche* dar, da r von ϑ unabhängig ist. Rotationsachse ist die x-Achse. Da die *Form* der Fläche nur vom Verhältnis $d : a$ abhängt, kann man ohne Spezialisierung $d = \frac{8}{5}$ setzen und a allein willkürlich lassen. Setzt man $a + \frac{3}{5} = c$, so lautet die Gleichung $r^5 = c + 7\cos^4\psi - 6\cos^2\psi$. Den Ver-

lauf der Funktion $f(\psi) = 7\cos^4\psi - 6\cos^2\psi$ stellt Tabelle I dar. Die Fläche bezw. ihre Meridiankurve erscheint in 4 Typen, je nach dem Wert von c. Sie seien dargestellt für $c = 3$, $c = 9/7$, $c = -1$, $c = -2$. Fig. 1—4 zeigen diese vier Typen der Meridiankurve. Der mit eingezeichnete Kreis hat den Radius $\sqrt[5]{c}$. Statt der halben Kurve (ψ variiert nur von 0 bis π!) ist die ganze gezeichnet. Läſst man die Kurven um die x-Achse rotieren, so erhält man die Flächen. Das Trägheitsmoment des Körpers ist $\varrho\frac{8\pi}{15}(c - \frac{3}{5})$.

ψ	$f(\psi)$
0	1 (Max.)
$\alpha = 22^0$	0
$\mu = 49^0$	$-9/7$ (Min.)
$\pi/2$	0
$\pi - \mu$	$-9/7$ (Min.)
$\pi - \alpha$	0
π	1 (Max.)

Tab. I.

Um die nächst einfache Form zu erhalten, nehmen wir in unserer Gleichung den ersten und dritten Koeffizienten von Null verschieden an. Die Gleichung lautet dann: $r^5 = a + d' \cdot \frac{dX_4}{dx}\sin\psi\cos\vartheta$. Wir setzen wieder ohne Spezialisierung $d' = \frac{2}{5}$ und bekommen $r^5 = a + (7\cos^2\psi - 3)\cos\psi\sin\psi\cos\vartheta$. Den Verlauf der Funktion $\varphi(\psi) = (7\cos^2\psi - 3)\cos\psi\sin\psi$ giebt Tabelle II. Schreibt man die Gleichung in der Form $r = \sqrt[5]{a + \cos\vartheta\cdot\varphi(\psi)}$, so sieht man leicht, daſs auf der Fläche vier Kreise liegen, welche von der xz-Ebene, der yz-Ebene und dem Kreiskegel mit der Öffnung 2α und der x-Achse als Achse aus der Fläche ausgeschnitten werden. Diese 4 Kreise liegen gleichzeitig auf der konzentrischen Kugel vom Radius $\sqrt[5]{a}$ und schneiden sich in 6 Punkten. In diesen 6 Punkten *berühren sich Fläche und Kugel.*

ψ	$\varphi(\psi)$
0	0
$\mu = 24^0$	1,056 (Max.)
$\alpha = 49^0$	0
$\mu' = 69^0$	$-0{,}703$ (Min.)
$\pi/2$	0
$\pi - \mu'$	0,703 (Max.)
$\pi - \alpha$	0
$\pi - \mu$	$-1{,}056$ (Min).
π	0

Tab. II.

Die Form der Fläche hängt noch von a ab. Damit r stets positiv oder stets negativ sei, muſs $a \geqq 1{,}056$ oder $a \leqq -1{,}056$ sein. Für negative a erhält man hier dieselben Flächen, wie für positive. Daher hat man nur zwei Typen, welche durch die Werte $a = 1{,}5$ und $a = 1{,}056$ dargestellt seien.

Wir legen durch die x-Achse die Schnittebenen für $\vartheta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$. Je zwei solche Halbschnitte setzen sich zu einer *stetigen* Kurve zusammen.

1. $a = 1{,}5$. — Fig. 5 giebt den Schnitt mit Ebene xy ($\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$).

Fig. 6 giebt den Schnitt für $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ und $\vartheta = \frac{5\pi}{4}$, gleichzeitig aber auch für $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$ und $\vartheta = \frac{7\pi}{4}$, wenn man rechts und links vertauscht. Bei beiden Figuren ist der Schnittkreis mit der sechsfach berührenden Kugel mitgezeichnet. Der Schnitt mit Ebene xz $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2},\ \vartheta = \frac{3\pi}{2}\right)$ ist, wie schon erwähnt, ein Kreis.

Fig. 7 giebt eine Ansicht des ganzen Körpers (Parallelprojektion). Die Kurven 1, 3, 4 und 5 sind die 4 Kreise.

2. $a = 1{,}056$. — Fig. 8 giebt den Schnitt mit Ebene xy. Man erkennt aus ihm, dafs sich die Fläche für eine in der Ebene xy von der x-Achse um 24^0 abweichende Richtung trichterförmig zum Anfangspunkt hineinzieht. Im übrigen unterscheidet sie sich von der vorigen Fläche nur durch stärkere Aus- und Einbuchtungen.

B. *Die spezielle Legendresche Gleichung.*

Zunächst erhält man auch hier die Kugel $r^5 = A$ und die Rotationsfläche $r^5 = A + BX_4$. Erst, wenn man den ersten und dritten Koeffizienten von Null verschieden wählt, erhält man eine neue Fläche, nämlich:

$$r^5 = A + B' \frac{d^2 X_4}{dx^2} \sin^2 \psi \cos 2\vartheta.$$

Ohne weitere Spezialisierung kann man $B' = \frac{2}{15}$ setzen und erhält somit die Gleichung:

$$r^5 = A + (7\cos^2\psi - 1)\sin^2\varphi \cos 2\vartheta.$$

Die Funktion $\chi(\psi) = (7\cos^2\psi - 1)\sin^2\psi$ ist durch Tabelle III dargestellt. Schreibt man die Gleichung in der Form $r = \sqrt[5]{A + \chi(\psi)\cdot\cos 2\vartheta}$, so erkennt man leicht, dafs auf der Fläche 4 Kreise liegen, welche von den Ebenen $\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ und $\vartheta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ und und von dem Kreiskegel mit der Öffnung 2α und der x-Achse als Achse aus der Fläche ausgeschnitten werden. Diese vier Kreise liegen gleichzeitig auf der konzentrischen Kugel vom Radius $\sqrt[5]{A}$ und schneiden sich in 10 Punkten, von welchem zwei in die Endpunkte der x-Achse fallen. In diesen 10 Punkten *berühren sich Fläche und Kugel.*

ψ	$\chi(\psi)$
0	0 (Min.)
$\mu = 41^0$	9/7 (Max.)
$\alpha = 68^0$	0
$\pi/2$	-1 (Min.)
$\pi - \alpha$	0
$\pi - \mu$	9/7 (Max.)
π	0 (Min.)

Tab. III.

Die Form der Fläche hängt von A ab. Es mufs $A \geqq 9/7$ oder $A \leqq -9/7$ sein. Im 2. Fall kommen dieselben Flächen, wie im ersten Fall. Wir betrachten die Fläche für $A = 1{,}5$ und $A = 9/7$.

1. $A = 1{,}5$. — Fig. 9 giebt den Schnitt mit Ebene xy, Fig. 10 den Schnitt mit Ebene xz, Fig. 11 den Schnitt mit Ebene yz. Fig. 12 giebt eine Ansicht des ganzen Körpers. Die Kurven 4, 5, 6 sind drei Kreise, der vierte fällt zum Teil mit der Kontur zusammen.

2. $A = 9/7$. — Fig. 13 giebt den Schnitt mit Ebene xz. Man sieht daraus, dafs sich diese Fläche längs der zwei in der xz-Ebene gegen die x-Achse um 41^0 geneigten Richtungen trichterförmig zum Anfangspunkt hineinzieht. Sonst unterscheidet sie sich von der vorigen wieder nur durch stärkeres Hervortreten der charakteristischen Form.

Fig. 14 giebt eine Ansicht dieses Körpers. Die 4 Kreise liegen wie bei Figur 12.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dafs die Legendreschen Gleichungen noch unendlich viele Rotationsflächen enthalten. Läfst man nämlich alle Glieder mit ϑ weg, so bleibt die Gleichung $r^5 = A + BX_4 + CX_6 + DX_8 + \cdots$, welche nur Rotationsflächen darstellt.

III. Körper von kinetischer Symmetrie in Bezug auf eine Achse.

Körper von kinetischer Symmetrie in Bezug auf eine Achse nennt man solche Körper, bei welchen eine Achse in der Weise ausgezeichnet ist, dafs für alle Achsen, welche durch einen Punkt der ausgezeichneten Achse laufen und zu ihr senkrecht stehen, die Trägheitsmomente gleich grofs sind. Einfache Beispiele solcher Körper sind gerade Prismen mit regulärem Viereck, Achteck, Zwölfeck u. s. f. als Basis und alle Rotationsflächen.

Läuft die ausgezeichnete Achse durch den Schwerpunkt, was bei den angegebenen Beispielen der Fall ist, so mufs man den Körper so abstutzen können, dafs das Trägheitsmoment für die ausgezeichnete Achse gleich wird dem Trägkeitsmoment für die Achsen, welche im Schwerpunkt auf ihr senkrecht stehen, d. h. dafs der Körper kinetische Symmetrie für den Schwerpunkt bekommt. Dieses Problem soll für *Rotationskörper* durchgeführt werden.

Die Hauptträgheitsachsen eines Rotationskörpers sind die Rotationsachse und zwei zu ihr im Schwerpunkt senkrechte Achsen. Diese Hauptträgheitsachsen seien unsere Koordinatenachsen, und zwar die Rotationsachse die z-Achse. r sei der senkrechte Abstand von ihr, gemessen in irgend einer Richtung. $r = \varphi(z)$ sei die Gleichung der (halben) Meridiankurve, ϑ der Winkel der Meridianebene gegen die xz-Ebene.

Damit der Anfangspunkt auch wirklich Schwerpunkt ist, setzen wir fest, daſs die Meridiankurve orthogonal symmetrisch zur r-Achse sei, daſs also $\varphi(z)$ eine *gerade* Funktion von z sei.

Durch das Abstutzen darf die schon vorhandene Symmetrie nicht zerstört werden. Daher muſs mit einer Rotationsfläche, welche dieselbe Rotationsachse hat, abgestutzt werden. Damit auch der Schwerpunkt unverrückt bleibt, muſs die abstutzende Fläche auch orthogonal-symmetrisch zur xy-Ebene sein. Als die *einfachsten* Flächen kommen somit in Betracht: 1. Zwei zur Rotationsachse senkrechte, vom Anfangspunkt gleich weit entfernte Ebenen, 2. eine Rotationscylinderfläche.

Beide Fälle sollen behandelt werden.

a. Abstutzen durch zwei Ebenen.

Die beiden Ebenen sollen vom Anfangspunkt den Abstand d haben. Es muſs dann, da das Trägheitsmoment des abgestutzten Körpers für die Rotationsachse gleich sein muſs seinem Trägheitsmoment für die x-Achse (oder y-Achse, was gleich ist), folgende Gleichung bestehen (*homogene* Körper vorausgesetzt):

$$\int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} r^3 dr dz d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} (z^2 + r^2 \sin^2\vartheta) r dr dz d\vartheta \quad \text{(s. Fig. 15)},$$

oder:

$$\int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} z^2 r\, dr\, dz\, d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_{-d}^{+d}\int_0^{\varphi(z)} r^3 \cos^2\vartheta\, dr\, dz\, d\vartheta.$$

Integriert man über r und ϑ, so kommt:

$$4\int_{-d}^{+d} [\varphi(z)]^2 \cdot z^2 dz = \int_{-d}^{+d} [\varphi(z)]^4 dz.$$

Da $\varphi(z)$ eine gerade Funktion von z ist, kann man auch schreiben

$$4\int_0^d [\varphi(z)]^2 z^2 dz = \int_0^d [\varphi(z)]^4 dz.$$

Diese Bedingung muſs erfüllt sein, damit der abgestutzte Körper kinetische Symmetrie besitzt.

Beispiele: 1. Rotationsellipsoid:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Hier ist

$$r = \varphi(z) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2}.$$

Setzt man dies in die Bedingungsgleichung ein, so bekommt man eine Gleichung zur Berechnung von d und es ergiebt sich:

$$d = 0 \text{ und } d^2 = \frac{5b^2(a^2+2b^2)}{3(a^2+4b^2)} \pm \frac{2b^2}{3(a^2+4b^2)} \sqrt{25b^4 - 20b^2a^2 - 5a^4}.$$

Die zwei letzten Werte von d sind nur reell, wenn $b > a$ ist, das heifst wenn das Rotationsellipsoid ein gestrecktes ist.

2. Kreiscylinder.

$$r = \varphi(z) = c.$$

Die Bedingungsgleichung wird:

$$4\int_0^d c^2 z^2 \, dz = \int_0^d c^4 \, dz.$$

Hieraus

$$d = \pm \frac{c}{2}\sqrt{3}. \text{ Siehe Figur 16.}$$

3. Kreiskegel.

$$r = \varphi(z) = z \cdot tg.\alpha \text{ (Fig. 17).}$$

Man findet

$$\tfrac{4}{5}\operatorname{tg}^2\alpha \cdot d^5 = \tfrac{1}{5}\operatorname{tg}^4\alpha \cdot d^5.$$

d fällt hinaus und es mufs $\operatorname{tg}\alpha = \pm 2$ sein. D. h. man kann nur einen Kegel von der halben Öffnung $\alpha = 63^0 26' 6''$ durch zwei zur Achse senkrechte Ebenen so abstutzen, dafs man einen Körper von kinetischer Symmetrie erhält. Bei diesem Kegel ist aber dann gleichgiltig, in welchem Abstand d vom Anfangspunkt die Ebenen liegen.

b. Abstutzen durch einen Kreiscylinder.

Die Gleichung der Meridiankurve habe die Form $z = \chi(r)$. Diese Gleichung stelle nur den oberhalb der r-Achse gelegenen Teil der Kurve dar. Der unterhalb gelegene Teil hat dann die Gleichung $z = -\chi(r)$, da die Kurve orthogonal symmetrisch zur r-Achse sein soll. Das Trägheitsmoment für die x-Achse mufs wieder dem für die z-Achse gleich sein. Man hat also, wenn c *der Radius des schneidenden Cylinders* ist, die Bedingungsgleichung

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{c}\int_{-\chi(r)}^{+\chi(r)} z^2 r \, dz\, dr\, d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_0^{c}\int_{-\chi(r)}^{+\chi(r)} r^3 \cos^2\vartheta \, dz\, dr\, d\vartheta,$$

oder nach Integration über z und ϑ:

$$\tfrac{2}{3}\int_0^c [\chi(r)]^3 r\, dr = \int_0^c \chi(r) \cdot r^3 dr.$$

Beispiele: 1. Rotationsellipsoid (abgeplattet). Man erhält zur Bestimmung von c eine allgemein nicht lösbare Gleichung 5. Grades.

2. Der durch 2 parallele, zur z-Achse senkrechte, im gleichen Abstand d vom Anfangspunkt liegende Ebenen begrenzte Raum soll durch den Cylinder so abgeschnitten werden, daſs ein Körper (Cylinder) von kinetischer Symmetrie entsteht. — Man hat hier $\chi(r) = d$. Dann ergiebt sich $c = \frac{2}{3} d \sqrt{3}$, was mit dem Resultat unter a,2 übereinstimmt.

3. Der von einer Kreiskegelfläche begrenzte, nach *auſsen* sich erstreckende, d. h. auſserhalb des Kegelkörpers gelegene Raum soll ebenso abgeschnitten werden.

Man hat $z = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ (Fig. 18). Daraus ergiebt sich

$$\tfrac{2}{15} c^5 \operatorname{ctg}^3 \alpha = \tfrac{1}{5} c^5 \operatorname{ctg} \alpha.$$

c *fällt hinaus* und es muſs $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$ sein. Der Kegel muſs also die bestimmte halbe Öffnung $\alpha = 39^0\,13'\,55''$ haben. Dann kann man aber mit beliebigem Cylinder abschneiden. Das erhaltene Stück hat die Form eines Kreiscylinders, aus welchem die beiden von den Grenzkreisen zum Mittelpunkt sich hineinziehenden Kreiskegel herausgebohrt sind.

Kleinere Mitteilungen.

Der Rechenschieber in Deutschland.

Man begegnet häufig der Meinung, der logarithmische Rechenschieber sei in Deutschland noch nicht lange bekannt. So steht in der Schrift von A. Göring, Der Rechenstab aus dem mechanisch-mathematischen Institut von Dennert & Pape, Altona 1873, auf S. 31: „Die erste Hinweisung auf den Rechenstab dürfte in Deutschland durch die Beschreibung desselben von Redlich in der Zeitschrift für Bauwesen, 1859, erfolgt sein“. Ferner ist dort gesagt, der Rechenschieber habe, bevor die Firma Dennert & Pape seine Herstellung in Deutschland übernahm (1871), nur aus Frankreich bezogen werden können. Andere verfolgen das Auftreten des Rechenschiebers in Deutschland nicht einmal so weit zurück. Deshalb erscheint es nicht überflüssig, hier einige Thatsachen zusammenzustellen, die aufs deutlichste zeigen, wie irrig die obige Meinung ist. Sehen wir auch davon ab, dafs der deutsche Doktor der Rechte J. M. Biler 1696 wahrscheinlich zuerst gegen einander drehbare kreisförmige logarithmische Skalen angewendet hat — W. Oughtred scheint 1627 blofs eine feste kreisförmige Skala mit zwei drehbaren Zeigern benützt zu haben —, dafs in des Leipziger Mathematikers J. Leupold bekanntem Theatrum arithmetico-geometricum von 1727 nicht nur Bilers Instrument, sondern auch ein unseren heutigen schon sehr ähnlicher Rechenschieber beschrieben und abgebildet ist, dafs ferner des berühmten J. H. Lambert „Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe . . .“ von 1761 (neue Auflage 1772) heute noch eine der besten Anleitungen bildet und Lambert in dem Vorbericht zu dieser Schrift mitteilt, der Mechanikus G. F. Brander in Augsburg fertige Rechenstäbe von vier Schuh Länge nach seiner Angabe aus Holz oder Metall an[1]), so ist doch aus der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts folgendes zu berichten. In den ältesten Bänden des 1820 von J. G. Dingler begründeten Polytechnischen Journals finden sich zahlreiche Mitteilungen über in England gemachte Fortschritte auf dem Gebiete der Rechenschieber — wir können nicht unterlassen, auf die köstliche, den damaligen tiefen Stand des technischen Unterrichts kennzeichnende Anmerkung der Redaktion in

---

1) Diesen Ursprungs könnte der als vortrefflich bezeichnete, aus zwei getrennten Messingstäben von 36 $^1/_4$ Wiener Zoll Länge bestehende Rechenschieber sein, den Schulz von Strassnicki unter Nr. XI auf S. 197 seiner „Anweisung“ (s. unten) beschreibt und der aus dem Nachlafs eines Wiener Raritätensammlers „im Preise eines alten Messings“ für die Werkzeugsammlung des Polytechnischen Instituts in Wien erstanden worden war.

Band 32 von 1829, S. 173 hinzuweisen, die mit dem Satze beginnt: „Wir haben von der Notwendigkeit der Verbreitung des Rechenmaſsstabes unter unseren Baumeistern, Zimmerleuten u. s. w. schon so oft gesprochen, daſs wir uns selbst über unseren unermüdeten Eifer wundern könnten, wenn wir uns nicht noch mehr darüber wundern müſsten, daſs nur wenige unserer Baumeister u. s. w. wissen, was ein Logarithmus ist". Als freie Bearbeitung einer schwedischen Schrift aus dem Jahre 1824 ist in Berlin 1825 eine „Anweisung zum Gebrauch eines Rechenstabes für Forstmänner, Technologen und angehende Mathematiker" von Fr. W. Schneider erschienen.[1] Auf dem Umschlag ist ein Berliner Mechaniker, F. Dübler, genannt, bei welchem Rechenschieber aus Buchsbaum (zu 5 Rthlr. 5 Sgr. = 9 Fl. 18 Kr.) sowie von Messing (versilbert, zu 8 Rthlr. 5 Sgr. = 14 Fl. 42 Kr.) zu haben seien und in dem Vorwort zur „Anleitung zum Gebrauch des Rechnenschiebers (!)" von C. Hoffmann, Berlin 1847 — aus Vorträgen des Verfassers in der Polytechnischen Gesellschaft zu Berlin entstanden — ist von drei Mechanikern in Berlin, Th. Baumann, C. T. Dörffel und C. G. Grunow, ausdrücklich gesagt, daſs sie Rechenschieber anfertigen, nicht nur verkaufen (zu 2 Thlr. das Stück). Handelte es sich bei Biler und Lambert um selbständige Leistungen, bei Schneider wahrscheinlich um englische, über Schweden gekommene Einflüsse, so weist uns Hoffmann auf Wien. Hier hatte A. Burg mit dem Rechenschieber bekannt gemacht, für dessen Verbreitung dann hauptsächlich L. C. Schulz von Strassnicki (Strassnitzki) mit gröſstem Eifer wirkte, besonders durch Veröffentlichung der sehr ausführlichen „Anweisung zum Gebrauche des englischen Rechenschiebers ...", Wien 1843, und durch Vorlesungen, die er als Professor der Mathematik am Polytechnischen Institut (der jetzigen technischen Hochschule) in Wien seit 1843 lange Jahre hindurch (unentgeltlich und an Sonntagen, um sie jedermann zugänglich zu machen) hielt. Schulz von Strassnicki benützte bei seinen Vorträgen schon zur Erklärung einen gewaltigen Rechenschieber von 8 Schuh Länge, wie ähnliche aus späterer Zeit und wohl infolge französischer Anregungen — die Firma Tavernier-Gravet in Paris führt solche von 2 m Länge als „Règles pour démonstration" noch jetzt — die Sammlungen unserer technischen Hochschulen aufweisen. Auf den unmittelbaren Einfluſs desselben Gelehrten sind auſser der oben genannten Schrift von Hoffmann noch einige in Wien erschienene zurückzuführen, nämlich die „Leicht faſsliche Anleitung zum Gebrauch des Rechenstabes ..." von F. von Schwind, 1844, die Beschreibung eines von Schulz von Strassnicki selbst konstruierten, dem österreichischen Maſs- und Münzsystem angepaſsten besonderen Rechenschiebers für Bauberechnungen von A. Schefczik, 1845, und die „Anleitung zum Gebrauch einiger logarithmisch geteilter Rechenschieber ...", 1851, deren Verfasser E. Sedlaczek Vorträge über den Rechenschieber im Verein der „Freunde der Naturwissenschaften" zu Wien hielt und verschiedene Aufsätze über denselben in Zeitschriften veröffentlichte. Es wurden damals in Wien Rechenschieber — abgesehen von solchen für besondere Zwecke — in drei Formen hergestellt,

1) Es scheinen englische Vorbilder benützt zu sein, da z. B. die aus England stammende Bezeichnung der vier Skalen der Vorderseite des Rechenschiebers durch die Buchstaben A, B, C, D angewendet ist.

die eine mit in Kupferstich ausgeführten Skalen, die der Technologe Prof. G. Altmütter selbst auf Pappe aufzog — sie kosteten mit Futteral nur 2 Fl. Silbermünze, waren aber nach Sedlaczeks Angabe 1851 schon längst vergriffen[1]) — ferner zwei andere aus Buchsbaumholz in der Werkstätte von F. Werner, die 3 Fl. bezw. 5 Fl. Konventionsmünze kosteten. Sedlaczek giebt ferner eine Wiener Firma an, von der echte englische Rechenschieber bezogen werden konnten. Der erwähnte Prof. Altmütter suchte auch durch Anschaffung hauptsächlich englischer und französischer Rechenschieber verschiedener Arten, soviel ihrer aufzutreiben waren, für die Werkzeugsammlung des Polytechnischen Instituts die Bestrebungen Schulz von Strassnickis zu unterstützen; im Anhang I zu des letzteren Schrift sind dieselben (rund ein Dutzend) beschrieben. Wenn wir schliefslich noch erwähnen, dafs Schulz von Strassnicki in der im Juli 1842 geschriebenen Vorrede zu seiner „Anweisung" die Lehrer an technischen Schulen und Realschulen bittet, sich des Rechenschiebers anzunehmen und denselben in ihren Kreisen zu verbreiten, so glauben wir hinlänglich gezeigt zu haben, dafs schon in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts viel, sehr viel geschehen ist, um dem Rechenschieber in Deutschland die verdiente Geltung zu verschaffen. M.

Mantisse. In seiner „Notiz zur Geschichte der Logarithmentafeln" in den Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft, Bd. 4 (1901), S. 52—56, giebt Herr E. Hoppe an, das Wort Mantisse als Bezeichnung für den dezimalen Teil eines Logarithmus komme blofs in Deutschland vor, und er wirft die Frage auf, ob es nicht besser wäre, dieses Wort wieder fallen zu lassen. Dem gegenüber sei bemerkt, dafs in der Schrift von Gros de Perrodil, Théorie de la règle logarithmique . . ., Paris 1885, p. 27, von dem Gebrauch „de consacrer un nom particulier (mantisse) à la partie décimale d'un logarithme" als einem solchen gesprochen wird, „qui tend à se généraliser". M.

Preisaufgaben für 1903.

Académie des Sciences, Paris. Prix Fourneyron: Étude théorique et expérimentale des turbines à vapeur. Die Arbeiten müssen, gedruckte in zwei Abdrücken, vor dem 1. Juni 1903 bei dem Secrétariat de l'Institut eingereicht werden.

---

1) Dieser Versuch zur Herstellung billiger Rechenschieber durch Verwendung von auf Papier gedruckten Skalen ist also älter, als der in Frankreich von L. Lalanne unternommene („Règle à enveloppe de verre"), der in den Anfang der 50er Jahre fällt. Der auf Karton gedruckte Taschenrechenschieber von Prof. A. Wüst in Halle stammt aus dem Jahre 1880. Vor einigen Jahren hat bekanntlich die Firma Gebr. Wichmann in Berlin wieder Rechenschieber mit Papierskalen (auf Holzunterlage) in den Handel gebracht. Übrigens waren schon die Rechenscheiben („Cadrans logarithmiques") von A. S. Leblond, 1795, auf Papier gedruckt.

Académie Royale de Belgique. Trouver la forme des termes principaux introduits, par l'élasticité de l'écorce terrestre, dans les formules de la nutation en obliquité et en longitude. — Preis 800 Frs. (S. auch diese Zeitschrift Bd. 46, S. 382.)

Auskünfte.

H. H., S. Zur Ergänzung unserer Angaben auf S. 266 dieses Bandes bemerken wir, dafs ein Aufsatz von dem Kommandanten E. Guyou „Sur l'application de la division décimale du quart de cercle à la pratique de la navigation" sich unter C, p. 1—15, im Anhang des Annuaire pour l'an 1902, publié par le Bureau des Longitudes, findet, sowie dafs der Compte rendu du Congrès international de Chronométrie de 1900 jetzt erschienen ist. M.

D. S., J. Sehr zu empfehlen ist A. Töplers Vorlesungsapparat zur Statik und Dynamik starrer Körper (vergl. Dycks Katalog mathematischer Modelle u. s. w., Nachtrag, München 1893, S. 83). Die Kräfte können beliebig im Raume liegen. Preis allerdings 500—600 Mark. M.

Anfrage.

In der Geschichte der Astronomie von R. Wolf, München, 1877, ist auf S. 354 bemerkt, Horner habe (in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts) vorgeschlagen, beim *Rechenschieber* den geraden Stab durch eine Kombination kürzerer und auf einander drehbarer (?) Stäbe zu ersetzen. Kann jemand den Ursprung dieser schwer verständlichen Mitteilung angeben? Handelt es sich vielleicht um das Urbild der Rechenschieber mit gebrochenen Skalen von Mannheim, Everett, Hannyngton, Thacher u. s. w.?

R. Mehmke.

Bücherschau.

Erich Geyger. Die angewandte darstellende Geometrie. Leipzig 1902. Verlag von Bernh. Friedr. Voigt. 266 S. Preis: geh. 5, geb. 6 M.

Dieses Werk, Bd. XI des von Hans Issel herausgegebenen „Handbuchs des Bautechnikers", ist in erster Linie für Studierende der Baugewerkschulen, dann aber auch für Bautechniker überhaupt geschrieben und mag nach der Absicht des Verfassers auch als Nachschlagebuch auf dem Bauplatz oder im Konstruktionsbureau von dem Techniker zu Rate gezogen werden. Diesem Standpunkte entsprechend verzichtet der Verfasser auf die Durchführung der mathematischen Beweise und theoretischen Untersuchungen und legt das Hauptgewicht auf anschauliche und praktische Methoden. Er beginnt mit einer Zusammenstellung der wichtigsten Sätze der Elementargeometrie; daran schliefsen sich die Aufgaben des geometrischen Zeichnens, ferner eine gut und übersichtlich gehaltene Darstellung der Eigenschaften und Konstruktionen der Kegelschnitte. Den Mathematiker werden interessieren die näherungsweise Konstruktion eines regulären n-Eckes über einer gegeben Seite sowie die Konstruktion verschiedener Gewölbebogen. Der Referent vermifst in diesem nicht engherzig begrenzten Abriss der für den Bautechniker nötigen geometrischen Kenntnisse ungern einige allgemeine Bemerkungen über Flächen, in Sonderheit über die abwickelbaren und Regel-Flächen und deren Tangentialebenen, wobei das hyperbolische Paraboloid als Beispiel sich von selbst darbietet. Vielleicht wäre es auch von Vorteil, den Unterschied zwischen dem Umdrehungs-Kegel und Umdrehungs-Cylinder einerseits und zwischen dem allgemeinen Kegel 2. Ordnung und dem elliptischen Cylinder 2. Ordnung andererseits zu erwähnen, nachdem durch die nicht mehr auszumerzenden Ausdrücke „gerader und schiefer Kreiskegel", „gerader und schiefer Kreis-Cylinder" mancherlei Verwirrung angerichtet wird.

Der zweite Teil des Buches enthält die Projektionslehre mit Ausschlufs des rein Theoretischen und in einer Anordnung, wie sie sich für den genannten Zweck empfehlen mag. Auch die schiefe und orthogonale axonometrische Projektion werden in einer für den Praktiker durchaus genügenden Weise erörtert. Von den zahlreichen Beispielen sind viele der Praxis entnommen, was einen Vorzug dieses Buches vorstellt. Der Abschnitt über Durchdringungen dürfte bei Besprechung des „Kanten-Verfahrens" vielleicht auch eine Belehrung darüber enthalten, wie man in diesem Falle auf mechanische Weise die Streckenzüge ableiten kann, aus denen sich eine Durchdringung zweier Vielflache im Allgemeinen zusammensetzt. Die letzten Kapitel behandeln endlich noch: Dachausmittelungen, Schraubenlinien und Schraubenflächen und Schiftungen. Das rein Technische in diesen Ausführungen ent-

zieht sich dem Urteil des Berichterstatters. Den Abschnitt über Dachausmittelungen d. h. über die Ermittelung der Horizontalprojektion eines Daches wird auch der Mathematiker mit Interesse lesen und ebenso den über die Darstellung und Austragung eines Krümlings d. h. des Stückes, das zur Verbindung der inneren Wangen einer Treppe dient.

Von den zahlreichen (439) Figuren sind manche (z. B. 303, 323, 324, 325) durch allzuviel Linien unübersichtlich geworden. Sie würden an Anschaulichkeit und plastischer Wirkung gewinnen, wenn die Konstruktionslinien, (Kantenlote, Spursenkrechte) durch Punktierung gegenüber den Hauptlinien der Figur zurückgedrängt würden. Auch ein Register könnte dem Buche sehr zum Vorteil gereichen. Endlich sind dem Referenten noch folgende Ungenauigkeiten aufgefallen, die bei einer neuen Auflage zu vermeiden wären:

S. 104: „Sind die Flächen eines Vielflachs sämtlich unter sich kongruent und treffen in einer Ecke immer gleich viel Kanten zusammen, so heifst es regulär.“ Es wäre die charakteristische Eigenschaft der regulären Polyeder zu erwähnen, dafs die Flächen und die Ecken reguläre Gebilde sind.

S. 122 ff. Wählt man bei einer schief-axonometrischen Projektion die Richtungen der Achsen und die Mafsstäbe beliebig und überträgt die Koordinaten, so erhält man nicht eine Parallelperspektive des Objektes selbst, sondern blos eines dazu ähnlichen. Dies wäre ausdrücklich zu betonen, zumal der Pohlkesche Satz vorausgeschickt wurde.

S. 172: „Die Schnittfigur einer Ebene, welche einen geraden (oder schiefen) Kreiskegel schneidet, ist eine Parabel, wenn die Schnittebene einer Kegelkante parallel, eine Hyperbel, wenn sie der Achse des Kegels parallel liegt.“ Dafür müsste es heifsen: die Schnittfigur ist eine Parabel oder Hyperbel, je nachdem die durch die Kegelspitze gelegte Parallel-Ebene zur schneidenden Ebene den Kegel berührt oder ihn in zwei reellen Mantellinien schneidet.

München, Febr. 1902. Karl Doehlemann.

Frederick Slate. The principles of mechanics. An elementary exposition for students of physics. Part I. New-York 1900. X und 299 Seiten.

Das vorliegende Werk ist der erste Teil einer Einführung in die Mechanik, die für Studenten der Physik bestimmt ist. „Studenten dringen selten in das Herz dieser Wissenschaft ein“, meint der Verfasser; der Grund liege, wie Prof. Klein mit gesundem Urteil bemerkt habe, darin, dafs sie ihre Aufmerksamkeit zu sehr auf die analytische Herleitung der Gleichungen richten, während sie nicht blofs Kenntnis der Mechanik, sondern auch ein Gefühl für ihre Wahrheiten verraten sollten. Um diesem Mangel abzuhelfen. sollten sie sich dem Gegenstande nähern vermöge seiner genetischen Beziehung zur Physik, nicht vermöge seiner äufserlichen Ähnlichkeit mit der Mathematik; sie sollten die Mühe nicht scheuen, die Elemente gründlich zu studieren, bevor sie zu hochstrebenden Verallgemeinerungen übergehen.

Hiernach läfst sich das Ziel, das Herrn Slate vorgeschwebt hat, so bezeichnen, dafs er eine ausführliche und strenge Grundlegung der Mechanik geben wollte, vom Standpunkt eines Physikers aufgefafst und für Physiker

bestimmt. Ist es seinen angestrengten und scharfsinnigen Bemühungen gelungen, dies Ziel zu erreichen? Gewifs besitzt das Werk eigenartige Vorzüge und verdient die Beachtung aller derer, die eine bessere Grundlegung der Mechanik für notwendig halten, allein der Ref. hält es für seine Pflicht, den Bedenken Ausdruck zu geben, die ihn hindern, den von Herrn Slate eingeschlagenen Weg für den richtigen zu halten.

Dafs die Lehre von der *Geschwindigkeit* und *Beschleunigung*, insofern sich diese Begriffe auf Punkte, nicht auf Körper beziehen, als ein Teil der Mathematik angesehen werden darf, ja dafs es blofse Konvention ist, wenn sie in Verbindung mit der eigentlichen Mechanik abgehandelt wird, das wird man dem Verfasser gern zugeben und ihm auch beistimmen, wenn er in den beiden ersten Kapiteln die Kinematik des Punktes und des starren Systems (rigid solid, im Gegensatz zu rigid body, starrer Körper) in einer Weise behandelt, die von der üblichen nicht wesentlich abweicht.

Der Unterschied von der üblichen Auffassung tritt erst in der Dynamik hervor. Anstatt die allgemeinen Gesetze der Bewegung der Körper zu gewinnen, indem nach einem in der theoretischen Physik vielfach angewandten Verfahren zunächst die Bewegung eines möglichst einfachen Gebildes, des materiellen Punktes, betrachtet wird und daraus die Gesetze für die Bewegung von Systemen von Punkten und schliefslich durch einen allerdings ausdrücklich zu rechtfertigenden Grenzübergang die Gesetze für die Bewegung von Körpern abgeleitet werden, beginnt Herr Slate die Dynamik in § 39 mit der Untersuchung der Bewegung eines Körpers. Der materielle Punkt (particle) wird erst viel später, in § 61, eingeführt. Dort heifst es: „Der Massenmittelpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm konzentriert wäre und als ob auf ihn äufsere Kräfte einwirkten, die man auf diesen Punkt übertragen, aber bis auf die Lage unverändert gelassen hat. Die Annahme endlicher Masse und endlicher Kraft in einem Punkte ist selbstverständlich nur eine mathematische Fiktion, die jedoch zweckmäfsig angewandt wird, wenn es ausreicht, die Gröfsen zu kennzeichnen, die sich auf die Bewegung des Massenmittelpunktes beziehen und die anderen Details zu vernachlässigen. Alsdann wird der Körper als *a particle* behandelt, indem man unter diesem Ausdruck eine endliche Masse versteht, deren Ausdehnung vernachlässigt werden darf. Für die Behandlung als *a particle* ist der Massenmittelpunkt der *repräsentative Punkt,* in den man sich die endliche Masse befindlich denkt.“

Ohne Zweifel wird durch diese Ausführungen, die wohl auf Gedanken von Herrn Boltzmann zurückgehen, der Begriff des materiellen Punktes viel schärfer erfafst, als das in anderen Lehrbüchern geschieht; z. B. sagt Herr Appell (Mécanique, t. I, S. 78) weiter nichts als: „Materieller Punkt heifst ein Stück Materie von solcher Kleinheit, dafs man ohne merklichen Irrtum seine Lage wie die eines geometrischen Punktes bestimmen kann.“ Man wird aber auch bedenken müssen, dafs es durchaus zulässig ist, den Begriff des materiellen Punktes zunächst mit Vorbehalt einzuführen und erst hinterher, bei dem Satze von der Bewegung des Massenmittelpunktes eines Systems, weiter auszugestalten, sodafs hier vorliegt, was Herr Volkmann als „rückwirkende Verfestigung“ der einzelnen Teile des Systems der Mechanik bezeichnet.

Herr Slate beginnt die Begründung der Mechanik mit der Einführung des Begriffes der *Trägheit*. Körper äufsern ihre Trägheit in dem Mafse, als es schwieriger ist, sie in Bewegung zu setzen. Um zu dem Begriffe der *Kraft* zu gelangen, betrachtet er die Translationsbewegung eines starren Körpers, bei der man von einer Geschwindigkeit und einer Beschleunigung des *Körpers* reden kann. „Kraft wirkt immer, wenn die physikalischen Bedingungen so beschaffen sind, dafs Geschwindigkeit nach Richtung oder Gröfse geändert wird; die Veränderung der Geschwindigkeit bezogen auf die Zeit mifst die Beschleunigung." Zwei Systeme physikalischer Bedingungen bringen gleiche Kräfte ins Spiel, wenn sie einem gegebenen Körper die gleiche Beschleunigung erteilen. Kraft hat Richtung und Gröfse, die Richtung ist dieselbe wie die der verursachten Beschleunigung. Ferner ist *Masse* das Mafs der Trägheit. Das Massenverhältnis zweier Körper ist das umgekehrte Verhältnis ihrer Beschleunigungen, die durch gleiche Kräfte hervorgebracht werden. Hieraus folgt endlich, dafs Kraft proportional dem Produkt von Masse und Beschleunigung ist.

Es wäre nicht angebracht, an dieser Stelle Einwendungen gegen die vorstehenden Ausführungen zu machen, da es sich hier um prinzipielle Fragen handelt, die nicht mit einigen Zeilen erledigt werden können. Stellen wir uns daher auf den Standpunkt des Herrn Verfassers und fragen wir, wie er von dieser Grundlage aus weiter geht. Zunächst stellt er sich in § 45 die Aufgabe, die Beschränkung auf Translationsbewegungen aufzuheben. Wenn ein starrer Körper eine Rotationsbewegung hat, so sagt er, gebe es nicht mehr einen gemeinschaftlichen Beschleunigungsfaktor, mit dem man die Gesamtmasse des Körpers zu multiplizieren hat, um den Ausdruck der Kraft zu erhalten, denn die gleichzeitigen Beschleunigungen der verschiedenen Punkte unterscheiden sich im allgemeinen nach Richtung und Gröfse. Man müsse daher eine Gruppe von Differentialkräften als wirkend annehmen, von denen eine jede auf ihre Differentialmasse wirkt, und zwar in der Richtung der daselbst stattfindenden Beschleunigung. Ist also x'' die Komponente der Beschleunigung von dm nach der x-Achse, so sei die auf dm wirkende Differentialkraft

$$dP_x = x''\,dm,$$

und hieraus ergebe sich für die „Gesamtkraft" (total force) parallel der x-Achse der Ausdruck:

$$P_x = \int x''\,dm;$$

wofür man, indem $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Koordinaten des Massenmittelpunktes bezeichnen, auch schreiben dürfe:

$$P_x = \int dm \cdot \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}.$$

Diese Gleichung, in der an Stelle der gemeinschaftlichen Beschleunigung eine „mittlere" Beschleunigung steht, sei in allen Fällen anwendbar. Auf ähnliche Weise gehöre zu jedem Typus von Beschleunigung eine entsprechende Kraft, und man gelange so z. B. zu den Begriffen von Tangential- und Normalkraft. Damit aber seien die Mittel gewonnen, um eine Theorie der Bewegung eines starren Körpers zu entwickeln.

In diesen Darlegungen vermifst man eine Definition der „Beschleunigung der Differentialmasse *dm*". Was von dem ganzen Körper gesagt wurde, gilt doch auch für jeden noch so kleinen Teil; solange man also das Massendifferential *dm* als Körper ansieht, kann von seiner Beschleunigung nicht die Rede sein. Sieht man aber *dm* als materiellen Punkt von unendlich kleiner Masse an, auf den eine unendlich kleine Kraft wirkt, so ist das nur eine „mathematische Fiktion", ja noch weniger, denn der Mathematiker wird, wenn er Strenge liebt, den Differentialen keine selbständige Existenz zuerkennen. Die Durchführung des Gedankens, die Mechanik allein auf die Betrachtung von Körpern unter Vermeidung des Begriffes eines materiellen Punktes zu begründen, führt mithin auf Schwierigkeiten, deren Überwindung von Herrn Slate nicht geleistet, ja nicht einmal ernsthaft versucht worden ist (vergl. dazu G. A. Maggi, *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi*. Milano 1895).

Auf der anderen Seite soll durchaus nicht geleugnet werden, dafs es für das Verständnis mechanischer Vorgänge sehr nützlich ist, wenn man sich stets daran erinnert, dafs es sich dabei um die Bewegung von Körpern, nicht von fingierten Punkten handelt, und die Durchführung, die dieser Gedanke in den Kapiteln 6, 7 und 8 gefunden hat, wo es sich um harmonische Bewegung, Pendel, Planetenproblem und ähnliche Aufgaben handelt, kann nur als zweckmäfsig, anregend und aufklärend bezeichnet werden. Nicht nur jeder Student der Physik wird diese Kapitel mit Nutzen durcharbeiten, sondern sie werden auch in weiteren Kreisen gern gelesen werden.

Kiel. Paul Stäckel.

H. A. Roberts. A treatise on elementary dynamics. Dealing with relative motion mainly in two dimensions. London. 1900. XII und 258 Seiten.

Lehrbücher aus einem fremden Lande haben den Vorzug, nicht nur wegen des darin behandelten Gegenstandes zu interessieren, sondern auch zum Vergleiche zwischen dem Zustande des Unterrichtsbetriebes in der betreffenden Disziplin daheim und auswärts anzureizen. Das Buch von Herrn Roberts ist ein Zeichen, dafs der Unterricht in der Mechanik in England sich infolge einer langen, sorgfältigen und einsichtigen Pflege auf einer Höhe befindet, die in Deutschland auch nicht entfernt erreicht wird. Ich habe vielmehr den Eindruck, dafs die Ausbildung der deutschen Studenten gerade in der Mechanik sehr viel zu wünschen übrig läfst. Der Grund hierfür scheint zum Teil in dem eigentümlichen Charakter dieser Wissenschaft zu liegen, die teils der Mathematik, teils der Physik angehört, und da bedauerlicher Weise an den deutschen Universitäten keine besonderen Professuren für Mechanik bestehen, während das in England, Frankreich und Rufsland der Fall ist, so findet die Mechanik häufig nicht die genügende Vertretung. Es wäre höchst verkehrt, wenn entweder der Mathematiker oder der Physiker die Mechanik für sich allein beanspruchen wollten, wie das gelegentlich geschehen ist. Vielmehr sollte der Student in die Mechanik eingeführt werden durch die Vorlesung eines Physikers, der imstande ist, in ihm das Gefühl für das physikalisch Wertvolle in der Mechanik zu erwecken. Auf Grund der so erworbenen Kenntnisse und Fertigkeiten sollte

dann der Mathematiker in einer Vorlesung über analytische Mechanik weiter bauen, denn ohne ein Verständnis der analytischen Mechanik ist es nicht möglich, die Entwickelung der modernen Theorie der Differentialgleichungen und der Differentialgeometrie zu würdigen; damit ist selbstverständlich nicht ausgeschlossen, dafs seitens der Physiker die Einleitungsvorlesung nach speziellen Richtungen im Interesse der physikalischen Ausbildung der Studenten weiter geführt wird.

Eine ausgezeichnete, knappe und doch klare Darstellung der Gegenstände, die in einer solchen Einleitungsvorlesung vorzutragen wären, giebt das vorliegende Werk, in dem der Reihe nach Messung und Einheiten, Kinematik, Newtons Gesetze der Bewegung, Arbeit und Energie, Stofs, Ballistik, harmonische Bewegung und Pendel behandelt werden. Besonders zu rühmen sind die zahlreichen, sorgfältig ausgewählten und feinsinnig gestellten Aufgaben; in der Kunst, solche Aufgaben zu stellen, steht England sehr hoch. Es wäre zu wünschen, dafs das treffliche Werk des Herrn Roberts ins Deutsche übersetzt würde; allerdings müfsten dabei mancherlei auf englische Verhältnisse berechnete Ausführungen umgearbeitet sowie einige Versehen berichtigt werden.

Kiel. PAUL STÄCKEL.

J. J. van Laar. Lehrbuch der mathematischen Chemie. Leipzig, Barth, 1901. Preis M. 7, geb. M. 8.

Der durch zahlreiche Veröffentlichungen in der Zeitschrift für phys. Chemie bekannte Verfasser hat sich in vorliegender Schrift die Aufgabe gestellt, die Anwendungen der Thermodynamik auf die Chemie in systematischer Weise anzuordnen. Es ist dieses zwar nicht der erste Versuch dieser Art, da ein ähnliches Werk bereits in den von Helm veröffentlichten „Grundzügen der mathematischen Chemie" (1894, Leipzig, Engelmann) vorliegt, doch bietet das Buch von van Laar insofern etwas ganz Neues, als hier zum ersten Male eine vollständige Behandlung der chemischen Gleichgewichtszustände mit Erfolg durchgeführt worden ist, allerdings mit Verzichtleistung auf die Behandlung der Elektrochemie, welche der Verfasser dem Werke später hinzuzufügen beabsichtigt. Ausgeschlossen ist ferner die ganze Lehre von den Reaktionsgeschwindigkeiten, die auf rein thermodynamischer Grundlage ohne Zuhilfenahme kinetischer Begriffe bis jetzt nicht gegeben werden konnte. Das Werk zerfällt in zwei Abschnitte, einen theoretischen und einen solchen, welcher die Anwendungen auf konkrete Fälle enthält. Beide sind im sprachlichen Ausdruck klar und korrekt geschrieben, die mathematische Behandlung ist möglichst einfach gehalten bei grofser Allgemeinheit, auch finden sich darin zahlreiche, bisher nicht veröffentlichte Entwickelungen und Ergebnisse. Im ersten Teile (Buch I) werden aus dem ersten und dem zweiten Hauptsatze die von Gibbs zuerst aufgestellten Fundamentalgleichungen abgeleitet, doch wird bei der Aufstellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung das zuerst von Planck eingeführte Potential $\Psi = S - \frac{1}{\tau}(E + pV)$[1]) benutzt. Die Ausdrücke für

1) τ ist die absolute Temperatur.

die Entropie und die Energie werden nicht allein für Mischungen idealer Gase und verdünnte Lösungen, sondern für beliebige Körpermischungen aufgestellt und in der letzteren Form zur Berechnung von Ψ verwendet. Die hierdurch erlangte Allgemeingiltigkeit aller Formeln ist ein besonderer Vorzug dieses Lehrbuches, immerhin würde es vielleicht mit Rücksicht auf solche Leser, welche in erster Linie Chemiker sind, recht nützlich gewesen sein, die für Mischungen idealer Gase gültigen Gleichungen nicht nur als spezielle Fälle der allgemeinen Ausdrücke abzuleiten, sondern, wo es möglich ist, sie direkt mit Benutzung der Zustandsgleichung $pV = R\tau$ aufzustellen. Da in diesem Falle $\tau\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \tau}\right)_v - \Omega = 0$ ist, so läfst sich beispielsweise Gleichung (21) auf etwas einfacherem Wege erreichen. Im weiteren Verlauf dieses einleitenden Teils werden die Eigenschaften der Funktion Ψ sowie ihrer partiellen Differentialquotienten nach den Molekelanzahlen — die molekularen Potentiale — entwickelt. Da diese letzteren ebenso wie die Funktion Ψ homogene Funktionen ersten Grades der Molekelanzahlen sind, so ergeben sich für die Differentialquotienten nach τ und p einige Vereinfachungen, besonders wichtig aber ist der Umstand, dafs für den Fall des Dissoziationsgleichgewichtes, obgleich dann die Dissoziationsgrade noch als neue Variabele hinzutreten $\frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}$ und $\frac{d\psi_1}{d\tau} = \frac{d\psi_1}{d\tau}$ gesetzt werden darf. Die theoretischen Erörterungen des ersten Teils sind bis zur Herleitung der Reaktionsisochore sowie zur Berechnung der molekularen Änderung des Volumens und der aufgenommenen molekularen Wärme durchgeführt. Hierbei ist zu bemerken, dafs die zweite der Gleichungen (43) nicht von van't Hoff, sondern zuerst von Planck hergeleitet worden ist.

Der zweite, umfangreichere Abschnitt des Buches ist den Anwendungen der Theorie auf konkrete Fälle gewidmet. Sie betreffen zunächst Reaktionen in Mischungen idealer Gase, in flüssigen Gemischen und auch in festen Körpern — den festen Lösungen —, sodann werden auch die Gleichgewichtszustände in Mischungen von je zwei Komponenten aus den drei Aggregatzuständen, sowie der Gleichgewichtszustand einer festen, einer flüssigen und einer luftförmigen Phase behandelt. In einer Anzahl von Fällen sind die theoretisch gefundenen Resultate mit Erfahrungsthatsachen verglichen. Von besonderem Interesse und häufig ziemlich verwickelt ist die Behandlung der Lösungen. Da die Erfahrung gelehrt hat, dafs die Molekeln des Lösungsmittels häufig teilweise assoziiert sind — die Dissoziation ist meist äufserst gering — und die Molekeln des gelösten Stoffes, falls er ein Elektrolyt ist, zum Teil in Jonen zerfallen, so ist für jeden dieser Zustände die bezügliche Konzentration zu berechnen und in die Gleichgewichtsbedingung einzusetzen. Die sogenannten Gleichgewichtskonstanten enthalten dann auch noch die Dissoziationsgrade, deren totale Differentialquotienten nach $\sigma\left(=\frac{m}{n}\right)$ nur für den Fall verdünnter Lösungen — wenn also σ ein sehr kleiner Bruch ist — eine nicht zu komplizierte Form haben, da in diesem Falle die Glieder von der Ordnung σ^0 gegen diejenigen von der Ordnung σ^{-1} bezw. σ^1 gegen σ^0 zu vernachlässigen sind. Übrigens würde es erwünscht gewesen sein, wenn der Verfasser die Ausdrücke für die Gröfsen X'_σ, X'_α etc., aus denen sich ihre Gröfsenordnung

ergiebt, angegeben hätte, da ohne diese Angabe der Leser auch nicht imstande ist, die Gröfsenordnung der Gröfsen X_σ etc. zu bestimmen. Von denjenigen Gleichgewichtszuständen, welche rein chemischer Natur sind, finden die Neutralisationsvorgänge zwischen starken und schwachen Säuren und Basen, die Hydrolyse, ferner die für die analytische Chemie wichtige Beeinflussung der Löslichkeit bei Elektrolyten mit gemeinsamem Jon eingehende Berücksichtigung. Die Grundlage für solche Vorgänge bildet das Verteilungstheorem von Arrhenius, sowie die beiden Löslichkeitsprinzipien. Im letzten Abschnitt des 2. Teils ist auf Grund der Gibbsschen Phasenregel und der Freiheitsgrade die Einteilung aller möglichen Systeme gegeben. Dem Verfasser ist es gelungen, in seiner Arbeit den Beweis zu liefern, dafs der mathematischen Chemie gegenüber der reinen und der physikalischen Chemie eine ähnliche selbständige Stellung gebührt, wie sie die mathematische Physik längst inne hat. Das Buch wird gewifs dazu beitragen, das Interesse für die Probleme der neueren Chemie auch in solche Kreise zu tragen, die ihr bislang fremd gegenüberstanden.

Hannover. P. Bräuer.

A. Wassilief, P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen. — N. Delaunay, Die Tschebyschefschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen. Leipzig, B. G. Teubner, 1900. 70 S. Preis ungeb. 4 Mark.

Diese beiden Arbeiten sind in einem, mit dem Bilde Tschebyschefs geschmückten Bändchen vereinigt. Die erste, allgemeiner gehaltene Abhandlung erscheint besonders geeignet, dem aufserrussischen Publikum die Leistungen des hervorragenden Mathematikers näher zu führen. An eine kurze Biographie schliefst sich eine mit zahlreichen Litteraturnachweisen versehene, sich auch auf die Untersuchungen anderer Mathematiker beziehende kritische Besprechung der Probleme, welche den Gegenstand der Tschebyschefschen Arbeiten bilden, und der Resultate, die Tschebyschef selbst gefunden hat. Von seinen Beweismethoden wird nur der Kern mitgeteilt, sodafs der Zusammenhang der historischen Darstellung nirgends unterbrochen wird. Ein Verzeichnis der sämtlichen Arbeiten Tschebyschefs wird am Schlufs gegeben.

Die zweite Abhandlung beschäftigt sich im Besonderen mit denjenigen Untersuchungen Tschebyschefs, welche sich auf die mechanischen Gliedersysteme beziehen. Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt: „Erstens auf möglichst elementarem Wege die technische Bedeutung der Gelenkmechanismen Tschebyschefs und seiner auf diesen Gegenstand bezüglichen Ideen darzulegen; und zweitens die für Mathematiker interessanten Seiten dieser Art in den Arbeiten des russischen Geometers hervorzuheben.“

Charlottenburg. Rudolf Rothe.

Christian Beyel. Darstellende Geometrie. Mit einer Sammlung von 1800 Dispositionen zu Aufgaben aus der darstellenden Geometrie. Leipzig. B. G. Teubner, 1901. 189 S. Preis geb. n. 3,60 M.

Wenn in den mathematischen Disziplinen überhaupt die wirkliche Durchführung von Aufgaben ein unentbehrliches Hilfsmittel vorstellt, um

in das Verständnis der allgemeinen Theorien und Methoden vollständig einzudringen, so sieht die darstellende Geometrie in der konstruktiven Erledigung von Aufgaben der Raumgeometrie geradezu ihren Endzweck und ihr eigentliches Ziel. Trotzdem besteht kein Überfluſs an Büchern, welche viele und gute Aufgaben bieten. Vorteilhaft zeichnet sich in dieser Hinsicht das Lehrbuch von Marx aus, von dem freilich infolge des frühen Todes dieses in Bezug auf die Stellung von Aufgaben so ungemein produktiven Mannes nur der erste Abschnitt erschienen ist. — In dem hier zu besprechenden Buche bilden die Aufgaben den wesentlichsten Bestandteil. Dieselben sind mit Dispositionen versehen, indem die Punkte, Geraden oder Ebenen, welche als Datum dienen sollen, durch ihre (ganzzahligen) Koordinaten in Bezug auf die 3 Tafeln gegeben werden. Diese Methode erweist sich nicht bloſs beim Elementarunterricht als nützlich. Vielmehr führt der Betrieb der darstellenden Geometrie auch an höheren Schulen bald zu folgender Erfahrung. Giebt man bloſs den Text der Aufgabe, so fallen bei den meisten Bearbeitungen die Figuren so ungünstig aus, daſs sie nicht zu Ende geführt werden können. Die halbfertige Zeichnung wird weggeworfen und damit Zeit und Lust verloren. Nur ein kleiner Bruchteil der Studierenden giebt sich die Mühe, die gegebenen Elemente so lange zu ändern, bis eine Figur zu stande kommt, welche das Wesentliche der betreffenden Aufgabe auch wirklich zur Anschauung bringt. Um diesem Miſsstand zu begegnen — und wohl auch um die so unangenehmen *zu kleinen* Figuren zu vermeiden — hat der Verfasser die Aufgaben so disponiert, daſs der Raum, welchen eine Zeichnung einnimmt, 20 Quadratzentimeter nicht überschreitet und daſs ein Bogen von 50 auf 33 cm für zwei bezw. drei Aufgaben ausreicht.

Das vorliegende Buch, nach der Absicht des Verfassers nicht zum Sebststudium eingerichtet, besteht aus drei Teilen. Der erste, „Lehrtext“ betitelt, giebt eine kurze, aber sehr gute Darstellung des Grund- und Aufriſsverfahrens. Die Herstellung axonometrischer Bilder wird wenigstens besprochen. Die Anführung des Pohlkeschen Satzes wäre wohl nicht überflüssig gewesen. Im übrigen finden die mathematischen Beziehungen eine richtige Würdigung. Ungern vermiſst der Referent in diesem Teile die Aufgabe, die vier Schnittlinien zweier konzentrischer Kreiskegel zu konstruieren, welche im § 40 naturgemäſs einen Platz finden würde. Denn die Konstruktion eines Dreikants aus den drei Kantenwinkeln gewinnt erst von dieser Seite her die wünschenswerte Klarheit. Wie man hierbei die möglichen Lösungen zählt, ist Sache des Übereinkommens. Die Zahl der Geraden aber, welche zwei gegebene Gerade g und h unter gegebenen Winkeln α und β schneiden, beträgt jedenfalls 4 und nicht 2, wie Seite 36f. angegeben wird.

Der zweite Teil enthält 190 verschiedene Aufgaben und für jede derselben wieder eine ganze Anzahl verschiedener Dispositionen, so daſs wir im ganzen 1800 Dispositionen vorfinden. Die Aufgaben sind mit ganz geringen Ausnahmen leichter Natur, so daſs sie von einem mit der Stereometrie Vertrauten ohne besondere Kunstgriffe, dem Gedanken nach, gelöst werden können. Sie beziehen sich auf die „Methodenlehre“, d. h. auf die einfachsten gegenseitigen Beziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen sowie auf die Darstellung ganz einfacher Körper. Der Begriff der Schatten-

bildung in seiner primitivsten Form wird hereinbezogen, Durchdringungen bleiben ausgeschlossen. Verbesserungsbedürftig erschienen dem Referenten folgende Aufgaben: I. Kap. G und H (Definition des Oktaeders?); VI. Kap. H (*A* und *B* sollen auf *a* und *b* liegen); IX. Kap. B (Das Quadrat soll *in* der Ebene liegen); XI. Kap. I (Überbestimmt), N (Druckfehler). Der Referent hat eine Reihe der gegebenen Aufgaben durchgezeichnet, die sich sämtlich als gut disponiert erwiesen.

Der dritte Teil des Buches enthält „Proben und Bemerkungen zu den vorhergehenden Aufgaben". Die Proben sind entweder *allgemeiner* Natur, so dafs sie für jede Disposition Geltung haben oder sie beziehen sich speziell auf die betreffende Disposition. Beispielsweise wird der Aufgabe (I. Kap. S):

„Man zeichne eine vierseitige Pyramide, deren Grundfläche ein Parallelogramm $ABCD$ ist. Gegeben sind drei auf einander folgende Ecken A, B, C des Parallelogramms und die Spitze M der Pyramide" beigegeben die folgende

Allgemeine Probe: Die zwei Projektionen der gleichnamigen Seiten des Parallelogramms $ABCD$ schneiden sich in vier Punkten einer Geraden t. Die zwei Projektionen der gleichnamigen Kanten MA, MB, MC, MD schneiden sich in vier Punkten T_a, T_b, T_c, T_d. Dann gehen T_aT_b und die Geraden $A'B'$, $A''B''$ durch einen Punkt. Ebenso T_bT_c und $B'C'$, $B''C''$ u. s. f. Für die vierte Ecke D des Parallelogramms ist $x_a - x_b + x_c - x_d = 0$.

Der Verfasser wird sich ein Verdienst und den Dank vieler im Lehramt Stehenden erwerben, wenn er seinen Vorsatz ausführt und seiner brauchbaren und schönen Sammlung, in der ein grofser Aufwand von Zeit und Mühe aufgespeichert liegt, eine weitere Reihe von Aufgaben folgen läfst, die sich auf die Behandlung der Körper, auf Durchdringungen und vielleicht auch auf die Schnittkurven von Flächen 2. Ordnung, in Sonderheit der Kegel- und Zylinderflächen, beziehen.

München, 30. Mai 1902. Karl Doehlemann.

E. Hammer. Der Hammer-Fennelsche Tachymetertheodolit und die Tachymeterkippregel zur unmittelbaren Lattenablesung von Horizontaldistanz und Höhenunterschied. (D. R. P. Nr. 122 901). Beschreibung und Anleitung zum Gebrauch des Instruments. Erste Genauigkeitsversuche. Mit 16 Figuren im Text und 2 lithographierten Tafeln. 4°. 52 S. Stuttgart 1901. Konrad Wittwer.

An Bestrebungen, die tachymetrische Methode durch instrumentelle Einrichtungen oder durch rechnerische und graphische Hilfsmittel zu erleichtern, hat es nicht gefehlt. Der Verf. bespricht sie kurz in der Einleitung. Es ist ihm aber nach mehrjährigen Versuchen gelungen, eine Konstruktion zu finden, die durch einmaliges Anzielen der Latte sowohl die Horizontaldistanz, als auch den Höhenunterschied abzulesen gestattet. Die Vorteile gegenüber anderen Konstruktionen sind einleuchtend: Es sind besondere Einstellungen etwa durch Fadenmikrometer oder Verschiebung eines Mefskeils unnötig, die Ablesungen geschehen nicht an verschiedenen

Instrumentteilen, wie bei Benutzung eines Höhenkreises, die schiefe (zur Fernrohrrichtung senkrechte) Stellung der Latte, wie bei den Projektionstachymetern, ist umgangen. Die Rechnung wird im vorliegenden Falle auf die Multiplikation mit 100 und 20 beschränkt. Dabei ist nicht die höchste erreichbare Genauigkeit angestrebt worden, sondern es sollte dem Bedürfnis der Praxis in Bezug auf die Schnelligkeit der Messung in erster Linie genügt werden.

Das gewünschte Ziel liefs sich am einfachsten durch eine rein optische Einrichtung erreichen. In dem Gesichtsfelde des geraden, nicht durchschlagbaren Fernrohrs erscheint neben dem Lattenbilde in der linken Hälfte, die durch die senkrechte Kante eines Prismas begrenzt ist, das Bild eines Diagramms. Dieses Diagramm ist aus einer genauen Zeichnung durch 20malige Verkleinerung photographisch auf eine ebene Glasplatte übertragen worden und befindet sich in fester Verbindung mit dem Unterteil des Instruments. Die Platte ist der Visierebene parallel seitlich der Mitte des Fernrohrs aufgestellt. Ein im Innern des an dieser Stelle mit einer Öffnung versehenen Fernrohrs angebrachtes Prisma reflektiert das Bild des Diagrammes in der Richtung nach dem Okular zu. Eine Linse, die zwischen dieses Prisma und das Okular geschaltet ist, und sich zur Regulierung der Bildgröfse etwas verschieben läfst, entwirft in der Fadenebene des Okulars ein reelles Bild des Diagramms, das noch durch eine zweite, hier angebrachte Prismeneinrichtung seitlich verschoben wird, damit es die gewünschte Lage in der linken, durch die vertikale Prismenkante begrenzten Hälfte des Gesichtsfeldes einnimmt. Beim Kippen des Fernrohrs verschiebt sich das Bild des Diagramms in der Weise, dafs ein hineingezeichneter Kreisbogen, dessen Zentrum (aufserhalb des Diagramms) in der Kippachse liegt, den Horizontalfaden im Gesichtsfelde stets berührt, wenn dieser bei Horizontalrichtung des Fernrohrs Tangente des Kreises war. Bei horizontalem Fernrohr fallen gleichzeitig zwei Marken, deren Verbindungslinie durch den Mittelpunkt des Kreises (also durch die Kippachse) geht, in die vertikale Prismenkante, neben der rechts im Gesichtsfeld die Latte, parallel dazu, eingestellt wird. Bei der Kippung des Fernrohrs fällt ein anderer Radius des Kreisbogens mit der Prismenkante zusammen, der mit dem markierten Radius den Kippungswinkel (α) einschliefst. Nun ist das Fernrohr ein Porrosches und die Abmessungen sind so gewählt, dafs der anallaktische Punkt in die Kippachse fällt. Wenn daher die Radien des Kreisbogens um Stücke $dr = l \cdot \cos^2 \alpha$ verlängert werden, wo l konstant ist, so wird das neben dem, bei Kippung um α, senkrecht stehenden Radius liegende Lattenstück von der Länge dr der horizontalen Entfernung der Latte proportional sein. Die Länge dr kann aber an der Latte direkt abgelesen werden, wenn der Horizontalfaden (demnach auch der ihn berührende Kreisbogen) mit der in Instrumenthöhe auf der Latte angebrachten Nullmarke zur Deckung gebracht wird, indem dann eine die Endpunkte der verlängerten Radien verbindende Kurve das Lattenbild in einem Punkte trifft, dessen Ablesung mit einer Konstanten (hier 100) multipliziert der Horizontaldistanz e gleich ist. Da $e \cdot \operatorname{tg} \alpha$ der Höhendifferenz proportional ist, so liefert offenbar die Verlängerung der Kreisradien um $\operatorname{tg} \alpha \cdot dr$ die Punkte einer zweiten Kurve (Höhenkurve), deren Schnittpunkt mit dem Lattenbild die Höhe bis auf einen konstanten Faktor (hier 20) unmittelbar ablesen läfst. Die beiden

Äste dieser Kurve sind durch Vorzeichen unterschieden, welche den Höhen- und Tiefenwinkeln entsprechen. Die (im 5fachen Mafsstabe der Entfernungskurve gezeichnete) Höhenkurve überschreitet wegen des Wachstums von tg α schnell das Gesichtsfeld. Um daher noch Kippungswinkel bis 30° verwenden zu können, mufste der Horizontalfaden in die obere Hälfte des Gesichtsfeldes verlegt werden. Hierdurch wird die Gestalt der Kurven etwas verändert und die symmetrische Form der beiden Äste für Höhen- und Tiefenwinkel aufgehoben.

Über die Prüfung und die Korrektionsvorrichtungen des Instruments sind ausführliche Angaben gemacht, der Kollimationsfehler wird durch Verschiebung des Objektivs beseitigt, da in der Fadenebene die senkrechte Prismenkante den Vertikalfaden des Fadenkreuzes vertritt und ohne Störung des Diagrammbildes nicht verändert werden kann.

Von besonderem Interesse sind die allerdings noch nicht am endgültig hergestellten Instrument beobachteten Versuchsreihen. Bis auf Entfernungen von 250 m wurde in der Horizontaldistanz nur ausnahmsweise eine Abweichung von 1 m erhalten, bei den Höhen kommt noch die Abweichung von 0,3 m bei einer Messungsreihe vor, bei der ein gewöhnlicher kleiner Tachymetertheodolit die Höhen lieferte, meist überschreitet der Fehler nicht 0,1 m.

Dieselbe Einrichtung läfst sich ebenso auch an einer Kippregel anbringen. Der Tachymetertheodolit kann noch durch einen Höhenkreis, eine Bussole u. a. vervollständigt werden. Für die Konstruktion geeigneter Latten macht der Verf. verschiedene Vorschläge.

Die Ausführung der Ideen des Verf. ist durch die bekannte Firma O. Fennel Söhne in Kassel geschehen, die auch die Konstruktionszeichnungen zur Ergänzung der beigegebenen photographischen Abbildungen geliefert hat.

Potsdam. A. Galle.

Neue Bücher.

Analysis.

BAGNI, TULLIO, Saggio di una nuova teoria matematica delle principali operazioni finanziarie in materia di assicurazione. I. 8°. 23 p. Roma 1901, tip. Tiberina di F. Setth.

PREUX, L., La Physique des nombres. Arithmétique expérimentale. Petit in-8° avec fig. Paris 1901, Laisney. Fr. 1.50.

Astronomie und Geodäsie, Nautik.

BAULE, ANTON, Lehrbuch der Vermessungskunde. 2. Aufl. gr. 8°. VIII, 471 S. m. 280 Fig. Leipzig 1901, B. G. Teubner. M. 8.80.

BAUSCHINGER, JUL., Tafeln zur theoretischen Astronomie. gr. 4°. IV, 148 S. m. 2 lith. Taf. Leipzig 1901, Engelmann. geb. in Leinw. M. 12.

COLVIN, J. H., Nautical Astronomy. 12mo. London, Spon. 2 s. 6 d.

GUILHAUMON, J. B., Exercices de trigonométrie sphérique, de cosmographie, de navigation et de calculs nautiques. In-4°, avec 3 planches. Paris 1901, Berger-Levrault. Fr. 5.

HAID, M., Die modernen Ziele der Erdmessung. Festrede. Lex. 8°. 20 S. Karlsruhe 1901, Braun. M. 0.60.

HANDWÖRTERBUCH der Astronomie. 26. Lfg. Leipzig 1901, Barth. M. 3.60.

KRISCH, A., Astronom. Lexikon. 2.—5. Lfg. Wien, Hartleben. Je M. 0.50.

Darstellende Geometrie.

ENRIQUES, FED., Lezioni di geometria descrittiva, pubblicate per cura di Umberto Concina. 8°. XI, 421 p. con 24 tav. Bologna, Zanichelli.

VOLK, CARL, Das Skizzieren von Maschinenteilen in Perspektive. gr. 8°. IV, 31 S. m. 54 eingedr. Skizzen. Berlin, Springer. geb. in Leinw. M. 1.40.

Geschichte.

VOGLER, CHR. AUG., Johann Heinrich Lambert und die praktische Geometrie. Festrede. gr. 8°. 21 S. Berlin, Parey. M 1.

Mechanik.

ANTOMARI, X., et HUMBERT, E., Leçons de mécanique à l'usage des candidats à l'école centrale. In-8°. Paris, Nony. Fr. 5.

APPELL, P., Cours de mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale. In-8°. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 7.50.

BACH, C., Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmäfsige Grundlage. 4. Aufl. XXII, 650 S. m. Abb. u. 18 Taf. in Lichtdr. Berlin, Springer. geb. in Leinw. M. 18.

Caldarera, Fr., Corso di meccanica razionale. Vol. II. (Statica, dinamica), fasc. I. 8°. fig. Palermo 1901, tip. Matematica.

Föppl, Aug., Die Mechanik im 19. Jahrh. Ein akadem. Festvortrag. gr. 8°. 25 S. München, Reinhardt. M. 0.80.

Föppl, Aug., Résistance des matériaux et éléments de la théorie de l'électricité. Traduit de l'allemand par E. Hahn. gr. in-8° avec 74 fig. Paris 1901, Gauthier-Villars. Fr. 15.

Frank, W., Über die analytische Bestimmung der elastischen Verrückungen von Fachwerken und vollwandigen Trägern mit Anwendung auf die Berechnung von statisch unbestimmten Systemen. Diss. Stuttgart 1901. 4°. 58 S.

Greiner, R., Über die Einführung der Bedingungen in das Hamiltonsche Prinzip. Diss. Freiburg 1901. 8°. 55 S.

Henrotte, J., Les engrenages. Principes théoriques, tracé, exécution. Autographie. gr. in-4°. Liège, Imprimerie liégeoise. Fr. 6.

Keck, Wilh., Vorträge über graphische Statik m. Anwendung auf die Festigkeitsberechnung der Bauwerke, als Anhang zu des Verf. „Vorträgen über Elastizitätslehre". 2. unveränd. Aufl. gr. 8°. VII, 99 S. m. 83 Holzschn. u. 4 Taf. Hannover, Helwing. geb. in Leinw. M. 3.

Lévy, Maurice, Éléments de cinématique et de mécanique, conforme au programme d'admission à l'école centrale des arts et manufactures. gr. in-8°. Paris, Bernard. Fr. 10.

Pasquier, Ernest, Cours de Mécanique analytique. T. I[er], Vecteurs. Cinématique. Statique et Dynamique. gr. in-8° avec 101 fig. Paris 1901, Gauthier-Villars. Fr. 12.

Picard, Emile, Quelques réflexions sur la mécanique, suivies d'une première leçon de dynamique. In-8°. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.50.

Routh, Edward John, A treatise on Analytical Statics. With illustr. taken from the theories of Electricity and Magnetism. Vol. 2. 2nd ed. Revised and enlarged. 8vo, pp. 390. Cambridge University Press. 14 s.

Sicard, H., Traité de cinématique théorique. Avec des notes par A. Labrousse. gr. in-8°. Paris 1901, Gauthier-Villars. Fr. 4 50.

Tessari, D., La costruzione degli ingranaggi, ad uso delle scuole degli ingegneri e dei meccanici. XV, 225 p. con 8 tav. 8°. Torino, fratelli Bocca. L. 8.

Physik.

Duhem, B., Les théories électriques de J. Clerk Maxwell. Etude historique et critique. gr. in-8°. Paris, Hermann. Fr. 8.

Ferraris, Galileo, Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik. Nach den Vorlesungen über Elektrotechnik geh. in dem R. Museo Industriale in Turin deutsch hrsg. v. Leo Finzi. gr. 8°. XII, 358 S. m. 161 Fig. Leipzig 1901, B. G. Teubner. geb. in Leinw. M. 12.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1902. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellschaft. Halbmonatl. Litteraturverzeichnis, red. v. Karl Scheel u. Rich. Aßmann. 1 Jahrg. 24 Nrn. Nr. 1. 40 S. gr. 8°. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 4.

Helmholtz, H., Abhandlungen zur Thermodynamik. Hrsg. v. Max Planck. (Ostwalds Klassiker Nr. 124). 8°. 84 S. Leipzig, Engelmann. Kart. M. 1.40.

Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. Enthaltend die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astrophysik, Meteorologie und physikal. Erdkunde. 12. Jahrg. 1901. M. 5 Taf. in Schwarz- u. Buntdr. gr. 8°. VIII, 416 S. Leipzig, Mayer. M. 7.

Pernter, J. M., Meteorologische Optik. 1. Abschn. gr. 8°. VIII, 54 S. m. Fig. Wien, Braumüller. M. 1.80.

Pilgrim, Ludw., Einige Aufgaben der Wellen- und Farbenlehre des Lichts. Progr. 4°. 69 S. m. Fig. u. 2 farb. Taf. Cannstatt 1901, Reitzel. M. 3.

Reiger, R., Innere Reibung plastischer und fester Körper. Diss. Erlangen 1901. 8°. 55 S. m. Abb.

Thompson, Sylvanus P., Mehrphasige elektrische Ströme und Wechselstrommotoren. 2. Aufl. Übers. v. K. Strecker u. V. Vesper. (In etwa 10 Heften.) 1. Heft. gr. 8°. S. 1—48 m. 2 Taf. Halle 1901, Knapp. M. 2.

Wiebz, M., Beiträge zur Theorie der Lichtbahnen und Wellenflächen in heterogenen, isotropen Medien. Diss. Rostock 1901. 8°. 60 S. u. Fig.

Rechenapparate, Tafeln.

Bouvart, G., et A. Ratinet, Nouvelles tables de logarithmes à 5 décimales, division centésimale, conforme à l'arrêté ministériel du 3 août 1901 à l'usage des candidats aux écoles Polytechnique et de Saint-Cyr. In-8°. Paris 1901, Hachette. Cart. Fr. 2.

Dunlop, H. C., and Jackson, C. S., Slide rule notes. 4to, pp. 68. London, Simpkin. 3 s.

Gauss, F. G., Fünfstellige vollständige trigonometrische und polygonometrische Tafeln für Maschinenrechnen. gr. 8°. XVIII, 100 S. Halle 1901, Strien. geb. in Leinw. M. 7.

Hammer, E., Sechsstellige Tafel der Werte $\log^{10} \frac{1+x}{1-x}$. Lex. 8°. IV, 73 S. Leipzig, B. G. Teubner. Kart. M. 3.60.

Riem, J., Tables de Multiplications. 2e éd. stéréotype. Petit in-4°. Paris 1901, Gauthier-Villars. Fr. 7.50.

Tables des logarithmes à 5 décimales des nombres naturels de 1 à 10 000 et tables des logarithmes à 5 décimales des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes des arcs du premier quadrant de minute en minute centésimale, dans le système de la division décimale de la circonférence. In-12. Paris 1901, Delagrave. Fr. 2.50.

Tafels van de 2e en 3e macht en van de kwadraat- en kubiekwortels der getallen van 1—1000. Breda 1901, van Turnhout. post 8°. 2 en 23. F. 0.25.

Verschiedenes.

Annuaire des mathématiciens, 1901—1902, publié sous la direction de C. A. Laisant et Ad. Buhl. In-8°. Paris, Naud. Fr. 5.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 30. Bd. Jahrg. 1899. 2. Heft. Berlin 1901, Reimer. M. 5.60.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 30. Bd. Jahrg. 1899. 3. Heft. Berlin 1901, Reimer. M. 12.

Mathematical Questions and Answers from the Educational Times. Edit. by D. Biddle. Vol. 75. Cr. 8 vo. London 1901, Hodgson. 6 s. 6 d.

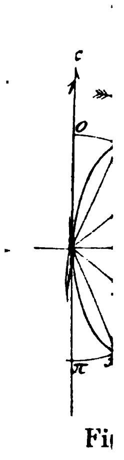
Pearson, Karl, Mathematical Contributions to the Theory of Evolution. X. Supplement to a Memoir on Skew Variation. 4°. London 1901, Dulan. 1 s.

Privat-Deschanel et Focillon, Dictionnaire général des sciences théoriques et appliquées. 5e éd. entièrement refondue, par Jules Gay et Louis Mengin. T. I, A-C. gr. in-8° illustré. Paris, Garnier frères. Fr. 10.

Berichtigung.

In der Besprechung von: E. Hammer, Astronomisches Nivellement . . ., diese Zeitschrift Band 46, mufs es auf S. 495, Z. 19 v. u., heifsen „etwa $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ Sekunde“ statt „$\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ Sekunde“.

A. Börsch.



Fi

x
15m
o
α
π/2
π-α
π
π
Fi

x
r
y
O
ϑ
$s^2 = r^2 si$

Fig.

